

Josefien Verschuure

Analyse van een server farm met server-opstarttijden

Bachelor scriptie

Scriptiebegeleidster: Dr. F.M. Spieksma

Inleverdatum: 22-07-2016



Mathematisch instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Inleiding | 3 |
| 2 | Basisbegrippen en stellingen | 3 |
| 3 | Het $M/M/k/setup$ model | 6 |
| 3.1 | Voorbeeld van $M/M/k/setup$ model met eindige buffer | 8 |
| 3.2 | $M/M/k/setup$ model met oneindige buffer | 11 |
| 3.3 | Voorbeeld van $M/M/k/setup$ model met oneindige buffer | 17 |
| 3.4 | Verschillen tussen het model met eindige en oneindige buffer | 19 |
| 3.5 | Analyse van de γ 's | 20 |
| 4 | Vervolgonderzoek | 21 |

1 Inleiding

Een belangrijk probleem voor een bedrijf als amazon.com is het optimale beheer van de servers. Recent is gebleken dat de energiekosten van servers die aanstaan, maar niet gebruikt worden, een substantieel deel van de totale kosten zijn. Er kan geld worden bespaard door het uitzetten van servers. Omdat het aanzetten van een server tijd kost, zorgt het uitzetten van servers voor een nieuw probleem: klanten moeten dan wachten totdat een server weer aanstaat. Dit zorgt voor ontevredenheid bij de klanten. Het doel is om een goede afweging te maken tussen energie besparen door het uitzetten van servers en voorkomen van klantenontevredenheid. De vraag is: wat is optimaal?

We beschouwen in deze scriptie een server farm met k servers. Een server kan aan, uit of in stand-by staan. We analyseren het geval dat servers aan- of uitstaan. Verder nemen we aan dat elke server die gebruikt wordt, aan één klant is toegewezen, en dat elke klant precies één server gebruikt. Dit wordt een k -server setup model genoemd.

Een eerste stap in de analyse is het opstellen van een wiskundig model, waarmee voor een vaste uitzetstrategie geanalyseerd kan worden wat de wachttijd van klanten voor een server is, wat de fractie van de tijd is dat de servers onbenut zijn, e.d. We kiezen voor een model waarbij servers bij vrijkomst worden uitgezet, als er geen klanten in de wachtrij staan. Het doel is om de stationaire verdeling te bepalen. Daarmee kan bijvoorbeeld berekend worden wat de fractie van de tijd is dat alle servers gebruikt worden of wat de fractie van de tijd is, dat er klanten wachten totdat er een server aanstaat. Dit is van belang voor het bepalen van een toereikend aantal servers. Om de stationaire verdeling te bepalen, maken we gebruik van de zogenaamde CAP-methode. Deze methode is gebaseerd op [1]. De bewijzen in dit artikel zijn enigszins onduidelijk, daarom kiezen we voor een iets andere aanpak die mede gebaseerd is op [2].

2 Basisbegrippen en stellingen

In dit eerste hoofdstuk willen we verschillende dingen definiëren die we in de rest van deze scriptie gebruiken. Laat S een aftelbare toestandsruimte zijn en $X = X(t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ het bijbehorende Markovproces in continue tijd met q -matrix Q . We maken de volgende aanname.

Aanname 1. $X = (X_t)_{t \geq 0}$ is irreducibel en positief recurrent.

Laat $q_i := -q_{ii}$. Daarnaast beschouwen we P , de matrix van het ingebedde sprongproces met elementen

$$p_{ij} := \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & j \neq i \\ 0, & i = j \end{cases}$$

$i, j \in S$, de sprongkans van i naar j .

Verder volgt uit Aanname 1 dat de stationaire verdeling $(\pi_i)_{i \in S}$ bestaat. Er geldt dan voor alle $i \in S$

$$(\pi Q)_i = 0. \tag{1}$$

Om het overzichtelijk te houden, definiëren we $\rho_i := q_i \pi_i$.

Laat $A \subset S$ niet-leeg zijn. De taboematrix geassocieerd met taboeverzameling A wordt gegeven door

$${}^A P_{ij} = \begin{cases} 0 & j \in A \\ p_{ij} & j \notin A. \end{cases}$$

Allereerst zullen we een lemma afleiden, dat de kern is van onze analyse. Daarvoor hebben we enige begrippen nodig. Merk op dat ${}_A P_{ij}^n$ de kans is dat het proces na de n^{de} sprong in j komt, bij start in i , zonder A te passeren. Voor de tijdsduur T_j^A die het proces in toestand $j \notin A$ doorbrengt, geldt

$$T_j^A = \int_0^\infty \mathbb{1}_j(X_t) \cdot \mathbb{1}_{\{X_s \notin A, s \leq t\}} dt. \quad (2)$$

Dan volgt uit [6, proposition 4.1.1] dat voor $\mathbb{E}_a[T_j^A]$ geldt

$$\mathbb{E}_a[T_j^A] = \frac{1}{q_j} \sum_{n=0}^\infty {}_A P_{aj}^n, \quad (3)$$

waarbij $\mathbb{E}_a[T_j^A]$ de verwachte tijd is die een Markovketen in toestand j doorbrengt, bij start in a , voor terugkeer naar A .

Lemma 1. *Voor $A \subset S$, $A \neq \emptyset$ en $j \in S \setminus A$ geldt*

$$\pi_j = \sum_{a \in A} \pi_a q_a \mathbb{E}_a[T_j^A].$$

Bewijs

Het bewijs van dit Lemma bestaat uit twee delen.

Deel 1

We gaan Lemma 1 eerst bewijzen voor het geval $A = \{a\}$, met $a \in S$ willekeurig gekozen. We gebruiken hiervoor vernieuwingstheorie, zie [5]. Zij T_i het tijdstip dat het proces voor de i^{e} keer in toestand a komt. Omdat we een continu Markovproces beschouwen, geldt dat de deelprocessen $(T_1, T_2]$, $(T_2, T_3]$, ... onafhankelijk zijn van elkaar. Daarnaast geldt dat deze deelprocessen dezelfde verdeling hebben, omdat we steeds de tijd beschouwen tussen twee bezoeken aan a . We merken op dat dit proces precies een uitgesteld regeneratief proces is. Uit Aanneme 1 weten we dat het proces wat we beschouwen positief recurrent is, daaruit volgt dat $\mathbb{E}[T_2 - T_1] < \infty$. Definieer verder

$$f_j(X(t)) = \begin{cases} 1, & X(t) = j \\ 0, & X(t) \neq j \end{cases}$$

voor alle $j \in S$.

Uit Stelling 2.9 van [5] volgt nu voor alle $j \in S$ dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_0^t f_j(X(s)) ds \right] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_{T_1}^{T_2} f_j(X(s)) ds \right]}{\mathbb{E}[T_2 - T_1]}.$$

Merk op dat dit precies π_j is. Er geldt dus

$$\pi_a = \frac{\mathbb{E} \left[\int_{T_1}^{T_2} f_a(X(s)) ds \right]}{\mathbb{E}[T_2 - T_1]} = \frac{1}{\mathbb{E}[T_2 - T_1]}. \quad (4)$$

De laatste gelijkheid volgt omdat het proces in $(T_2 - T_1]$ precies 1 keer in a is en daar gemiddeld een tijd $\frac{1}{q_a}$ blijft. Vgl. 4 omschrijven geeft

$$\pi_a q_a = \frac{1}{\mathbb{E}[T_2 - T_1]}. \quad (5)$$

Nu volgt voor alle $j \in S, j \neq a$

$$\pi_j = \frac{\mathbb{E} \left[\int_{T_1}^{T_2} f_j(X(s)) ds \right]}{\mathbb{E} [T_2 - T_1]} = \mathbb{E}_a [T_j^A] \pi_a q_a.$$

De laatste gelijkheid volgt na gebruik van Vgl. (2) en Vgl. (5). Dit bewijst Lemma 1 voor het geval $A = \{a\}$.

