Harm de Vries

Partitiestellingen

Bachelor Thesis, 2008

Thesis advisor: Dr. K.P. Hart

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Partitiestellingen

Harm de Vries (hdv@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Juli 2008

Begeleider
Dr. K. P. Hart

Inhoudsopgave

Inleiding

Het ladenprincipe, ook wel bekend onder de naam duivenhokprincipe, zegt in zijn simpelste vorm dat als een voldoende aantal objecten verdeeld wordt over niet te veel laden, er minstens één lade is die veel van deze objecten bevat. In 1930 ontdekte Frank P. Ramsey [**Ramsey**] een bijzondere uitbreiding van dit principe die onder andere zegt dat als we de verzameling van takken van een oneindige volledige graaf in twee klassen verdelen, er een oneindige volledige deelgraaf is waarvan alle takken tot dezelfde klasse behoren. Het principe toont aan dat vanaf een bepaalde omvang willekeurige structuren noodzakelijkerwijs regelmatige deelstructuren moeten bevatten.

Dit verslag geeft de resultaten van het onderzoek dat gedaan is naar de Stelling van Ramsey en de mogelijke uitbreidingen hiervan. Veel resultaten komen tot stand door het nemen van een partitie van een verzameling en vervolgens op een handige manier de verschillende objecten van de verzameling in de juiste klassen van de partitie te plaatsen. We spreken vanwege deze reden vaak over partitierelaties en noemen de stellingen die we behandelen partitiestellingen.

Hoofdstuk 1 is een inleiding in partitierelaties en vormt de basis voor alles wat verder volgt. Het hoofdstuk is met name belangrijk omdat het partitiesymbool hierin geïntroduceerd wordt. Door gebruik te maken van dit symbool kunnen partitierelaties op een korte en duidelijke manier weergegeven worden.

Hoofdstuk 2 behandelt de Stelling van Ramsey en geeft een beperkte uitbreiding van deze stelling.

De Stelling van Erdős en Rado wordt in hoofdstuk 3 behandeld. Deze stelling is een uitbreiding van de stelling van Ramsey naar het overaftelbare geval. Het hoofdstuk kan het beste gelezen worden na hoofdstuk 2 aangezien het een logisch vervolg hierop is.

Er wordt aangenomen dat de lezer bekend is met de basisprincipes van de verzamelingenleer. Een korte herhaling van de belangrijkste begrippen en notatie, wordt gegeven in de bijlage. Een andere belangrijke aanname die we maken is het keuzeaxioma; dat wil zeggen, we gebruiken het axiomastelsel van Zermelo–Fraenkel altijd samen met het keuzeaxioma.

De belangrijkste bron waar gebruik van is gemaakt tijdens het onderzoek, is [**Erdős et al.**]. Voor een ieder die meer wil weten over het onderwerp is dit boek aan te raden.

HOOFDSTUK 1

Partitierelaties

Het ladenprincipe laat zien dat vanaf een bepaalde grootte willekeurige structuren noodzakelijkerwijs deelstructuren bevatten die aan zekere eigenschappen voldoen. De relatie tussen de benodigde grootte van de structuur en de grootte van de deelstructuur met die eigenschappen, is hetgene waarin we geïnteresseerd zijn. In het bijzonder kijken we naar de zogenaamde *partitierelatie*.

1. Definitie en notatie

De relatie tussen de grootte van een groep mensen en het aantal personen binnen de groep dat elkaar kent of elkaar niet kent, is een klassiek voorbeeld van een partitierelatie. Zo geldt dat in iedere groep van tenminste zes mensen er drie personen zijn die elkaar alle drie kennen dan wel elkaar alle drie niet kennen. Voordat we precies kunnen definiëren wat een partitierelatie is, is het nodig enige notatie te introduceren.

Voor een willekeurige verzameling X en kardinaalgetal r, schrijven we

$$[X]^r = \{Y \subseteq X : |Y| = r\}$$

voor de verzameling van deelverzamelingen van X met kardinaliteit r. Merk op dat als X een lineair geordende verzameling is en r een eindig kardinaalgetal, we ieder element van $[X]^r$ kunnen identificeren met een rij $\langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ in X zó dat $x_1 < \cdots < x_r$.

1.1. Voorbeeld. *Voor de verzameling* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *geldt dat* $[X]^2 = \big\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}\big\}$. *De verzameling* $[\mathbf{R}]^2$ *is te identificeren met de verzameling geordende paren* $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *waarvoor geldt dat* $x < y$.

Een (disjuncte) *partitie* van een verzameling X is een paarsgewijze disjuncte familie $\{A_i : i \in I\}$ van deelverzamelingen van X zó dat $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. De verzameling I is hierbij willekeurig; we zeggen vaak dat dit een partitie van X in $|I|$ stukken is. Een partitie van $[X]^r$, waarbij X een willekeurige verzameling is en r een kardinaalgetal, noemen we een r-*partitie* van X.

Een *kleuring* van een verzameling X is een afbeelding waarvan het domein X is. Een kleuring $f : X \to I$ van X is in verband te brengen met een partitie $\{A_i : i \in I\}$ van X via de relatie $A_i = \{x \in X : f(x) = i\}$ voor iedere $i \in I$. Hierdoor spreken we, afhankelijk van de context, soms over een kleuring in plaats van een partitie.

Door gebruik te maken van een partitiesymbolen kunnen partitierelaties op een korte en duidelijke manier gedefinieerd worden. In de literatuur wordt het onderstaande partitiesymbool het meest gebruikt.

1.2. DEFINITIE. *Zij* κ *een kardinaalgetal,* $r \in \mathbf{N}$, I *een verzameling en* a_i $(i \in I)$ *kardinaalgetallen. Het partitiesymbool*

$$\kappa \to (a_i)^r_{i \in I} \tag{1.1}$$

heeft de volgende betekenis: gegeven een willekeurige partitie $P = \{A_i : i \in I\}$ *van de verzameling* $[\kappa]^r$, *bestaan er een* $i \in I$ *en een verzameling* $H \subseteq \kappa$ *zó dat* $[H]^r \subseteq A_i$ *en* $|H| = a_i$.

Een verzameling $X \subseteq Y$ wordt *homogeen* genoemd met klasse i voor de partitie $\{A_i : i \in I\}$ van $[Y]^r$ als $[X]^r \subseteq A_i$ voor zekere $i \in I$. De verzameling H in bovenstaande definitie is een homogene verzameling met klasse i voor de partitie P. Vaak zijn we alleen geïnteresseerd in het wel of niet bestaan van een homogene verzameling en is de specifieke klasse binnen de partitie niet van belang.

1.3. VOORBEELD. *Het hierboven genoemde voorbeeld van een partitierelatie kan met behulp van het partitiesymbool genoteerd worden als*

$$6 \to (a_0, a_1)^2_{i \in 2}$$

waarbij $a_0 = 3$, $a_1 = 3$. *We noteren deze relatie echter meestal als*

$$6 \to (3)^2_2.$$

Deze notatie wordt hieronder verder toegelicht.

De negatie van relatie (1.1) wordt genoteerd als:

$$\kappa \not\to (a_i)^r_{i \in I}.$$

Om te laten zien dat relatie (1.1) niet geldt, is het nodig een partitie te vinden waarvoor geen homogene verzameling bestaat die de vereiste kardinaliteit heeft.

1.4. VOORBEELD. *Laat ons een partitie vinden die de partitierelatie* $3 \not\to (4,1)^1_2$ *aantoont. Zet hiervoor* $A_0 = \{0,1,2\}$ *en* $A_1 = \emptyset$, *dan vormt* $\{A_0, A_1\}$ *een disjuncte partitie van* $[3]^1 = 3 = \{0,1,2\}$. *Stel dat* H *een homogene verzameling is behorende bij klasse* 0. *Dan moet gelden dat* $|H| = 4$; *echter dan volgt dat* $H \subsetneq A_0$. *Stel nu dat* H *homogeen is met klasse* 1. *Dan moet gelden dat* $|H| = 1$, *waaruit volgt dat* $H \subsetneq A_1$, *tegenspraak. Dus voor de gevonden partitie bestaat geen homogene verzameling met de vereiste kardinaliteit.*

Het is gebruikelijk om een ordinaalgetal η te nemen voor de verzameling I in het partitiesymbool in (1.1); dit geeft de partitierelatie:

$$\kappa \to (a_\xi)^r_{\xi < \eta}. \tag{1.2}$$

Aangezien er een bijectieve afbeelding bestaat tussen iedere verzameling I en een ordinaalgetal (gegeven het keuzeaxioma) is het duidelijk dat bovenstaande relatie net zo algemeen is.

Als $a_\xi = a$ voor alle $\xi < \eta$ in (1.2), dan schrijven we de relatie meestal verkort op als

$$\kappa \to (a)^r_\eta.$$

De restrictie tot eindige exponent r in de definitie van het partitiesymbool wordt gerechtvaardigd door onderstaande stelling. Deze stelling laat zien dat de zwakst mogelijke niet-triviale partitierelatie met oneindige exponent niet geldt.

1.5. STELLING. *Voor ieder kardinaalgetal κ geldt*

$$\kappa \nrightarrow (\aleph_0)_2^{\aleph_0}.$$

BEWIJS. Laat $\prec$ een welordening zijn van $[\kappa]^{\aleph_0}$. Definieer de partitie $\{A_0, A_1\}$ van $[\kappa]^{\aleph_0}$ als volgt. Voor $X \in [\kappa]^{\aleph_0}$:

$$X \in A_0 \Leftrightarrow \exists Y \in [X]^{\aleph_0} : Y \prec X$$

$$X \in A_1 \Leftrightarrow \forall Y \in [X]^{\aleph_0} : X \preccurlyeq Y$$

Zij $H \in [\kappa]^{\aleph_0}$ een deelverzameling van κ met kardinaliteit $\aleph_0$. We bewijzen dat H niet homogeen kan zijn. Laat $X \in [H]^{\aleph_0}$ de kleinste oneindige deelverzameling van H zijn. Dan volgt dat $X \in A_1$, dus $[H]^{\aleph_0} \subsetneq A_0$ waaruit volgt dat H niet homogeen is met klasse 0.

Schrijf nu $H = \{h_i : i \in \mathbf{N}\}$. Definieer voor iedere $n \in \mathbf{N}$ de oneindige verzameling

$$H_n = \{h_0, h_2, \ldots, h_{2n}\} \cup \{h_{2i+1} : i \in \mathbf{N}\}.$$

Laat H_{n_0} de kleinste verzameling van de H_n's zijn. Dan geldt dat $H_{n_0} \subseteq H_{n_0+1}$ en $H_{n_0} \prec H_{n_0+1}$, dus $H_{n_0+1} \in A_0$, oftewel $[H]^{\aleph_0} \subsetneq A_1$. We concluderen dat de verzameling H niet homogeen is. $\square$

2. Eigenschappen

We noemen een aantal eigenschappen van partitierelaties die meer inzicht geven in gedrag van de relatie en waar we later handig gebruik van kunnen maken.

1.6. EIGENSCHAP. *Als de afbeelding $f : \nu \to \eta$ een bijectie is tussen de ordinaalgetallen ν en η, dan*

$$\kappa \to (a_\xi)^r_{\xi<\eta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \kappa \to (a_{f(\xi)})^r_{\xi<\nu}$$

BEWIJS. Dit volgt direct uit het feit dat er voor *iedere* partitie een homogene verzameling moet zijn. $\square$

Uit bovenstaande eigenschap volgt dat de volgorde van de verschillende a_ξ's in (1.2) er niet toe doet.

1.7. EIGENSCHAP.

(1) Als $\kappa \leqslant \kappa'$ dan impliceert $\kappa \to (a_\xi)^r_{\xi<\eta}$ dat $\kappa' \to (a_\xi)^r_{\xi<\eta}$.

(2) Als $0 < a'_\xi \leqslant a_\xi$ voor alle $\xi < \eta$ dan impliceert $\kappa \to (a_\xi)^r_{\xi<\eta}$ dat $\kappa \to (a'_\xi)^r_{\xi<\eta}$.

BEWIJS. (1) We mogen aannemen dat $\kappa \subseteq \kappa'$. Zij $P' = \{A_\xi : \xi < \eta\}$ een willekeurige partitie van κ', dan volgt dat $P = \{A_\xi \cap \kappa : \xi < \eta\}$ de partitie P' beperkt tot κ is. Uit (1) volgt dat er een $\xi < \eta$ is en een homogene verzameling H voor de partitie P met $|H| = a_\xi$. Het is duidelijk dat H ook homogeen is voor de partitie P'.

(2) Zij H een homogene verzameling voor zekere klasse $\xi < \eta$ met $|H| = a_\xi$. Neem nu een willekeurige deelverzameling $X \subseteq H$ met $|X| = a'_\xi$. Het is duidelijk dat X homogeen is en de vereiste kardinaliteit heeft. $\square$

1.8. Eigenschap. *Voor ieder kardinaalgetal* κ *en iedere rij* $\langle a_\xi : \xi < \eta \rangle$ *van kardinaalgetallen met* $0 < a_\xi \leqslant \kappa$*, geldt de partitierelatie*

$$\kappa \to (a_\xi)^1_{\xi<\eta}$$

dan en slechts dan als voor iedere rij $\langle a'_\xi : \xi < \eta \rangle$ *van kardinaalgetallen met* $a'_\xi < a_\xi$ *de relatie*

$$\sum_{\xi<\eta} a'_\xi < \kappa$$

geldt.