Deel 2

We beschouwen nu het algemene geval met $A \subset S$ willekeurig. Het Markovproces $\tilde{X}(t)$ is het equivalente Markovproces waarin we alle toestanden in A samentrekken tot één toestand \tilde{a} . $\tilde{S} = \{\tilde{a}\} \cup S \setminus A$ en \tilde{Q} heeft elementen

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i, j \in S \setminus A \\ \frac{\sum_{a \in A} \pi_a q_{aj}}{\sum_{a \in A} \pi_a}, & i = \tilde{a}, j \in S \setminus A \\ \sum_{a \in A} q_{ia}, & i \in S \setminus A, j = \tilde{a}. \end{cases}$$

Door invullen in de balansvergelijkingen volgt direct dat de stationaire kans op $j \neq \tilde{a}$ gelijk is aan π_j en de stationaire kans op \tilde{a} is $\sum_{a \in A} \pi_a$. Uit deel 1 van het bewijs volgt nu dat voor alle $j \in S \setminus A$ geldt

$$\pi_j = \pi_{\tilde{a}} q_{\tilde{a}} \mathbb{E}_{\tilde{a}} [T_j^A].$$

Dit kunnen we als volgt omschrijven

$$\begin{aligned} \pi_j &= \pi_{\tilde{a}} q_{\tilde{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_j} {}_A P_{\tilde{a}j}^n \\ &= \frac{1}{q_j} \pi_{\tilde{a}} q_{\tilde{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} p_{\tilde{a}i} {}_A P_{ij}^n \\ &= \frac{1}{q_j} \pi_{\tilde{a}} q_{\tilde{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} \frac{q_{\tilde{a}i}}{q_{\tilde{a}}} {}_A P_{ij}^n \\ &= \frac{1}{q_j} \pi_{\tilde{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} q_{\tilde{a}i} {}_A P_{ij}^n \\ &= \frac{1}{q_j} \sum_{a \in A} \pi_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} \frac{\sum_{a \in A} \pi_a q_{ai}}{\sum_{a \in A} \pi_a} {}_A P_{ij}^n \\ &= \frac{1}{q_j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} \sum_{a \in A} \pi_a q_{ai} {}_A P_{ij}^n \\ &= \sum_{a \in A} \pi_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} \frac{1}{q_j} \frac{q_{ai}}{q_a} q_a {}_A P_{ij}^n \\ &= \sum_{a \in A} \pi_a q_a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in S \setminus A} \frac{1}{q_j} p_{ai} {}_A P_{ij}^n \\ &= \sum_{a \in A} \pi_a q_a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_j} {}_A P_{aj}^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{a \in A} \pi_a q_a \mathbb{E}_a[T_j^A]$$

□

Voor $j \notin A$ schrijven we $q_{jA} = \sum_{a \in A} q_{ja}$. Zij $A \subset S$, $A \neq \emptyset$. Zij $k \leq \infty$ het aantal elementen in $S \setminus A$. Laat B de $(k+1) \times (k+1)$ matrix met de volgende elementen

$$b_{i,j} = \begin{cases} -1, & i = j = 0 \\ q_{iA}, & i \neq 0, j = 0 \\ q_{i,j}, & i, j \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Stelling 1. B is inverteerbaar en voor $i, j \in S \setminus A$ geldt $-b_{i,j}^{-1} = \mathbb{E}_i[T_j^A]$.

Zie voor het bewijs van deze stelling het bewijs van Lemma 2.1 in [4].

Als we het resultaat van Stelling 1 invullen in Lemma 1, dan verkrijgen we onmiddellijk het volgende.

Gevolg 1.

$$\pi_j = \sum_{a \in A} \pi_a \sum_{r \notin A} q_{ar} (-B_r^{-1}).$$

3 Het $M/M/k/setup$ model

In deze paragraaf zullen we een wiskundig model voor het k -server model opstellen. Dit model is gebaseerd op [3]. Klanten komen aan volgens een Poisson(λ)-proces. Hun opdrachten worden verwerkt in een $\exp(\mu)$ -verdeelde tijd. Er zijn k servers. Bij aankomst wordt een opdracht in de wachtrij gezet. Als er een uitstaande server is, dan wordt deze opgestart. Dit opstarten duurt een $\exp(\alpha)$ -verdeelde tijd. Als een server vrijkomt, wordt hij toegekend aan de eerste opdracht in de wachtrij, als deze niet leeg is. Als daardoor het aantal servers in opstartfase groter wordt dan de wachtrijlengte, wordt ook één van de servers in opstartfase uitgezet. Dit verschil kan hoogstens 1 worden, omdat de kans dat twee servers tegelijk klaar zijn, gelijk is aan 0 bij een continue verdeling. Als de wachtrij leeg is, bij vertrek van een klant, gaat de vrijgekomen server uit.

Met dit proces kunnen we een twee-dimensionaal Markovproces associëren, met de volgende toestandsruimte

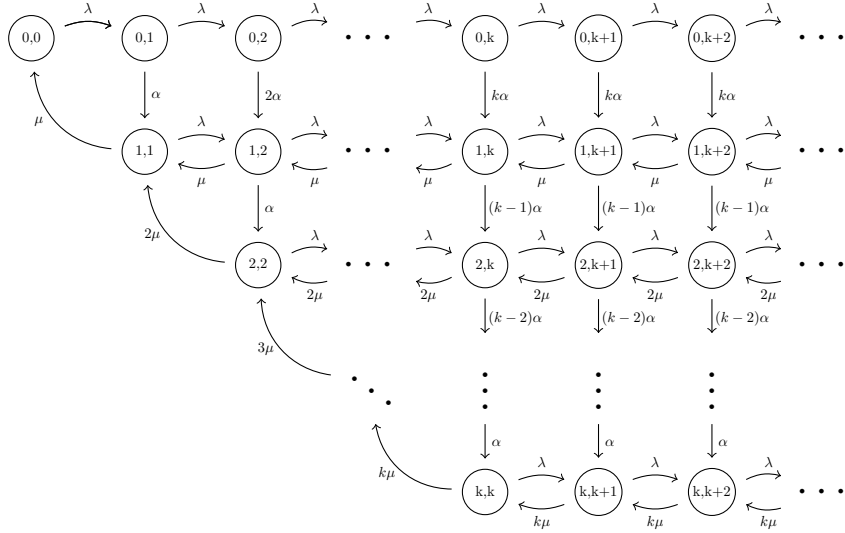
$$S = \{(m, j) : m \geq 0, j \geq m\}.$$

Hierbij is m het aantal servers dat bezig is met een opdracht, en j is het aantal klanten in het systeem. We noemen m de fase en j het niveau van het systeem. Het aantal opstartende servers is gelijk aan $\min\{j - m, k - m\}$, omdat er nooit meer servers aan het opstarten zijn, dan er opdrachten in de wachtrij staan. Verder kunnen er nooit meer servers opstarten dan er servers zijn. Met deze toestandsbeschrijving ligt de toestand van het systeem vast.

De bijbehorende intensiteitsmatrix Q heeft de volgende elementen

$$q_{(m,j),(x,y)} = \begin{cases} \lambda, & x = m, y = j + 1 \\ x\mu, & x = m, y = j - 1 \vee m = j, x = y = j - 1 \\ (j - m)\alpha, & x = m + 1, y = j, j < k \\ (k - m)\alpha, & x = m + 1, y = j, j \geq k \\ -\sum_{a,b} q_{(m,j),(a,b)}, & x = m, y = j. \end{cases}$$

Figuur 1 is een illustratie van dit Markovproces.



Figuur 1: Markovketen behorend bij het $M/M/k/setup$ model

We willen het beschreven model analyseren met behulp van de CAP-methode, gebaseerd op [1]. Laat X een Markovproces zijn op een 2-dimensionale toestandsruimte S . S heeft een partitie (R, N) . Binnen elk niveau van R gedraagt het proces zich als een geboorte-sterfte proces met een vaste “verdwijns-ratio” naar het volgende niveau. R wordt daarom de “repeating portion” genoemd.