Bewijs. Het bewijs is duidelijk. $\square$

1.9. Eigenschap. *Neem aan dat we hebben*

$$\kappa \to (a_i)^r_{i\in I}, \tag{1.3}$$

en

$$a_i \to (a_{i_j})^r_{j\in J} \tag{1.4}$$

geldt voor alle $i \in I$*. Dan geldt:*

$$\kappa \to (a_{i_j})^r_{i\in I, j\in J}.$$

Bewijs. Neem $U = I \times J$ en zij $f : [\kappa]^r \to U$ een r-kleuring van κ. Als $f(X) = (i, j)$ voor zekere $X \in [\kappa]^r$, definieer $i = f_1(X)$ en $j = f_2(X)$. Dan is $f_1 : [\kappa]^r \to I$ een kleuring, en uit (1.3) volgt dat er een homogene verzameling A_i bestaat met $|A_i| = a_i$ en kleur i voor zekere $i \in I$. Uit (1.4) volgt nu dat er een homogene verzameling A_{i_j} bestaat met $|A_{i_j}| = a_{i_j}$ en kleur j voor zekere $j \in J$ en kleuring $f_2 : [A_i]^r \to J$. Het is duidelijk dat A_{i_j} een homogene verzameling is met $|A_{i_j}| = a_{i_j}$ en kleur (i, j) voor de kleuring f. $\square$

1.10. Eigenschap. *Zij gegeven de partitierelatie* $\kappa \to (a_\xi)^2_{\xi<\eta}$*. Definieer de volledige graaf* G *met* κ *knopen. De verzameling takken van de graaf* G *kunnen we identificeren met de verzameling* $[\kappa]^2$*. De gegeven partitierelatie kunnen we nu als volgt herformuleren. Indien we iedere tak van de graaf* G *een kleur geven waarbij we* η *kleuren hebben, bestaan er een kleur* $\xi < \eta$ *en een volledige deelgraaf van* G *met* a_ξ *knopen waarvan alle takken de kleur* ξ *hebben.*

In veel gevallen is het handig om partitierelaties op deze manier, met behulp van grafen, te bespreken en we zullen dit dan ook veelvuldig doen. Merk op dat dit alleen kan in het geval we naar 2-partities kijken.

HOOFDSTUK 2

Ramsey-theorie

De wiskundige Frank P. Ramsey bewees in 1930 een resultaat dat tegenwoordig bekend staat als de Stelling van Ramsey [**Ramsey**]. De transfiniete uitbreidingen van deze stelling vormen een belangrijk onderdeel van de verzamelingenleer dat partitiecalculus wordt genoemd. In dit hoofdstuk wordt de Stelling van Ramsey behandeld.

1. Stelling van Ramsey

Van de Stelling van Ramsey bestaan een eindige en een oneindige variant. Wij zullen alleen de oneindige variant bespreken.

2.1. STELLING (Ramsey). *Voor alle* $r, s \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ *geldt* $\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_s$.

In woorden zegt de stelling dat als iedere r-element deelverzameling van een oneindige verzameling een kleur wordt toegewezen waarbij er een eindig aantal kleuren mogelijk zijn, er een oneindige deelverzameling bestaat waarvan alle r-element deelverzamelingen dezelfde kleur hebben.

Het onderstaande bewijs van de stelling is afkomstig uit [**Jech84**].

BEWIJS. Als verzameling met kardinaliteit $\aleph_0$ nemen we de verzameling $\mathbf{N}$. We nemen aan dat $s = 2$ aangezien het algemene geval volgt door middel van inductie naar s met behulp van eigenschap (1.9).

Met inductie naar r bewijzen we de stelling.

$r = 1$: Zij $\{A_0, A_1\}$ een willekeurige partitie van $[\mathbf{N}]^1 = \mathbf{N}$. Het is duidelijk dat minstens één van de twee klassen A_0 en A_1 oneindig moet zijn.

$r = 2$: Laat nu $\{A_0, A_1\}$ een willekeurige partitie van $[\mathbf{N}]^2$ zijn. Met recursie naar n definiëren we natuurlijke getallen a_n, i_n en verzamelingen H_n.

Zet $a_0 = 0$ en definieer de verzameling

$$B^0_i = \{b \in \mathbf{N} : \{a_0, b\} \in A_i \text{ en } b \neq a_0\}$$

voor $i = 0, 1$. Zet i_0 gelijk aan de kleinste i waarvoor B^0_i oneindig is. Dat er zo'n oneindige verzameling bestaat volgt uit het geval $r = 1$. Zet nu $H_0 = B^0_{i_0}$. Omdat voor alle $n > 0$ de elementen a_n uit de verzameling H_0 zullen worden gekozen zal gelden dat $\{a_0, a_n\} \in A_{i_0}$ voor alle n.

Kies voor a_1 het kleinste element uit de verzameling H_0 en definieer vervolgens de verzameling

$$B^1_i = \{b \in H_0 : \{a_1, b\} \in A_i \text{ en } b \neq a_1\}$$

voor $i = 0, 1$. Zet i_1 gelijk aan de kleinste i waarvoor B^1_i oneindig is en zet $H_1 = B^1_{i_1}$. Ga nu op deze manier door.

De rij $\langle a_n \rangle$ is stijgend en $\{a_n, a_m\} \in A_{i_n}$ voor $m > n$. Voor iedere $n \in \mathbf{N}$ geldt dat $i_n \in \{0, 1\}$. Uit het geval $r = 1$ volgt dat er een zekere $j \in \{0, 1\}$ is en een oneindige verzameling X zó dat $i_n = j$ voor alle $n \in X$. Bekijk nu de verzameling $H = \{a_n : n \in X\}$. Deze verzameling is oneindig en $[H]^2 \subseteq A_j$, aangezien $\{a_n, a_m\} \in A_{i_n} = A_j$ voor alle $n, m \in X$ met $n < m$.

Het algemene geval gaat evenzo. We nemen aan dat de stelling waar is voor r en bewijzen de stelling voor $r + 1$. Zij $\{A_0, A_1\}$ een willekeurige partitie van $[\mathbf{N}]^{r+1}$. Met recursie naar n definiëren we wederom de elementen a_n, i_n en de verzamelingen H_n.

Zet $a_0 = 0$ en definieer de verzameling

$$B_i^0 = \{Y \in [\mathbf{N}]^r : \{a_0\} \cup Y \in A_i \text{ en } a_0 \notin Y\}$$

voor $i = 0, 1$. Uit de inductieaanname volgt dat er een oneindige verzameling H bestaat zó dat $[H]^r \subseteq B_i^0$ voor zekere i. Zet nu $i_0 = i$ en $H_0 = H$. Merk op dat alle verzamelingen van de vorm $\{a_0\} \cup X$ met $X \in [H_0]^r$ bevat zijn in A_{i_0}.