R en N hebben de volgende eigenschappen:

- $|N| < \infty$.
- $\exists j_0, M \in \mathbb{N}$ zodanig dat $R \equiv \{(m, j) | 0 \leq m \leq M, j \geq j_0\}$.
- Zij $(x, y) \in N$ en $(k, l) \in R$. Als $l \neq j_0$ geldt $q_{(x,y),(l,m)} = 0$ en $q_{(l,m),(x,y)} = 0$.
- Voor $(m, j), (x, y) \in R$ geldt

$$q_{(m,j),(x,y)} = \begin{cases} \lambda_m, & x = m, y = j + 1 \\ \mu_m, & x = m, y = j - 1 \\ \alpha_m, & x = m + 1, y = j. \end{cases}$$

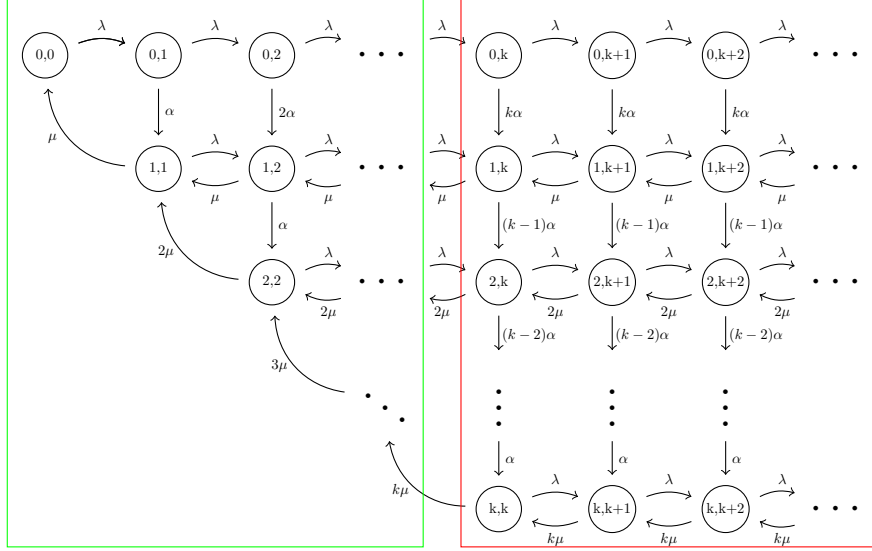
Om de stationaire verdeling π te bepalen, maakt de CAP-methode gebruik van slim gekozen taboesets A .

We zien dat de Markovketen die bij het $M/M/k/setup$ model hoort, voldoet aan de eisen. In Figuur 2 zijn R en N aangegeven. Verder merken we op dat geldt $M = j_0 = k$. We kunnen de CAP-methode dus gebruiken. Deze methode is samengevat in Algoritme 1.

Algoritme 1.

1. Voor alle $x \in N$ geldt

$$\pi_x = \sum_{i \in N \cup \{(m,k) | 0 \leq m \leq k\}} \frac{q_{i,x} \pi_i}{q_x}$$



Figuur 2: Markovketen behorend bij het $M/M/k/setup$ model, verdeeld in R en N .

2. Voor $j > k - 1$: Druk $\pi_{(0,j)}$ uit in $\pi_{(0,k-1)}$.
3. Voor $s = 1$ tot $s = k$ doe:
 - (a) $A_s = S \setminus \{(s, j) | j \geq k\}$.
 - (b) Bepaal B_s , behorend bij A_s met behulp van Vgl. (6).
 - (c) Bereken de inverse $-B_s^{-1}$.
 - (d) Druk $\pi(s, j)$ voor $j \geq k$ uit in $\pi(a, s)$, $a \in \{0, \dots, k-1\}$ met behulp van Gevolg 1.
4. Voeg de vergelijking $\sum_{(i,j) \in S} \pi_{(i,j)} = 1$ toe en los het stelsel op.

De eerste stap van het algoritme volgt door het kiezen van $A = S \setminus \{x\}$ en het toepassen van Lemma 1.

3.1 Voorbeeld van $M/M/k/setup$ model met eindige buffer

We willen Algoritme 1 illustreren aan de hand van een voorbeeld met een eindige buffer. We beschouwen het $M/M/k/2/4$ model zoals in Figuur 3. Dit wil zeggen, een model zoals hiervoor beschreven, met 2 servers en maximaal 4 klanten in de wachtrij. Verder zijn de parameters $\lambda = 1$, $\alpha = 1$ en $\mu = 2$. Als er een 5^e klant arriveert, wordt deze geweigerd. We zullen de stationaire verdeling bepalen met behulp van Algoritme 1.

1. We willen Lemma 1 toepassen om $\pi_{(0,0)}$ uit te drukken in $\pi_{(0,1)}$ of $\pi_{(1,1)}$. Merk op dat we om Lemma 1 toe te kunnen passen, elke A kunnen kiezen, behalve $A = S$ of $A = \emptyset$. Als we $A = S \setminus \{(0,0)\}$ nemen, volgt uit Lemma 1 dat we dat ook kunnen schrijven als

$$\pi_{(0,0)} = \sum_{a \in A} \pi_a q_a \mathbb{E}_a[T_{(0,0)}^A] = \pi_{(1,1)} q_{(1,1)} \mathbb{E}_{(1,1)}[T_{(0,0)}^A] = \pi_{(1,1)} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 2\pi_{(1,1)}.$$

We hebben $\mathbb{E}_{(1,1)}[T_{(0,0)}^A]$ bepaald met behulp van Vgl. (3).

Merk op dat we op eenzelfde manier $\pi_{(0,1)}$ uit kunnen drukken in termen van $\pi_{(0,0)}$ en met

behulp daarvan, kunnen we zowel $\pi_{(0,0)}$ als $\pi_{(1,1)}$ uitdrukken in $\pi_{(0,1)}$. Beschouwen we nu $A = S \setminus \{(0, 1)\}$. Nu volgt met Lemma 1

$$\pi_{(0,1)} = \sum_{a \in A} \pi_a q_a \mathbb{E}_a[T_{(0,1)}^A] = \pi_{(0,0)} q_{(0,0)} \mathbb{E}_{(0,0)}[T_{(0,1)}^A] = \pi_{(0,0)} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pi_{(0,0)}.$$

Beide resultaten samenvoegen geeft

$$\pi_{(0,0)} = 2\pi_{(0,1)}$$

$$\pi_{(1,1)} = \pi_{(0,1)}.$$

2. Om deze stap goed uit te voeren, beschouwen we $A = S \setminus \{(0, 2), (0, 3), (0, 4)\}$. We merken meteen op dat we $S \setminus A$ alleen via $(0, 1)$ kunnen bereiken. Voor alle andere toestanden $a \in A$ moeten we gelijk via A en dat resulteert in $\mathbb{E}_a[T_j^A] = 0$. Als we Lemma 1 toepassen, volgt

$$\pi_{(0,2)} = \pi_{(0,1)} q_{(0,1)} \mathbb{E}_{(0,1)}[T_{(0,2)}^A] = \pi_{(0,1)} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi_{(0,1)}.$$

Merk op dat we vanuit toestand $(0, 2)$ met kans $\frac{1}{3}$ naar toestand $(0, 3)$ gaan. Hierna moeten we eerst weer via A gaan om terug te komen in toestand $(0, 2)$. Hieruit kunnen we eenvoudig concluderen dat

$$\pi_{(0,3)} = \frac{1}{3} \pi_{(0,2)} = \frac{1}{9} \pi_{(0,1)}.$$

Omdat we gemiddeld een tijdsduur $\frac{1}{2}$ in toestand $(0, 4)$ zijn, voor we naar A terugkeren volgt op een soortgelijke manier

$$\pi_{(0,4)} = \frac{1}{2} \pi_{(0,3)} = \frac{1}{18} \pi_{(0,1)}.$$

3. Rij 1:

(a) $A_1 = S \setminus \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

(b) $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

(c) $-B_1^{-1} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 34 & 0 & 0 & 0 \\ 34 & 10 & 3 & 1 \\ 34 & 6 & 12 & 4 \\ 34 & 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$

- (d) In deze stap willen we $\pi_{(1,2)}$, $\pi_{(1,3)}$ en $\pi_{(1,4)}$ uitdrukken in termen van $\pi_{(0,1)}$ en $\pi_{(1,1)}$. Merk op dat we $S \setminus A_1$ alleen vanuit A_1 kunnen bereiken via $\pi_{(1,1)}$, $\pi_{(0,2)}$, $\pi_{(0,3)}$ en $\pi_{(0,4)}$. Dit geeft ons de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} \pi_{(1,2)} &= \pi_{(1,1)} q_{(1,1)} \mathbb{E}_{(1,1)}[T_{(1,2)}^{A_1}] + \sum_{i=2}^4 \pi_{(0,i)} q_{(0,i)} \mathbb{E}_{(0,i)}[T_{(1,2)}^{A_1}] \\ &= \pi_{(1,1)} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}_{(1,2)}[T_{(1,2)}^{A_1}] + \frac{1}{3} \pi_{(0,1)} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \mathbb{E}_{(1,2)}[T_{(1,2)}^{A_1}] \\ &\quad + \frac{1}{9} \pi_{(0,1)} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \mathbb{E}_{(1,3)}[T_{(1,2)}^{A_1}] + \frac{1}{18} \cdot 2 \mathbb{E}_{(1,4)}[T_{(1,2)}^{A_1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{17}\pi_{(1,1)} + \frac{10}{51}\pi_{(0,1)} + \frac{2}{51}\pi_{(0,1)} + \frac{2}{153}\pi_{(0,1)} \\
&= \frac{5}{17}\pi_{(1,1)} + \frac{38}{153}\pi_{(0,1)}.
\end{aligned}$$