Neem nu aan dat de elementen a_n, i_n en H_n gedefinieerd zijn. Zet a_{n+1} gelijk aan het kleinste element van de verzameling H_n en definieer de verzameling

$$B_i^{n+1} = \{Y \in [H_n]^r : \{a_{n+1}\} \cup Y \in A_i \text{ en } a_{n+1} \notin Y\}$$

voor $i = 0, 1$. Wederom bestaat er een oneindige verzameling H met $[H]^r \subseteq B_i^{n+1}$ voor zekere i. Zet $i_{n+1} = i$ en $H_{n+1} = H$.

Voor elk r-tal getallen $k_1 > n, \ldots, k_r > n$ geldt dat $\{a_n, a_{k_1}, \ldots, a_{k_r}\} \in A_{i_n}$. Wederom zijn er een $j \in \{0, 1\}$ en een oneindige verzameling X zó dat $i_n = j$ voor alle $n \in X$. Bekijk de verzameling $H = \{a_n : n \in X\}$, deze is oneindig en er geldt dat $[H]^{r+1} \subseteq A_j$. □

2. Generalisaties

De stelling van Ramsey zegt dat iedere partitie van de r-element deelverzamelingen van een oneindige verzameling X in een eindig aantal klassen, een *oneindige* homogene verzameling heeft. Een natuurlijke vraag die hierop volgt is, hoe groot moet X zijn zó dat iedere partitie een *overaftelbare* homogene verzameling heeft. De volgende stelling laat zien dat de misschien verwachte partitierelatie $\aleph_1 \to (\aleph_1)^r_s$ niet geldt.

2.2. Stelling (Sierpiński). $2^{\aleph_0} \not\to (\aleph_1)^2_2$.

Bewijs. Zij $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ de verzameling van reële getallen met $<$ de gewone ordening en laat $\langle \mathbf{R}, \prec \rangle$ een welordening van $\mathbf{R}$ zijn. Om de stelling te bewijzen moet een partitie van $\mathbf{R}$ gegeven worden waarvoor geen homogene verzameling met kardinaliteit $\aleph_1$ bestaat. Definieer hiertoe de volgende partitie $P = \{A_0, A_1\}$ van $[\mathbf{R}]^2$.

$$A_0 = \big\{\{x, y\} \in [\mathbf{R}]^2 : x \prec y \text{ en } x < y\big\}$$
$$A_1 = \big\{\{x, y\} \in [\mathbf{R}]^2 : x \prec y \text{ en } y < x\big\}$$

De partitie P wordt de *Sierpiński partitie* genoemd. Stel nu dat H een overaftelbare homogene verzameling is behorende bij deze partitie, zeg van klasse A_0. Laat $\varphi : \alpha \to H$ een isomorfisme tussen $(\alpha, \in)$ en $(H, \prec)$ zijn waarbij α een overaftelbaar ordinaalgetal is. We hebben voor $\xi < \eta < \alpha$ dat $\varphi(\xi) \prec \varphi(\eta)$ en dus, omdat H van klasse A_0 is, dat $\varphi(\xi) < \varphi(\eta)$. Maar dan volgt dat de verzameling $\{\,(\varphi(\xi), \varphi(\xi + 1)) \subseteq \mathbf{R} : \xi < \alpha\}$ een overaftelbare verzameling paarsgewijze disjuncte open intervallen in $\mathbf{R}$ is. Dit is een tegenspraak, volgend uit het feit dat de aftelbare verzameling $\mathbf{Q}$ dicht ligt in $\mathbf{R}$. Het geval dat H hoort bij klasse A_1 gaat analoog. $\square$

In het volgende hoofdstuk gaan we verder in op overaftelbare homogene verzamelingen. We sluiten het hoofdstuk af met de onderstaande stelling, waarvan het reguliere geval bewezen is door Dushnik en Miller [**Dushnik–Miller**] en het singuliere geval door Erdős.

2.3. Stelling (Dushnik–Miller; Erdős). *Voor ieder kardinaalgetal $\kappa \geqslant \aleph_0$ geldt $\kappa \to (\kappa, \aleph_0)^2_2$.*

Laat $f : [\kappa]^2 \to 2$ een kleuring zijn van $[\kappa]^2$ met 2 kleuren waarbij we kleur 0 rood zullen noemen en kleur 1 blauw. Definieer voor iedere $x \in \kappa$ de verzameling $B(x) = \big\{y \in \kappa \setminus \{x\} : f\big(\{x, y\}\big) = 1\big\}$. De verzameling $B(x)$ bevat alle punten $y \in \kappa$ die via een blauwe tak met x zijn verbonden. We bewijzen eerst het volgende lemma.

2.4. Lemma. *Als voor iedere verzameling $X \subseteq \kappa$ met $|X| = \kappa$ er een $x \in X$ is zó dat $|B(x) \cap X| = \kappa$, dan bestaat er een oneindige verzameling $H \subset \kappa$ die blauw-homogeen is voor de kleuring f.*

Bewijs. Neem aan dat voor iedere verzameling $X \subseteq \kappa$ met $|X| = \kappa$ er een $x \in X$ is zó dat $|B(x) \cap X| = \kappa$, Definieer met recursie naar n de verzamelingen X_n en de elementen $x_n \in \kappa$. Zet $X_0 = \kappa$. Neem aan dat de verzameling $X_n \subset \kappa$ al gedefinieerd is voor zekere $n \in \mathbf{N}$ zodanig dat

$$|X_n| = \kappa \qquad \text{en} \qquad x_i \notin X_n \text{ voor alle } i < n.$$

Uit de aanname volgt dat er een $x_n \in X$ is waarvoor

$$|B(x_n) \cap X| = \kappa.$$

Laat nu

$$X_{n+1} = B(x_n) \cap X.$$

Nu volgt, aangezien $x_n \notin B(x_n)$, dat

$$|X_{n+1}| = \kappa \qquad \text{en} \qquad x_i \notin X_n \text{ voor alle } i \leqslant n.$$

De verzameling $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ is een oneindige blauw-homogene verzameling. Namelijk voor $n, m \in N$ met $n < m$ volgt dat $x_m \in X_{n+1} \subseteq B(x_n)$, dus $f(\{x_n, x_m\}) = 1$. $\square$

Bewijs stelling 2.3 . We maken onderscheid tussen het geval dat κ regulier is en het geval dat κ singulier is.

Neem aan dat κ regulier is en stel dat er geen rood-homogene verzameling is met kardinaliteit κ. We moeten laten zien dat er een oneindige blauw-homogene deelverzameling bestaat. Laat hiervoor $X \subseteq \kappa$ een willekeurige verzameling zijn met $|X| = \kappa$ en $Y \subseteq X$ een maximale rood-homogene deelverzameling van X. Omdat Y maximaal gekozen is volgt dat voor alle $x \in X \setminus Y$, de verzameling $Y \cup \{x\}$ niet rood-homogeen is. Er geldt dat

$$X \setminus Y = \bigcup_{y \in Y} (B(y) \cap X).$$

Omdat κ regulier is en $|Y| < |X| = \kappa$ volgt dat er een zekere $y \in Y$ is waarvoor geldt dat $|B(y) \cap X| = \kappa$. Uit het bovenstaande lemma volgt dat er een oneindige blauw-homogene verzameling is.

Neem nu aan dat κ singulier is. Zij $\langle \kappa_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ een strikt stijgende rij van reguliere kardinaalgetallen kleiner dan κ met $\kappa_0 = \mathrm{cf}(\kappa)$ en

$$\kappa = \sum_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$$

Stel dat er geen oneindige blauw-homogene deelverzameling is. We moeten in dit geval laten zien dat er een rood-homogene deelverzameling is met kardinaliteit κ. Uit het bovenstaande lemma volgt dat er een verzameling $X \subseteq \kappa$ is met $|X| = \kappa$ zó dat

$$|B(x) \cap X| < \kappa$$

voor iedere $x \in X$. Zonder verlies der algemeenheid mogen we aannemen dat $X = \kappa$.

Met transfiniete recursie naar ξ definiëren we de rij $\langle A_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ van verzamelingen. Zij $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ en neem aan dat de rij $\langle A_\eta : \eta < \xi \rangle$ al gedefinieerd is zodanig dat voor alle $\eta < \xi$ geldt dat

$$|A_\eta \cup \bigcup \{B(x) : x \in A_\eta\}| < \kappa.$$

Hieruit volgt dat de verzameling

$$\kappa \setminus \big(\bigcup \{B(x) : x \in A_\eta \text{ en } \eta < \xi\} \cup \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta\big) \tag{2.1}$$

kardinaliteit κ heeft. Zij Y een deelverzameling met kardinaliteit κ_ξ van deze verzameling. Aangezien we de stelling reeds hebben bewezen voor het reguliere geval kunnen we deze nu toepassen. Dit geeft dat Y een deelverzameling Z heeft met kardinaliteit κ_ξ die rood-homogeen is. Definieer nu voor iedere $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ de verzameling

$$A_\xi = \{x \in Z : |B(x)| \leqslant \kappa_\xi\}. \tag{2.2}$$

Het is duidelijk dat

$$Z = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi.$$

Omdat κ_ξ regulier is, en $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa_\xi$ volgt dat er een $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ is met $|A_\xi| = \kappa_\xi$. Voor deze verzameling A_ξ geldt, vanwege (2.2), dat

$$|\bigcup \{B(x) : x \in A_\xi\}| \leqslant \kappa_\xi \cdot \kappa_\xi < \kappa$$

Nu volgt dat

$$|A_\xi \cup \bigcup \{B(x) : x \in A_\xi\}| < \kappa,$$

oftewel hiermee is de definitie gegeven voor de rij verzamelingen A_ξ.

Uit (2.1) volgt dat dat de verzamelingen A_ξ paarsgewijs disjunct zijn en eerder hadden we al gezien dat de kardinaliteit van A_ξ gelijk is aan κ_ξ. Definieer nu $H = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$. Dan geldt

$$|H| = \sum_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa$$

Zij $\{x, y\} \in [H]^2$ met $x \in H_\xi$ en $y \in H_\eta$ voor $\eta \leqslant \xi$. Als $\eta = \xi$ dan volgt, omdat A_ξ rood-homogeen is, dat $f(\{x, y\}) = 0$. Als $\eta < \xi$, dan volgt uit (2.1) dat $x \notin B(y)$, dus geldt ook in dit geval dat $f(\{x, y\}) = 0$. We zien dat H een rood-homogene verzameling is met kardinaliteit κ zoals gevraagd. $\square$

Merk op dat we, door gebruik te maken van Eigenschap (1.9), met inductie naar n de partitierelatie

$$\kappa \to (\kappa, \underbrace{\aleph_0, \ldots, \aleph_0}_{\text{n keer}})^2_{n+1}$$

verkrijgen voor ieder natuurlijk getal $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ en oneindig kardinaalgetal κ.

HOOFDSTUK 3

Overaftelbare homogene verzamelingen

In dit hoofdstuk behandelen we de Stelling van Erdős en Rado. Deze stelling is een uitbreiding van de stelling van Ramsey naar het overaftelbare geval. We beginnen met het het bewijs van de stelling voor 2-partities. Hierna behandelen we in het kort de stelling voor willekeurige partities.

1. 2-partities

Uit de volgende stelling volgt dat iedere 2-partitie met een aftelbaar aantal klassen van een verzameling met kardinaliteit groter dan $(2^{\aleph_0})^+$ een overaftelbare homogene partitie bevat. We herinner de lezer eraan dat $(2^{\aleph_0})^+$ gelijk is aan het kleinste kardinaalgetal dat groter is dan $2^{\aleph_0}$.

3.1. Stelling (Erdős–Rado). $(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$

Bewijs. Schrijf κ voor het kardinaalgetal $(2^{\aleph_0})^+$. Laat $\{A_i : i \in \mathbf{N}\}$ een partitie zijn van $[\kappa]^2$ en $F : [\kappa]^2 \to \mathbf{N}$ de bijbehorende kleuring. Dus voor de verzameling $\{a, b\} \in [\kappa]^2$ geldt dat $F(\{a, b\}) = n$ waarbij n de unieke $n \in \mathbf{N}$ is waarvoor geldt dat $\{a, b\} \in A_n$.

Construeer voor iedere $\alpha < \kappa$ een transfiniete rij f_α als volgt. Zet $f_\alpha(0) = 0$. Neem aan dat de rij $\langle f_\alpha(\eta) : \eta < \xi\rangle$ al gedefinieerd is en $\xi < \alpha$. Als er een $\sigma < \alpha$ bestaat zó dat voor alle $\eta < \xi$ geldt dat $\sigma \neq f_\alpha(\eta)$ en $F(f_\alpha(\eta), \sigma) = F(f_\alpha(\eta), \alpha)$, dan zetten we $f_\alpha(\xi)$ gelijk aan de kleinst mogelijke σ. Zo niet, dan stoppen we. Merk op dat f_α een stijgende rij is voor iedere $\alpha < \kappa$ en dat $\operatorname{dom} f_\alpha$ een beginstuk is van α. Stel nu dat er een zekere $\alpha < \kappa$ is waarvoor geldt dat $|\operatorname{dom} f_\alpha| \geqslant \aleph_1$. Zet $X = \operatorname{ran} f_\alpha$. Dan geldt, vanwege het feit dat de rij f_α stijgend is, dat $|X| \geqslant \aleph_1$. Verder heeft de verzameling X de eigenschap dat voor iedere $\sigma, \tau \in X$ met $\sigma < \tau$ dat $F(\sigma, \tau) = F(\sigma, \alpha)$. Definieer nu voor iedere $n \in \mathbf{N}$ de verzameling

$$B_n = \{\sigma \in X : F(\sigma, \alpha) = n\}.$$

De familie verzamelingen $\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ vormt een partitie van X. Dus is er een zekere $n \in \mathbf{N}$ waarvoor $|B_n| \geqslant \aleph_1$. Uit de definitie van B_n volgt dat $[B_n]^2 \subseteq A_n$, dus is B_n een homogene verzameling met de vereiste kardinaliteit.