Merk op dat de een-na-laatste stap volgt na het invullen van de waarden uit $-B_1^{-1}$. Op eenzelfde manier volgt

$$\pi_{(1,3)} = \frac{3}{34}\pi_{(1,1)} + \frac{25}{153}\pi_{(0,1)}$$

en

$$\pi_{(1,4)} = \frac{1}{34}\pi_{(1,1)} + \frac{14}{153}\pi_{(0,1)}.$$

Rij 2:

(a) $A_2 = S \setminus \{(2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

(b) $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

(c) $-B_2^{-1} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 64 & 16 & 20 & 5 \\ 64 & 16 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

(d) In deze stap willen we $\pi_{(2,2)}$, $\pi_{(2,3)}$ en $\pi_{(2,4)}$ uitdrukken in $\pi_{(0,1)}$ en $\pi_{(1,1)}$. Merk op dat we $S \setminus A_2$ alleen kunnen bereiken via $\pi_{(1,2)}$, $\pi_{(1,3)}$ en $\pi_{(1,4)}$. Daaruit volgt

$$\begin{aligned}
\pi_{(2,2)} &= \sum_{i=2}^4 \pi_{(i,2)} q_{(i,2)} \mathbb{E}_{(i,2)}[T_{(2,2)}^{A_2}] \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \mathbb{E}_{(2,2)}[T_{(2,2)}^{A_2}] \pi_{(1,2)} + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \mathbb{E}_{(2,3)}[T_{(2,2)}^{A_2}] \pi_{(1,3)} + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \mathbb{E}_{(2,4)}[T_{(2,2)}^{A_2}] \pi_{(1,4)} \\
&= \frac{1}{4}\pi_{(1,2)} + \frac{1}{4}\pi_{(1,3)} + \frac{1}{4}\pi_{(1,4)} \\
&= \frac{5}{68}\pi_{(1,1)} + \frac{19}{306}\pi_{(0,1)} + \frac{3}{136}\pi_{(1,1)} + \frac{25}{612}\pi_{(0,1)} + \frac{1}{136}\pi_{(1,1)} + \frac{7}{306}\pi_{(0,1)} \\
&= \frac{7}{68}\pi_{(1,1)} + \frac{77}{612}\pi_{(0,1)}.
\end{aligned}$$

Op eenzelfde manier volgt

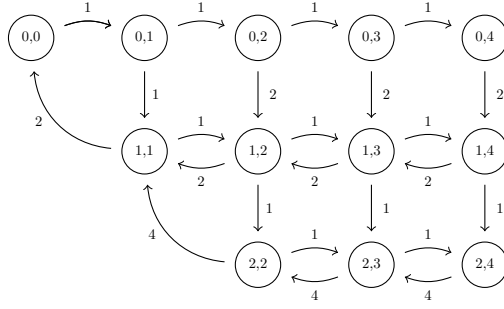
$$\pi_{(2,3)} = \frac{15}{272}\pi_{(1,1)} + \frac{233}{2448}\pi_{(0,1)}$$

en

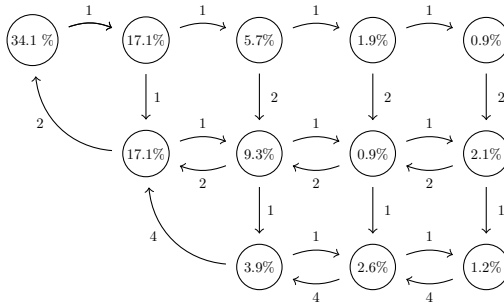
$$\pi_{(2,4)} = \frac{23}{1088}\pi_{(1,1)} + \frac{457}{9792}\pi_{(0,1)}.$$

4. Er moet gelden

$$\begin{aligned}
&2\pi_{(1,1)} + \pi_{(1,1)} + \pi_{(0,1)} + \frac{1}{3}\pi_{(0,1)} + \frac{1}{9}\pi_{(0,1)} + \frac{1}{18}\pi_{(0,1)} + \frac{5}{17}\pi_{(1,1)} + \frac{38}{153}\pi_{(0,1)} \\
&+ \frac{3}{34}\pi_{(1,1)} + \frac{25}{153}\pi_{(0,1)} + \frac{1}{34}\pi_{(1,1)} + \frac{14}{153}\pi_{(0,1)} + \frac{7}{68}\pi_{(1,1)} + \frac{77}{612}\pi_{(0,1)} + \frac{15}{272}\pi_{(1,1)}
\end{aligned}$$



Figuur 3: Markovketen behorend bij het $M/M/2/setup/4$ -model.



Figuur 4: Stationaire verdeling behorend bij voorbeeld 1.

$$+ \frac{233}{2448}\pi_{(0,1)} + \frac{23}{1088}\pi_{(1,1)} + \frac{457}{9792}\pi_{(0,1)} = 1.$$

Samen met het gegeven dat $\pi_{(0,1)} = \pi_{(1,1)}$ volgt

$$\pi_{(0,1)} = \pi_{(1,1)} = \frac{1224}{7175}.$$

In Figuur 4 is de stationaire verdeling ingevuld.

3.2 $M/M/k/setup$ model met oneindige buffer

In deze paragraaf laten we een oneindige buffer toe. Dat wil zeggen dat het niet uitmaakt hoeveel klanten er al wachten, we laten een nieuwe klant altijd toe. De structuur van de stationaire verdeling in geval van een oneindige buffer is veel systematischer, dan in het geval dat we een eindige buffer hebben. In deze paragraaf implementeren we stap 2 en 3 uit Algoritme 1. Daarmee leiden we een formule af voor de stationaire verdeling.

Net als in het voorbeeld met een eindige buffer, beschouwen we $A_0 = S \setminus \{(0, k+x) | x \in \mathbb{N}\}$ apart. Dit omdat de overgangsstructuur anders is, dan bij $s > 0$. We kunnen voor alle $j > k$ vanuit toestand (m, j) niet naar toestand $(m, j-1)$. We kunnen met behulp van Lemma 1, $\pi_{(0, k+x)}$ uitdrukken in $\pi_{(0, k-1)}$ en wel als volgt:

$$\pi_{(0, k+x)} = \left(\frac{\lambda}{k\alpha + \lambda} \right)^{x+1} \cdot \pi_{(0, k-1)} = \gamma_0^{x+1} c_{0,0}. \quad (7)$$

met $\gamma_0 = \frac{\lambda}{\alpha_0 + \lambda}$ en $c_{0,0} = \pi_{(0,k-1)}$.

Vervolgens willen we $\mathbb{E}_{(s,j)}[T_{(s,j')}^A]$ bepalen voor alle toestanden $(s,j), (s,j')$ in rij $s > 0$, met $j, j' \geq k$. Zij $A_s = S \setminus \{(s,j) | j \geq k\}$. Definieer $\omega_s := ((k-s)\alpha + s\mu + \lambda) = \alpha_s + \mu_s + \lambda$ met $\alpha_s = (k-s)\alpha$ en $\mu_s = s\mu$. Nu volgt dat

$$B_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_s + \mu_s & -\omega_s & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_s & \mu_s & -\omega_s & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_s & 0 & \mu_s & -\omega_s & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Net als in [2] kunnen we de juiste inverse met wat gereken bepalen door uitvermenigvuldiging. Laat

$$\gamma_s = \frac{\omega_s - \sqrt{(\omega_s)^2 - 4\lambda\mu_s}}{2\mu_s} \quad (8)$$

en

$$\psi_s = \frac{\omega_s - \sqrt{(\omega_s)^2 - 4\lambda\mu_s}}{2\lambda} = \frac{\gamma_s\mu_s}{\lambda}. \quad (9)$$

Noteer het (i,j) -de element van de matrix $-B_s^{-1}$ met $\bar{b}_s(i,j)$. Dan geldt

$$\bar{b}_s(i,j) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \frac{1}{\omega_s - s\mu\gamma_s}, & i = j = 1 \\ \frac{1 + \lambda\psi_s\bar{b}(i-1, i-1)}{\omega_s - s\mu\gamma_s}, & i = j \geq 2 \\ \gamma_s^{j-i}\bar{b}(i, i), & j \geq i + 1 > 1 \\ \psi_s^{i-j}\bar{b}(j, j), & 0 < j \leq i - 1. \end{cases}$$

We berekenen steeds het diagonaal element $\bar{b}_s(i, i)$, daarna de elementen uit rij i en vervolgens uit kolom i .

De elementen in B_s^{-1} zijn allemaal uit te drukken in element $\bar{b}_s(1, 1)$. In het bijzonder kunnen we $\bar{b}_s(i, i)$ voor $i \geq 1$ herschrijven als

$$\bar{b}_s(i, i) = \sum_{r=0}^{i-1} (\lambda\psi_1)^r \bar{b}_s(1, 1)^{r+1}.$$

Stelling 2 geeft voor $(s, z) \in R$ een formule voor $\pi_{s,z}$.

Stelling 2. *Als $\gamma_s \neq \gamma_{s'}$ voor alle $s \neq s'$ en $\gamma_s < 1$ voor alle s , dan geldt*

$$\pi_{(s,z)} = \sum_{i=0}^s c_{s,i} \gamma_i^{z-k+1} \quad (10)$$

met

$$c_{s,z} = \begin{cases} \frac{\alpha_{s-1}\gamma_z\gamma_s c_{s-1,z}}{\lambda(\gamma_z - \gamma_s)(1 - \psi_s\gamma_z)}, & 0 \leq z < s \leq k \\ \pi_{(s,k-1)} - \sum_{i=0}^{s-1} c_{s,i}, & 0 \leq z = s \leq k, \text{ met } \pi_{(k,k-1)} = 0. \end{cases}$$

Deze stelling zullen we in de rest van de paragraaf bewijzen.

Een belangrijke gelijkheid, die geldt voor $i \geq 1$ is

$$\omega_i \gamma_i - \lambda - \mu_i \gamma_i^2 = 0. \quad (11)$$

Dit geldt omdat

$$\begin{aligned} \omega_i \gamma_i - \lambda - \mu_i \gamma_i^2 &= \omega_i \frac{\omega_i - \sqrt{\omega_i^2 - 4\lambda\mu_i}}{2\mu_i} - \lambda - \mu_i \left(\frac{\omega_i - \sqrt{\omega_i^2 - 4\lambda\mu_i}}{2\mu_i} \right)^2 \\ &= \frac{\omega_i^2 - \omega_i \sqrt{\omega_i^2 - 4\lambda\mu_i}}{2\mu_i} - \lambda - \mu_i \left(\frac{\omega_i^2 - 2\omega_i \sqrt{\omega_i^2 - 4\lambda\mu_i} + \omega_i^2 - 4\lambda\mu_i}{4\mu_i^2} \right) \\ &= \frac{\omega_i^2 - \omega_i \sqrt{\omega_i^2 - 4\lambda\mu_i}}{2\mu_i} - \lambda - \left(\frac{\omega_i^2 - \omega_i \sqrt{\omega_i^2 - 4\lambda\mu_i} - 2\lambda\mu_i}{2\mu_i} \right) \\ &= -\lambda + \frac{2\lambda\mu_i}{2\mu_i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Met behulp van Lemma 1 volgt

$$\begin{aligned} \pi_{(s,k)} &= \pi_{(s,k-1)}(\mu_s + \alpha_s + \lambda) \frac{\lambda}{\mu_s + \alpha_s + \lambda} \bar{b}_s(1, 1) \\ &\quad + \sum_{j=k}^{\infty} \pi_{(s-1,j)}(\mu_{s-1} + \alpha_{s-1} + \lambda) \frac{\alpha_{s-1}}{\mu_{s-1} + \alpha_{s-1} + \lambda} \bar{b}_s(j - k + 1, 1) \\ &= \pi_{(s,k-1)} \lambda \bar{b}_s(1, 1) + \sum_{j=k}^{\infty} \pi_{(s-1,j)} \alpha_{s-1} \bar{b}_s(j - k + 1, 1). \end{aligned}$$

Op eenzelfde manier volgt voor $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \pi_{(s,k+x)} &= \pi_{(s,k-1)} \lambda \bar{b}_s(1, x+1) + \sum_{j=k}^{\infty} \pi_{(s-1,j)} \alpha_{s-1} \bar{b}_s(j - k + 1, x+1) \\ &= \pi_{(s,k-1)} \lambda \bar{b}_s(1, x+1) + \sum_{j=k}^{k+x} \pi_{(s-1,j)} \alpha_{s-1} \bar{b}_s(j - k + 1, x+1) \\ &\quad + \sum_{j=x+k+1}^{\infty} \pi_{(s-1,j)} \alpha_{s-1} \bar{b}_s(j - k + 1, x+1) \\ &= \pi_{(s,k-1)} \lambda \bar{b}_s(1, x+1) + \sum_{j=k}^{k+x} \pi_{(s-1,j)} \alpha_{s-1} \gamma_s^{x-(j-k)} \bar{b}_s(j - k + 1, j - k + 1) \\ &\quad + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \pi_{(s-1,j)} \alpha_{s-1} \psi_s^{j-k-x-1} \bar{b}_s(x+1, x+1). \end{aligned}$$

Merk op dat de bovenstaande vergelijking ook klopt voor $x = 0$. We zullen de twee gevallen in het vervolg dus niet afzonderlijk behandelen.

Allereerst laten we zien dat Stelling 2 klopt voor $s = 1$. Voor $s = 1$ krijgen we de volgende expressie

$$\begin{aligned}
\pi_{(1,k+x)} &= \pi_{(1,k-1)} \lambda \bar{b}_1(1, x+1) + \sum_{j=k}^{k+x} \pi_{(0,j)} \alpha_0 \gamma_1^{x-(j-k)} \bar{b}_1(j-k+1, j-k+1) \\
&\quad + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \pi_{(0,j)} \alpha_0 \psi_1^{j-k-x} \bar{b}_1(x+1, x+1) \\
&= \diamond + \Delta.
\end{aligned}$$

Met

$$\diamond = \pi_{(1,k-1)} \lambda \bar{b}_1(1, x+1),$$

en

$$\Delta = \sum_{j=k}^{k+x} \pi_{(0,j)} \alpha_0 \gamma_1^{x-(j-k)} \bar{b}_1(j-k+1, j-k+1) + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \pi_{(0,j)} \alpha_0 \psi_1^{j-k-x} \bar{b}_1(x+1, x+1).$$