Wat nog rest om te bewijzen is dat er daadwerkelijk een zekere $\alpha < \kappa$ bestaat waarvoor geldt dat $|\operatorname{dom} f_\alpha| \geqslant \aleph_1$. We doen dit uit het ongerijmde. Stel dat voor alle $\alpha < \kappa$ geldt dat $|\operatorname{dom} f_\alpha| \leqslant \aleph_0$. Definieer de rijen $g_\alpha : \operatorname{dom} f_\alpha \to \mathbf{N}$ als $g_\alpha(\eta) = F(f_\alpha(\eta), \alpha)$. Dan impliceert $g_\alpha = g_\beta$ dat $f_\alpha = f_\beta$. Het is duidelijk dat $\operatorname{dom} f_\alpha = \operatorname{dom} g_\alpha = \operatorname{dom} g_\beta = \operatorname{dom} f_\beta$. Met behulp van transfiniete inductie over $\operatorname{dom} g_\alpha$ bewijzen we vervolgens de implicatie. Als $f_\alpha(\eta) = f_\beta(\eta)$ voor alle $\eta < \xi$ dan volgt dat $F(f_\alpha(\eta), \sigma) = F(f_\alpha(\eta), \alpha)$

geldt dan en slechts dan als $F(f_\beta(\eta),\sigma) = F(f_\beta(\eta),\beta)$. Hieruit, tezamen met de definitie van de rijen f_α volgt dat moet gelden dat $f_\alpha(\xi) = f_\beta(\xi)$.

Uit onze aanname, namelijk dat $|\operatorname{dom} f_\alpha| \leqslant \aleph_0$ voor alle $\alpha < \kappa$ volgt dat $\operatorname{dom} g_\alpha$ een aftelbaar ordinaalgetal is. De kardinaliteit van de verzameling

$$\{g_\alpha : \alpha < \kappa\},$$

is hierdoor niet groter dan de kardinaliteit van de verzameling

$$\{g : \operatorname{dom} g \in \omega_1; \operatorname{ran} g \subseteq \mathbf{N}\}.$$

Deze verzameling is gelijk aan

$$\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \{g : \operatorname{dom} g = \alpha; \operatorname{ran} g \subseteq \mathbf{N}\},$$

waaruit volgt dat er $\aleph_1 \cdot \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ verschillende g_α's mogelijk zijn. Dus bestaan er ordinaalgetallen $\beta < \alpha < \kappa$ zó dat $g_\beta = g_\alpha$, oftewel $f_\beta = f_\alpha$. Dan hebben we dat voor alle $\eta \in \gamma = \operatorname{dom} f_\alpha$ dat $F(f_\alpha(\eta),\beta) = F(f_\beta(\eta),\beta) = g_\beta(\eta) = g_\alpha(\eta) = F(f_\alpha(\eta),\alpha)$, waar samen met de definitie van f_α uit volgt dat $f_\alpha(\gamma)$ gedefinieerd is, namelijk als β of een kleiner ordinaalgetal met dezelfde eigenschap, tegenspraak. Hiermee is bewezen dat er inderdaad een $\alpha < \kappa$ bestaat met de gevraagde eigenschap. $\square$

Het bovenstaande bewijs blijft geldig als we in plaats van $\aleph_0$ een willekeurig oneindig kardinaalgetal gebruiken. Dit geeft de volgende algemenere stelling.

3.2. Stelling. *Voor ieder oneindig kardinaalgetal κ geldt de partitierelatie $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa$.*

Dat niet iedere 2-partitie van een verzameling met kardinaliteit 2^κ een homogene verzameling heeft met kardinaliteit κ^+ volgt uit de volgende stelling. De stelling laat zien dat de voorwaarde $(2^\kappa)^+$ niet alleen voldoende is maar ook noodzakelijk om een homogene verzameling met kardinaliteit κ^+ te garanderen.

3.3. Stelling (Sierpiński). *Voor ieder kardinaalgetal κ geldt $2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)^2_2$.*

Het bewijs gaat analoog aan dat van Stelling 2.2; echter, we kunnen nu niet gebruik maken van eigenschappen van $\mathbf{R}$. Daarom bekijken we de verzameling $(P,<)$ waarbij $P = \{0,1\}^\kappa$ en $<$ de lexicografische ordening. In deze ordening hebben we voor iedere $f,g \in P$ dat $f < g$ dan en slechts dan als $f(\alpha) < g(\alpha)$ waarbij α de kleinste α is waarvoor $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. De eigenschap waar gebruik van zal worden gemaakt, bewijzen we in het onderstaande lemma.

3.4. Lemma. *De lexigrafische geordende verzameling $(P,<)$ waarbij $P = \{0,1\}^\kappa$, heeft geen stijgende of dalende rij ter lengte κ^+.*

Bewijs. We bewijzen het stijgende geval, het dalende geval gaat analoog. Stel dat $W = \{f_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq P$ zó is dat $f_\alpha < f_\beta$ als $\alpha < \beta$. Laat vervolgens $\gamma \leqslant \kappa$ minimaal zijn zó dat de verzameling $\{f_\alpha\restriction_\gamma : \alpha < \kappa^+\}$ kardinaliteit κ^+ heeft. We mogen aannemen dat voor iedere $f,g \in W$ geldt dat $f\restriction_\gamma \neq g\restriction_\gamma$, dus laten we dit doen.

Voor iedere $\alpha < \kappa^+$ zij ξ_α zó dat

$$f_\alpha \restriction \xi_\alpha = f_{\alpha+1} \restriction \xi_\alpha \quad \text{en} \quad f_\alpha(\xi_\alpha) = 0, f_{\alpha+1}(\xi_\alpha) = 1.$$

Vanwege onze eerdere aanname volgt dat iedere $\xi_\alpha < \gamma$. Dus bestaat er een $\xi < \gamma$ waarvoor $\xi = \xi_\alpha$ voor κ^+ elementen van W.