Beide termen apart uitschrijven geeft het volgende

$$\begin{aligned}
\diamond &= \lambda \bar{b}_1(1, x+1) \pi_{(1,k-1)} \\
&= \lambda \gamma_1^x \bar{b}_1(1, 1) \pi_{(1,k-1)} \\
&= \frac{\lambda \gamma_1^x}{\omega_1 - \mu_1 \gamma_1} \pi_{(1,k-1)} \\
&= \frac{\lambda \gamma_1^{x+1}}{\omega_1 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_1^2} \pi_{(1,k-1)} \\
&= \frac{\lambda}{\gamma_1} \gamma_1^{x+1} \pi_{(1,k-1)} \\
&= \gamma_1^{x+1} \pi_{(1,k-1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{j=k}^{k+x} \pi_{(0,j)} \alpha_0 \gamma_1^{x-(j-k)} \bar{b}_1(j-k+1, j-k+1) + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \pi_{(0,j)} \alpha_0 \psi_1^{j-k-x} \bar{b}_1(x+1, x+1) \\
&= \sum_{j=k}^{k+x} c_{0,0} \gamma_0^{j-k+1} \alpha_0 \gamma_1^{x-(j-k)} \sum_{r=0}^{j-k} (\lambda \psi_1)^r (\bar{b}_1(1, 1))^{r+1} \\
&\quad + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} c_{0,0} \gamma_0^{j-k+1} \alpha_0 \psi_1^{j-k-x} \sum_{r=0}^x (\lambda \psi_1)^r \bar{b}_1(1, 1)^{r+1} \\
&= \alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0} \left(\sum_{j=k}^{k+x} \gamma_1^{x-(j-k)} \gamma_0^{j-k} \sum_{r=0}^{j-k} (\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^r + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \psi_1^{j-k-x} \gamma_0^{j-k} \sum_{r=0}^x (\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^r \right) \\
&= \alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0} \left\{ \sum_{j=k}^{k+x} \gamma_1^{x-(j-k)} \gamma_0^{j-k} \left(\frac{(\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{j-k+1} - 1}{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \psi_1^{j-k-x} \gamma_0^{j-k} \left(\frac{(\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1} - 1}{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0}}{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1} \left\{ \gamma_1^x \left(\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) \sum_{j=k}^{k+x} \left(\frac{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) \gamma_0}{\gamma_1} \right)^{j-k} - \sum_{j=k}^{k+x} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right)^{j-k} \right) \right. \\
&\quad \left. + ((\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1} - 1) \psi_1 \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \psi_1^{j-k-x-1} \gamma_0^{j-k} \right\} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0}}{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1} \left\{ \gamma_1^x \left[\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) \left(\frac{\left(\frac{\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1)}{\gamma_1} \right)^{x+1} - 1}{\frac{\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1)}{\gamma_1} - 1} \right) - \frac{\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right)^{x+1} - 1}{\frac{\gamma_0}{\gamma_1} - 1} \right] \right. \\
&\quad \left. + ((\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1} - 1) \psi_1 \frac{1}{1 - \psi_1 \gamma_0} \gamma_0^{x+1} \right\} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0}}{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1} \left(\frac{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) (\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1}}{\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - \gamma_1} - \frac{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) \gamma_1^{x+1}}{\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - \gamma_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\gamma_0^{x+1}}{\gamma_0 - \gamma_1} + \frac{\gamma_1^{x+1}}{\gamma_0 - \gamma_1} + \frac{\psi_1 (\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1}}{1 - \psi_1 \gamma_0} - \frac{\psi_1 \gamma_0^{x+1}}{1 - \psi_1 \gamma_0} \right) \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{\alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0}}{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1} \left(\frac{(\psi_1 \gamma_1 - 1) \gamma_0^{x+1}}{(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} + \frac{(\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1) \gamma_1^{x+2}}{(\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_1)} \right) \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0} (\psi_1 \gamma_1 - 1)}{(\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1)(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_0^{x+1} + \frac{\alpha_0 \gamma_0 \bar{b}_1(1, 1) c_{0,0} (\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1) \gamma_1}{(\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - 1)(\gamma_0 - \gamma_1)(\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - \gamma_1)} \gamma_1^{x+1} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 c_{0,0} (\psi_1 \gamma_1 - 1)}{(\lambda \psi_1 - \omega_1 + \mu_1 \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_0^{x+1} + \frac{\gamma_1 \gamma_0 \alpha_0 c_{0,0} \bar{b}_1(1, 1)}{(\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_1)} \gamma_1^{x+1} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 c_{0,0} (\psi_1 \gamma_1 - 1)}{\frac{\lambda \psi_1 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_1 + \mu_1 \gamma_1^2}{\gamma_1} (\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_0^{x+1} + \frac{\gamma_1 \gamma_0 \alpha_0 c_{0,0}}{(\gamma_0 \psi_1 \lambda - \gamma_1 \omega_1 + \gamma_1^2 \mu_1)(\gamma_0 - \gamma_1)} \gamma_1^{x+1} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 c_{0,0} (\psi_1 \gamma_1 - 1)}{\frac{\lambda \psi_1 \gamma_1 - \lambda}{\gamma_1} (\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_0^{x+1} + \frac{\gamma_1 \gamma_0 \alpha_0 c_{0,0}}{(\gamma_0 \psi_1 \lambda - \lambda)(\gamma_0 - \gamma_1)} \gamma_1^{x+1} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 c_{0,0} (\psi_1 \gamma_1 - 1) \gamma_1}{\lambda (\psi_1 \gamma_1 - 1)(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_0^{x+1} - \frac{\gamma_1 \gamma_0 \alpha_0 c_{0,0}}{\lambda (1 - \gamma_0 \psi_1)(\gamma_0 - \gamma_1)} \gamma_1^{x+1} \\
&= \frac{\alpha_0 \gamma_0 \gamma_1 c_{0,0}}{\lambda (\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_0^{x+1} - \frac{\alpha_0 \gamma_0 \gamma_1 c_{0,0}}{\lambda (\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} \gamma_1^{x+1} \\
&= c_{1,0} \gamma_0^{x+1} - c_{1,0} \gamma_1^{x+1},
\end{aligned}$$

met

$$c_{1,0} = \frac{\alpha_0 \gamma_0 \gamma_1 c_{0,0}}{\lambda (\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)}. \quad (12)$$

(1) volgt uit de volgende beweringen.

1. Eerst nemen we de eerste en de vijfde term tussen haakjes samen.

Claim:

$$\frac{\lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) (\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1}}{\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1) - \gamma_1} + \frac{\psi_1 (\gamma_0 \lambda \psi_1 \bar{b}_1(1, 1))^{x+1}}{1 - \psi_1 \gamma_0} = 0.$$

De bewering is waar als

$$\frac{\lambda\bar{b}_1(1,1)}{\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1} + \frac{1}{1 - \psi_1\gamma_0} = 0.$$

Dit volgt uit

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\bar{b}_1(1,1)}{\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1} + \frac{1}{1 - \psi_1\gamma_0} &= \frac{\lambda\bar{b}_1(1,1)(1 - \psi_1\gamma_0) + \gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1}{(\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1)(1 - \psi_1\gamma_0)} \\ &= \frac{\lambda\bar{b}_1(1,1) - \psi_1\gamma_0\lambda\bar{b}_1(1,1) + \gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1}{(\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1)(1 - \psi_1\gamma_0)} \\ &= \frac{\lambda\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1}{(\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1)(1 - \psi_1\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Dit is gelijk aan 0 als

$$\lambda\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1 = 0.$$

Er geldt

$$\lambda\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1 = \frac{\lambda}{\omega_1 - \mu_1\gamma_1} - \gamma_1 = \frac{\lambda - \gamma_1\omega_1 + \mu_1\gamma_1^2}{\omega_1 - \mu_1\gamma_1} = 0,$$

waarbij de laatste gelijkheid uit Vgl. (11) volgt.

2. Nu nemen we de derde en de zesde term tussen haakjes samen.

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_0^{x+1}}{\gamma_0 - \gamma_1} - \frac{\psi_1\gamma_0^{x+1}}{1 - \psi_1\gamma_0} &= \frac{-\gamma_0^{x+1}(1 - \psi_1\gamma_0) - \psi_1\gamma_0^{x+1}(\gamma_0 - \gamma_1)}{(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1\gamma_0)} \\ &= \frac{-\gamma_0^{x+1} + \psi_1\gamma_1\gamma_0^{x+1}}{(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1\gamma_0)} \\ &= \frac{(\psi_1\gamma_1 - 1)\gamma_0^{x+1}}{(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1\gamma_0)}. \end{aligned}$$

3. Als laatste nemen we de tweede en de vierde term tussen haakjes samen.

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_1^{x+1}\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1)}{\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1} + \frac{\gamma_1^{x+1}}{\gamma_0 - \gamma_1} &= \frac{-\gamma_1^{x+1}\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1)(\gamma_0 - \gamma_1) + \gamma_1^{x+1}(\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1)}{(\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_1)} \\ &= \frac{(\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - 1)\gamma_1^{x+2}}{(\gamma_0\lambda\psi_1\bar{b}_1(1,1) - \gamma_1)(\gamma_0 - \gamma_1)}. \end{aligned}$$

Alles samenvoegen geeft nu

$$\begin{aligned} \pi_{(1,k+x)} &= \diamond + \Delta \\ &= c_{1,0}\gamma_0^{x+1} + (\pi_{(1,k-1)} - c_{1,0})\gamma_1^{x+1} \\ &= c_{1,0}\gamma_0^{x+1} + c_{1,1}\gamma_1^{x+1}, \end{aligned}$$

met $c_{1,0}$ zoals in Vgl. (12) en

$$c_{1,1} = \pi_{(1,k-1)} - c_{1,0}.$$

Voor het geval $s = 2$ geldt

$$\pi_{(2,k+x)} = \pi_{(2,k-1)}\lambda\bar{b}_2(1, x+1) + \sum_{j=k}^{k+x} \pi_{(1,j)}\alpha_1\gamma_2^{x-(j-k)}\bar{b}_2(j-k+1, j-k+1)$$

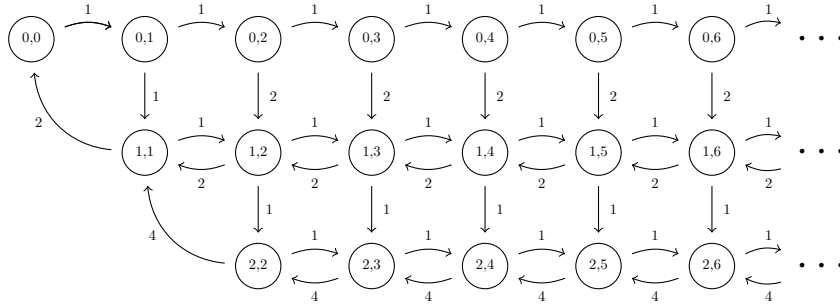
$$+ \sum_{j=k+x+1}^{\infty} \pi_{(1,j)} \alpha_1 \psi_2^{j-k-x-1} \bar{b}_2(x+1, x+1)$$

Merk op dat $\pi_{(1,j)} = c_{0,0} \gamma_0^{j-k+1} + c_{1,1} \gamma_1^{j-k+1}$ invullen een uitdrukking geeft die analoog is aan de uitdrukking voor $\pi_{(1,k+x)}$. We kunnen de gelijkheid opnieuw splitsen in termen die analoog zijn aan \diamond en Δ . Alleen verschillen de subindices. Dit geeft na een analoge afleiding het resultaat van Stelling 2.

Voor elke $s \leq k$ kunnen we op eenzelfde manier de afleiding doen. Het enige verschil bij $s = k$, is dat de term $\pi_{(k,k-1)} \lambda \bar{b}_k(1, x+1)$ ontbreekt. Omdat $\pi_{(k,k-1)} = 0$, is dit verder geen probleem.

3.3 Voorbeeld van $M/M/k/setup$ model met oneindige buffer

Na de analyses in de vorige paragraaf, willen we Algoritme 1 graag illustreren aan de hand van een voorbeeld met een oneindige buffer. We beschouwen het Markovproces zoals in Figuur 5. Merk op dat dit Markovproces dezelfde parameters heeft, als in paragraaf 3.1.



Figuur 5: Markovketen behorend bij het $M/M/2/setup$ model

1. Deze stap is hetzelfde als in paragraaf 3.1.
2. Voor deze stap kunnen we Vgl. (7) invullen. Dus

$$\pi_{(0,i)} = \left(\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \right)^{i-1} \pi_{(0,1)} = \left(\frac{1}{3} \right)^{i-1} \pi_{(0,1)}.$$

Daaruit volgt meteen

$$\gamma_0 = \frac{1}{3}$$

en

$$c_{0,0} = \pi_{(0,1)}.$$

3. Met de theorie uit Paragraaf 3.2 kunnen we deze stap nu in één keer doen. Laat $i \geq 2$.

Rij 1:

Uit Stelling 1 volgt dat

$$\pi_{(1,i)} = \sum_{j=0}^{i-1} c_{1,j} \gamma_j^{i-1}.$$

Met behulp van Stelling 2 kunnen we $c_{1,0}$ en $c_{1,1}$ bepalen. We merken op dat we hiervoor γ_1 en ψ_1 nodig hebben. Invullen van Vgl. (8) geeft

$$\gamma_1 = \frac{\omega_1 - \sqrt{\omega_1^2 - 4\lambda\mu_1}}{2\mu_1} = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Vgl. (9) invullen geeft

$$\psi_1 = \frac{\gamma_1 \mu_1}{\lambda} = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 2 - \sqrt{2}.$$

Nu volgt uit Stelling 2

$$c_{1,0} = \frac{\alpha_0 \gamma_0 \gamma_1 c_{0,0}}{\lambda(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - \psi_1 \gamma_0)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \pi_{(0,1)}}{1 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{2} \right)} = 6\pi_{(0,1)}$$

en

$$c_{1,1} = \pi_{(1,1)} - c_{1,0} = \pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)}.$$

Hieruit volgt

$$\pi_{(1,i)} = 6\pi_{(0,1)} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{i-1} + (\pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)}) \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^{i-1}$$

Rij 2:

Opnieuw volgt uit Stelling 1

$$\pi_{(2,i)} = \sum_{j=0}^2 c_{2,j} \gamma_j^{i-1}.$$

Vgl.(8) invullen geeft

$$\gamma_2 = \frac{\omega_2 - \sqrt{\omega_2^2 - 4\lambda\mu_2}}{2\mu_2} = \frac{5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Vgl. (9) invullen geeft

$$\psi_2 = \frac{\gamma_2 \mu_2}{\lambda} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Met behulp van Stelling 2 volgt nu

$$c_{2,0} = \frac{\alpha_1 \gamma_0 \gamma_2 c_{1,0}}{\lambda(\gamma_0 - \gamma_2)(1 - \psi_2 \gamma_0)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 6\pi_{(0,1)}}{1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \left(1 - 1 \cdot \frac{1}{3} \right)} = 9\pi_{(0,1)},$$

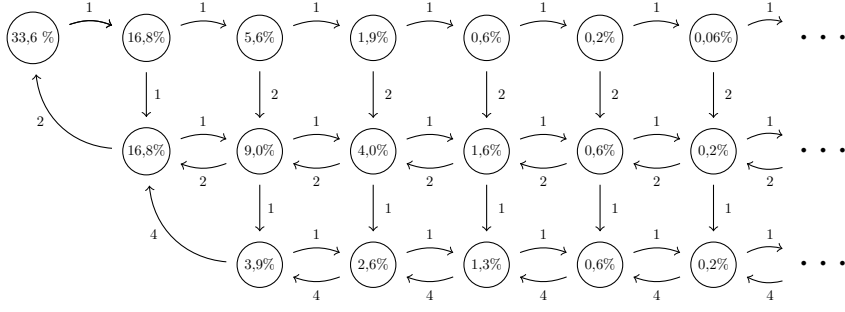
$$c_{2,1} = \frac{\alpha_1 \gamma_1 \gamma_2 c_{1,1}}{\lambda(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \psi_2 \gamma_1)} = \frac{1 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \frac{1}{4} (\pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)})}{1 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)} = \frac{(2 - \sqrt{2}) (\pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)})}{3\sqrt{2} - 4}$$

en

$$c_{2,2} = -(c_{2,0} + c_{2,1}) = \left(\frac{6(2 - \sqrt{2})}{3\sqrt{2} - 4} - 9 \right) \pi_{(0,1)} - \frac{2 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4} \pi_{(1,1)}.$$

Er volgt nu

$$\begin{aligned} \pi_{(2,i)} &= 9\pi_{(0,1)} \left(\frac{1}{3} \right)^{i-1} + \frac{(2 - \sqrt{2}) (\pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)})}{3\sqrt{2} - 4} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^{i-1} \\ &+ \left(\left(\frac{6(2 - \sqrt{2})}{3\sqrt{2} - 4} - 9 \right) \pi_{(0,1)} - \frac{2 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4} \pi_{(1,1)} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^{i-1}. \end{aligned}$$



Figuur 6: Stationaire verdeling behorend bij het $M/M/2/setup$ model met oneindige buffer.