Definieer de verzameling $\Sigma = \{\alpha : \xi_\alpha = \xi\}$. Als $\xi = \xi_\alpha = \xi_\beta$ en $f_\alpha \restriction \xi = f_\beta \restriction \xi$ dan geldt dat $f_\beta < f_{\alpha+1}$ en $f_\alpha < f_{\beta+1}$ waaruit volgt, omdat dan $f_\beta \leqslant f_\alpha < f_{\alpha+1}$ en $f_\alpha \leqslant f_\beta < f_{\beta+1}$, dat $f_\alpha = f_\beta$. Dus de afbeelding van de verzameling $X = \{f_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ naar de verzameling $Y = \{f_\alpha \restriction \xi : \alpha < \kappa^+\}$ gedefinieerd door $f_\alpha \mapsto f_\alpha \restriction \xi$ is injectief. Het is duidelijk dat er een injectieve afbeelding bestaat tussen de verzameling Σ en X. Hieruit volgt dat er een injectieve afbeelding bestaat tussen Σ en Y, dus de verzameling Y heeft kardinaliteit κ^+. Dit is een tegenspraak met het feit dat γ minimaal gekozen was. □

Met behulp van dit lemma bewijzen we de stelling.

Bewijs Stelling 3.3. Laat $\prec$ een welordening zijn van P en $<$ de lexicografische ordening van P. Definieer de *Sierpiński* partitie $\{A_0, A_1\}$ van $[P]^2$ als volgt.

$$A_0 = \big\{\{f, g\} \in [P]^2 : f \prec g \text{ en } f < g\big\}$$
$$A_1 = \big\{\{f, g\} \in [P]^2 : f \prec g \text{ en } g < f\big\}$$

Stel nu dat $H \subseteq P$ een homogene verzameling is met kardinaliteit κ^+. Dan volgt dat H een stijgende of dalende rij ter lengte κ^+ bevat uit $(P, <)$. Uit het lemma volgt dat dit niet kan. □

2. Willekeurige partities

In deze paragraaf behandelen we de algemene stelling van Erdős en Rado. Deze stelling is een uitbreiding van Stelling 3.2 naar willekeurige r-partities met $r > 2$.

3.5. Definitie. *Voor ieder kardinaalgetal κ definiëren we de operatie $\exp_n(\kappa)$ recursief:*

$$\exp_0(\kappa) = \kappa, \qquad \exp_{n+1}(\kappa) = 2^{\exp_n(\kappa)}$$

3.6. Stelling (Erdős–Rado). *Voor ieder oneindig kardinaalgetal κ en voor ieder natuurlijk getal $r \in \mathbf{N}$, geldt de relatie*

$$[\exp_r(\kappa)]^+ \to (\kappa^+)^{r+1}_\kappa.$$

We bewijzen bovenstaande stelling met behulp van het zogenaamde 'Stepping-up lemma', waarvan we het bewijs niet zullen geven. We hebben de volgende definities eerst nodig.

3.7. Definitie. *We gebruiken de notatie $2^{<\kappa}$ om het kardinaalgetal*

$$\sum \{2^\lambda : \lambda \text{ een kardinaalgetal en } \lambda < \kappa\}$$

mee aan te geven.

3.8. Definitie. *Zij λ een kardinaalgetal, γ een ordinaalgetal, $r \in \mathbf{N}$ en $f : [\lambda]^{r+1} \to \gamma$ een $(r+1)$-partitie van λ met γ kleuren. De verzameling $H \subseteq \lambda$ wordt* eind-homogeen *genoemd voor de afbeelding f als voor iedere verzameling $X \subseteq [H]^r$ en iedere $\mu, \nu \in H$ met $\max X < \mu, \nu$, er geldt*

$$f(X \cup \{\mu\}) = f(X \cup \{\nu\}).$$

3.9. Lemma (Stepping-up). *Zij κ een oneindig kardinaalgetal, $\gamma < \kappa$, $\lambda = (2^{<\kappa})^+$, $r \in \mathbf{N}$ een natuurlijk getal en $f : [\lambda]^{r+1} \to \gamma$ een $(r+1)$-partitie van kardinaalgetal λ met γ kleuren. Dan bestaat er een eind-homogene verzameling $H \subseteq \lambda$ met f zó dat H ordetype $\kappa + 1$ heeft.*

Met behulp van dit bovenstaande lemma is het mogelijk om vragen over $(r+1)$-partities met behulp van kennis over r-partities te beantwoorden. We bewijzen nu bovenstaande stelling.

Bewijs Stelling 3.6. Voor $r = 0$, hebben we de triviale partitierelatie $\kappa^+ \to (\kappa^+)^1_\kappa$. We bewijzen de bewering met inductie naar r. Zij $r \in \mathbf{N}$ een natuurlijk getal en neem aan dat de bewering klopt voor r. Zij $\lambda = [\exp_{r+1}(\kappa)]^+$, oftewel $\lambda = [2^{<\mu^+}]^+$ waarbij $\mu = \exp_r(\kappa)$ en laat $f : [\lambda]^{r+1} \to \kappa$ een $(r+1)$-partitie zijn van λ met κ kleuren. Uit het bovenstaande lemma volgt dat er een eind-homogene verzameling $H \subseteq \lambda$ bestaat voor de kleuring f zó dat H ordetype $\mu^+ + 1 = [\exp_r(\kappa)]^+ + 1$ heeft. Schrijf H in de vorm $H' \cup \{\alpha\}$ zodat voor alle $h \in H'$ geldt dat $h < \alpha$. Definieer vervolgens de r-partitie f' van de verzameling H' met κ kleuren via $f'(A) = f(A \cup \{a\})$ voor iedere $A \in [H']^r$. Uit de inductieaanname volgt dat er een verzameling $X \subseteq H'$ bestaat en een kleur $k < \kappa$ zó dat $|X| = \kappa^+$ en X homogeen is met kleur k en partitie f'. Omdat $X \subset H$ en H eind-homogeen is met f, volgt dat voor iedere $B \cup \{\mu\} \in [X]^{r+1}$ met voor alle $b \in B$ dat $b < \mu$, we hebben

$$f(B \cup \{\mu\}) = f(B \cup \{\alpha\}) = f'(B) = k.$$

We zien dat X homogeen is voor de kleuring f. $\square$

De partitierelatie $[\exp_r(\kappa)] \nrightarrow (\kappa^+)^{r+1}_\kappa$ die we niet zullen bewijzen, toont aan dat de gegeven voorwaarde in bovenstaande stelling niet alleen voldoende is maar ook noodzakelijk.

Merk op dat er meer uit het bewijs volgt, namelijk dat ook $X \cup \{\alpha\}$ een homogene verzameling met kleur k is en partitie f. Hieruit volgt dat er niet alleen een homogene verzameling bestaat met kardinaliteit κ^+ maar dat we de garantie kunnen geven dat er een homogene verzameling bestaat met ordetype $\kappa^+ + 1$. Als we de rij $\langle a_i : i \in I \rangle$ in Definitie 1.2 herdefiniëren als een rij ordinaalgetallen en eisen dat de homogene verzameling H ordetype a_i heeft, kunnen we bovenstaande relatie noteren als $[\exp_r(\kappa)]^+ \to (\kappa^+ + 1)^{r+1}_\kappa$ Hoewel we niet verder op dit onderwerp in zullen gaan noemen we nog de volgende voorbeelden ter illustratie. Indien κ een regulier oneindig kardinaalgetal is, dan geldt de relatie $\kappa \to (\kappa, \omega + 1)^2_2$. Verder is bekend dat de Algemene Continuümhypothese de relatie $\kappa \nrightarrow (\kappa, \omega + 2)^2_2$ impliceert. Als laatste noemen we een resultaat van Todorčević, zie [**Todorčević**], dat aantoont dat de relatie $\omega_1 \to (\omega_1, \alpha)^2_2$ consistent is voor alle $\alpha < \omega_1$.