4. Om het stelsel op te lossen, merken we op dat

$$\sum_{i=2}^{\infty} \pi_{(0,i)} = \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \pi_{(0,1)} = \pi_{(0,1)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i - \pi_{(0,1)} = \frac{3}{2} \pi_{(0,1)} - \pi_{(0,1)} = \frac{1}{2} \pi_{(0,1)}.$$

Op eenzelfde manier volgt

$$\sum_{i=2}^{\infty} \pi_{(1,i)} = 9\pi_{(0,1)} - \pi_{(1,1)} + \sqrt{2}(\pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)}).$$

Verder volgt

$$\sum_{i=2}^{\infty} \pi_{(2,i)} = \left(\frac{3}{2} + \frac{-20\sqrt{2} + 28}{3\sqrt{2} - 4}\right) \pi_{(0,1)} + \frac{10\sqrt{2} - 14}{9\sqrt{2} - 12} \pi_{(1,1)}.$$

Uit $\sum_{(i,j) \in S} \pi_{(i,j)} = 1$ volgt

$$\begin{aligned} & \pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)} + \sum_{i=2}^{\infty} (\pi_{(0,i)} + \pi_{(1,i)} + \pi_{(2,i)}) \\ &= 2\pi_{(0,1)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)} + \frac{1}{2}\pi_{(0,1)} + 9\pi_{(0,1)} - \pi_{(1,1)} + \sqrt{2}(\pi_{(1,1)} - 6\pi_{(0,1)}) \\ & \quad + \left(\frac{3}{2} + \frac{-20\sqrt{2} + 28}{3\sqrt{2} - 4}\right) \pi_{(0,1)} + \frac{10\sqrt{2} - 14}{9\sqrt{2} - 12} \pi_{(1,1)} = 1. \end{aligned}$$

Als we dit samenvoegen met $\pi_{(0,1)} = \pi_{(1,1)}$ dan volgt

$$\pi_{(0,1)} = \pi_{(1,1)} = \frac{9\sqrt{2} - 12}{136\sqrt{2} - 188} \approx 0,16799.$$

Een deel van de stationaire verdeling is te zien in Figuur 6.

3.4 Verschillen tussen het model met eindige en oneindige buffer

We hebben twee voorbeelden gezien van hetzelfde Markovproces, met als enige verschil dat bij het eerste proces maximaal vier klanten in het systeem kunnen zijn en bij het tweede proces oneindig veel. Uit Figuur 6 blijkt dat iets meer dan 2% van de tijd het Markovproces zich in een toestand bevindt die in het Markovproces met buffer 4 niet voorkomt. Hieruit blijkt dat

we voor dit geval een redelijke schatting hebben gemaakt door het geval te bekijken met een buffer van vier.

In veel gevallen is het waarschijnlijk niet toereikend om maar vier klanten in het systeem toe te laten. Dit komt omdat we in het voorbeeld het geval bekeken waarbij opdrachten gemiddeld twee keer zo snel verwerkt worden, als ze aankomen. Als $\mu = \lambda + \epsilon$ met $\epsilon \ll 1$, dan zal een buffer van vier waarschijnlijk niet toereikend, want er is dan een hogere belasting van het systeem. Vanwege de nette structuur kunnen we echter altijd vrij eenvoudig het geval berekenen met een oneindige buffer en daarmee bepalen welke eindige buffer toereiken is, zodat een bedrijf nauwelijks klanten hoeft weg te sturen.

3.5 Analyse van de γ 's

Er kan heel veel geschreven worden over γ_s , maar in deze laatste paragraaf willen we daar slechts enkele dingen van laten zien.

Merk op dat we bij Stelling 2 aannemen dat $\gamma_s < 1$ voor alle s . Er zijn systemen waarbij dit niet het geval is. Neem $\mu \ll 1$ en k, α en λ groter dan 1. In dit geval zijn de $\gamma_s > 1$, vanwege delen door $2s\mu$. Dit zorgt er echter voor dat het Markovproces niet recurrent is, omdat $\gamma^i s^i$ niet meer convergeert voor $i > \infty$. De eis $\gamma_s < 1$ voor alle s is dus nodig. Deze eis is ook voldoende voor positief recurrent zijn. Als $\gamma_s < 1$ voor alle s , convergeert ook $\sum_{z=k}^{\infty} \pi_{(s,z)}$ voor alle s . In dat geval is er een oplossing voor de stationaire verdeling, zie [5, Gevolg 1.26].

De andere eis is dat $\gamma_s \neq \gamma_{s'}$ voor $s \neq s'$. We hebben impliciet aangenomen dat dit altijd zo is. Er zijn echter gevallen waarin dat niet zo is. Voor $k\alpha = \lambda$ en $\frac{k\mu}{2} = \lambda$, oftewel $2\alpha = \mu$ geldt $\gamma_s = \frac{1}{2}$ voor alle s . Dit volgt op de volgende manier:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{(k-s)\alpha + \lambda + s\mu - \sqrt{((k-s)\alpha + \lambda + s\mu)^2 - 4\lambda s\mu}}{2s\mu} \\ &= \frac{2\lambda + \frac{1}{2}s\mu - \sqrt{(2\lambda - \frac{1}{2}s\mu)^2 - 4\lambda s\mu}}{2s\mu} \\ &= \frac{2\lambda + \frac{1}{2}s\mu \sqrt{(2\lambda - \frac{1}{2}s\mu)^2}}{2s\mu} \\ &= \frac{s\mu}{2s\mu} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ook in het geval $k = \lambda$ en $\mu = \alpha + 1$ zijn alle γ_s gelijk. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{(k-s)\alpha + \lambda + s\mu - \sqrt{((k-s)\alpha + \lambda + s\mu)^2 - 4\lambda s\mu}}{2s\mu} \\ &= \frac{\lambda\alpha - s\mu + s + \lambda + s\mu - \sqrt{(\lambda\alpha - s\mu + s + \lambda + s\mu)^2 - 4\lambda s\mu}}{2s\mu} \\ &= \frac{\lambda(\alpha + 1) + s - \sqrt{(\lambda(\alpha + 1) + s)^2 - 4\lambda s\mu}}{2s\mu} \\ &= \frac{\lambda\mu + s - \sqrt{(\lambda\mu + s)^2 - 4\lambda s\mu}}{2s\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda\mu + s - \sqrt{(\lambda\mu - s)^2}}{2s\mu} \\
&= \frac{2s}{2s\mu} \\
&= \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Als $\gamma_{s+1} > \gamma_s$ voor alle $s, s + 1$ volgt uit Vgl. (10) dat de $c_{s,i}$ zwaarder meetellen, naarmate i groter wordt. Na het bekijken van verschillende voorbeelden, hebben we het vermoeden dat $\gamma_{s+1} > \gamma_s$ als $\alpha > \mu$. Het omgekeerde is niet waar.

4 Vervolgonderzoek

Aan het einde van deze scriptie zal bij de lezer ongetwijfeld een vraag overgebleven zijn als: “Dit model is toch helemaal niet realistisch?” Dat is waar. We hebben in deze scriptie laten zien, dat dit model een bijzonder gunstige structuur heeft. Zelfs voor het model met een oneindige buffer kan tamelijk eenvoudig worden berekend wat de stationaire verdeling is.

Voor het huidige model met een oneindige buffer, kan meer onderzoek worden gedaan naar de effecten van k, α, μ en λ op γ_s . Verder is het interessant om het model realistischer te maken. Dit kan bijvoorbeeld door het toevoegen van een stand-by mogelijkheid of door het aan laten staan van één of meerdere servers. Verder gaan we er in het huidige model vanuit dat alle parameters een exponentiële verdeling hebben. Dit is in de praktijk niet zo. Om het model realistischer te maken, kan dus ook gekeken worden naar realistischere parameters.

Referenties

- [1] S. Doroudi, B. Fralix, M. Harchol-Balter. Clearing analysis on phases: exact limiting probabilities for skip-free, unidirectional, quasi-birth-death processes. *arXiv:1503.05899 [math.PR]*, 2015.
- [2] M.N. Katehakis, L.C. Smit, F.M. Spieksma. On the solution to a countable system of equations arising in stochastic processes. *arXiv:1510.05859 [math.OC]*, 2015.
- [3] A. Gandhi, S. Doroudi, M. Harchol-Balter, Alan Scheller-Wolf. Exact analysis of the M/M/k/setup class of Markov chains via recursive renewal reward. *Queueing Systems*, 77(2):153-166, 2013.
- [4] D. Ertiningsih, M.N. Katehakis, L.C. Smit, F.M. Spieksma. Level product form QSF processes and an analysis of queues with Coxian inter-arrival distribution. *arXiv:1507.05298 [math.PR]*, 2015.
- [5] L.C.M. Kallenberg, F.M. Spieksma *Besliskunde A, deel 1*. Universiteit Leiden, 2015.
- [6] W.J. Anderson. *Continuous-time Markov chains, an applications-oriented approach, deel 1*. Springer-Verlag, 1991.