BIJLAGE

Enige verzamelingenleer

Het doel van deze bijlage is het geven van een korte herhaling van de notatie en termen uit de verzamelingenleer die in deze scriptie gebruikt worden. We gaan er vanuit dat de axioma's van Zermelo–Fraenkel tezamen met het keuzeaxioma bekend zijn. Voor diegene die meer wil weten is het aan te raden het dictaat [**Hart**] horende bij het college Verzamelingenleer gegeven aan de Universiteit Leiden, door te nemen.

1. Ordeningen

We noemen twee lineair geordende verzamelingen $(X, <)$ en $(Y, \prec)$ *isomorf* als er een ordebewarende bijectie tussen X en Y bestaat; dat wil zeggen, een bijectie $f : X \to Y$ met de eigenschap dat voor elk tweetal elementen $x, y \in X$ geldt als $x < y$ dan $f(x) \prec f(y)$. We zeggen ook wel dat X en Y in dit geval hetzelfde ordetype hebben. De Griekse letter ω wordt, zoals gebruikelijk, in deze scriptie enkel gebruikt om het ordetype van $\mathbf{N}$ aan te geven met de gewone ordening. Een volledige geordende verzameling heet *welgeordend* als elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft.

2. Ordinaal- en kardinaalgetallen

Een verzameling X is transitief als $x \in X$ en $y \in x$ impliceert dat $y \in X$. Zo zijn bijvoorbeeld $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ en $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ transitief en de verzameling $\{\{\emptyset\}\}$ is dat niet. Een *ordinaalgetal* is een transitieve verzameling die welgeordend is door $\in$. Dus ω is een ordinaalgetal net als ieder natuurlijk getal. De definitie impliceert dat een ordinaalgetal de verzameling van alle kleinere ordinaalgetallen is. We gebruiken meestal Griekse letters voor ordinaalgetallen. Als $\alpha \in \beta$, dan mogen we hiervoor ook schrijven $\alpha < \beta$. We zeggen dat α een *opvolger* is als er een β bestaat zó dat $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$; is dit niet het geval dan noemen we α een *limietgetal*. Indien X een verzameling van ordinaalgetallen is dan schrijven we meestal $\sup X$ voor $\bigcup X$.

Twee verzamelingen X en Y zijn even groot als er een bijectieve afbeelding van X naar Y bestaat. Een kardinaalgetal is een ordinaalgetal dat niet even groot is als een kleiner ordinaalgetal. We gebruiken meestal de Griekse letters κ, λ, σ en τ om kardinaalgetallen aan te geven. De kardinaliteit $|X|$ van een verzameling X is per definitie het kardinaalgetal dat even groot is als X. Het kleinste kardinaalgetal groter dan het kardinaalgetal κ wordt aangegeven met κ^+ en wordt de opvolger van κ genoemd.

3. Overige notatie en afspraken

Voor iedere ordinaalgetal α geeft $\aleph_\alpha$ het $(\alpha + 1)$-ste oneindige kardinaalgetal aan en ω_α betekent hetzelfde. Het verschil in notatie is vanwege de traditie dat $\aleph_\alpha$ de kardinaliteit aangeeft en ω_α het ordertype. De *Continuümhypothese* stelt dat $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. De *Algemene Continuümhypothese* stelt dat $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Ieder natuurlijk getal $n \in \mathbf{N}$ identificeren we met de verzameling van kleinere natuurlijk getallen, oftewel $n = \{i \in \mathbf{N} : i < n\}$. Een rij is een functie gedefinieerd op een ordinaalgetal. We spreken van een transfiniete rij indien de kardinaliteit van dit ordinaalgetal oneindig is. We noemen de transfiniete rij $\langle \alpha_\xi : \xi < \eta \rangle$ van ordinaalgetallen *stijgend* als $\alpha_\xi < \alpha_\nu$ voor iedere $\xi < \nu < \eta$. Als η een limiet ordinaalgetal is en $\langle \alpha_\xi : \xi < \eta \rangle$ een stijgende rij van ordinaalgetallen dan schrijven we

$$\alpha = \lim_{\xi \to \eta} \alpha_\xi = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \eta\}$$

en noemen α de *limiet* van de stijgende rij. Een oneindig kardinaalgetal κ wordt *singulier* genoemd als er een stijgende transfiniete rij $\langle \alpha_\xi : \xi < \eta \rangle$ bestaat van ordinaalgetallen $\alpha_\xi < \kappa$ waarvan de lengte η een limiet ordinaalgetal is kleiner dan κ en $\kappa = \lim_{\xi \to \eta} \alpha_\xi$. Een oneindig kardinaalgetal dat niet singulier is heet *regulier*. Als α een limiet ordinaalgetal is, dan is de *cofinaliteit* van α, genoteerd met $\mathrm{cf}(\alpha)$, het kleinste ordinaalgetal η zó dat α de limiet is van een stijgende rij van ordinaalgetallen met lengte η. Dus $\aleph_\alpha$ is singulier als $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$ en regulier als $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$. Het is eenvoudig te laten zien dat een oneindig kardinaalgetal κ singulier is dan en slechts dan als het de som is van minder dan κ kleinere kardinaalgetallen.

Bibliografie

[Dushnik–Miller] B. Dushnik, E. W. Miller, 'Partially ordered sets', Amer. J. of Math. (**63**) (1941), pp. 600–610.

[Erdős et al.] P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté, R. Rado, *Combinatorial set theory: partition relations for cardinals*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

[Hajnal] A. Hajnal, P. Hamburger, *Set Theory*, Cambridge University Press, 1999.

[Hart] K. P. Hart, Dictaat Verzamelingenleer, najaar 2007, `http://www.math.leidenuniv.nl/~kphart/onderwijs/verzamelingenleer/`

[Jech84] K. Hrbáček, T. Jech, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[Jech03] T. Jech, *Set theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Ramsey] F. P. Ramsey, 'On a problem of formal logic', Proc. London Math. Soc. (2) (**30**) (1930), pp. 264–286.

[Todorčević] S. Todorčević, 'Forcing positive partition relations', Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), no. 2, pp. 703–720.

[Williams] N. H. Williams, *Combinatorial Set Theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.