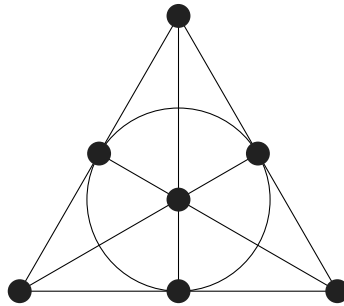


Stefan van der Lugt

Projectieve vlakken



Bachelorscriptie
Scriptiebegeleider: Dr. R.S. de Jong
27 juli 2012



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Projectieve vlakken	4
2.1	Projectieve vlakken	4
2.2	Dualiteit	6
2.3	Isomorfismen en centrale collineaties	6
2.4	Transitiviteit	10
3	Vlakke ternaire ringen	13
3.1	Vlakke ternaire ringen	13
3.2	Coördinaten bij een projectief vlak	14
3.3	Isotopismen en isomorfismen	16
4	Centrale collineaties en VTR-eigenschappen	20
4.1	Lineariteit	20
4.2	Quasilichamen	22
4.3	Bijna-lichamen en halflichamen	26
4.4	Moufangvlakken en alternatieffichamen	27
4.5	Desarguesvlakken en delingsringen	32
5	Papposvlakken en de stelling van Hessenberg	35
5.1	Projecties en projectieve afbeeldingen	35
5.2	De stelling van Pappos	36
5.3	De stelling van Hessenberg	37
5.4	De VTR van een Papposvlak	41
5.5	Vlakken van eindige orde	42

Voorwoord

Deze bachelorscriptie heeft als onderwerp *projectieve vlakken*. In deze scriptie zullen veel stellingen over punten- en lijnenconfiguraties staan. De bewijzen van veel stellingen worden dan ook een stuk duidelijker wanneer de lezer een afbeelding van de situatie voor zich ziet. Aan sommige bewijzen, vooral die in de eerste hoofdstukken, zijn dan ook afbeeldingen toegevoegd. Om de omvang van de scriptie te beperken is dit echter niet bij alle bewijzen gedaan. Toch wordt de lezer aangeraden om bij het lezen van de minder overzichtelijke bewijzen de gegeven situatie op papier te schetsen.

1 Inleiding

Deze scriptie zal gaan over meetkundige structuren genaamd projectieve vlakken. Projectieve vlakken komen voor in de projectieve meetkunde, en zijn een speciaal (2-dimensionaal) geval van de objecten, genaamd projectieve ruimtes, die daar bestudeerd worden. Het bijzondere van projectieve vlakken is dat enkele eigenschappen die gelden in alle hoger-dimensionale projectieve ruimtes, zoals de Desargueseigenschap uit de stelling van Desargues, niet altijd meer gelden in de 2-dimensionale gevallen. Ondertussen hebben deze vlakken niet zo'n simpele structuur als 0- of 1-dimensionale projectieve ruimtes. Dit maakt het zeer interessant om projectieve vlakken te bestuderen. Het blijkt dat ieder projectief vlak een achterliggende algebraïsche structuur, een zogeheten vlakke ternaire ring, heeft, die veel zegt over bepaalde eigenschappen van het projectieve vlak; bijvoorbeeld of het vlak aan de Desargueseigenschap voldoet. In deze scriptie zullen we deze vlakke ternaire ringen bekijken en afleiden welke eigenschappen van projectieve vlakken corresponderen met de eigenschappen van de bijbehorende vlakke ternaire ringen.

2 Projectieve vlakken

Dit hoofdstuk zullen we gebruiken om het object waar deze scriptie om draait, het projectieve vlak, te definiëren. Verder zullen we kijken naar isomorfismen tussen verschillende projectieve vlakken, net zoals we dat binnen bijvoorbeeld de groepen- en ringentheorie gewend zijn.

2.1 Projectieve vlakken

Een projectief vlak is een structuur bestaande uit punten en lijnen. We zullen met een formele definitie beginnen, maar hier zo snel mogelijk vanaf stappen; met een minder formele notatie zijn deze vlakken net zo eenvoudig te beschrijven en deze notatie zal een stuk overzichtelijker werken.

Definitie 2.1.1. Een *projectief vlak* is een tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ met \mathcal{P} en \mathcal{L} verzamelingen, en $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ een relatie, zodanig dat geldt:

PV1 Voor ieder tweetal $p, q \in \mathcal{P}$ met $p \neq q$ bestaat er een unieke $\ell \in \mathcal{L}$ met $p\mathcal{I}\ell$ en $q\mathcal{I}\ell$; deze ℓ noteren we als $\ell = pq$;

PV2 Voor ieder tweetal $\ell, m \in \mathcal{L}$ met $\ell \neq m$ bestaat er een unieke $p \in \mathcal{P}$ met $p\mathcal{I}\ell$ en $p\mathcal{I}m$; deze p noteren we als $\ell \cap m$;

PV3 Er bestaat een viertal $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$, paarsgewijs verschillend, zodanig dat er geen drietal p_i, p_j, p_k ($1 \leq i < j < k \leq 4$) bestaat met $p_i\mathcal{I}(p_j p_k)$.

De elementen van de verzameling \mathcal{P} noemen we *punten* en de elementen van de verzameling \mathcal{L} noemen we *lijnen*. Als voor een punt $p \in \mathcal{P}$ en een lijn $\ell \in \mathcal{L}$ geldt $p\mathcal{I}\ell$, dan zeggen we dat p op ℓ ligt of dat ℓ door p loopt. Twee punten worden verbonden door een lijn als deze lijn door beide punten loopt, en twee lijnen snijden in een punt als dit punt op beide lijnen ligt. We zeggen dat een verzameling punten in *algemene positie* ligt als er geen drietal van deze punten op één lijn ligt. De axioma's PV1, PV2 en PV3 zeggen dus het volgende:

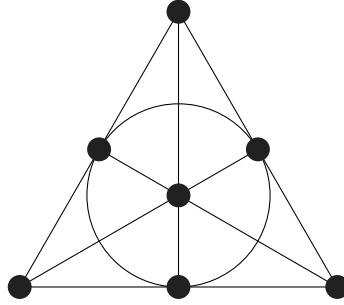
PV1 Ieder tweetal verschillende punten wordt verbonden door één unieke lijn;

PV2 Ieder tweetal verschillende lijnen snijdt in één uniek punt;

PV3 Er bestaat een *vierhoek*: een viertal punten in algemene positie.

Voordat we verder gaan is het natuurlijk een goed idee om na te gaan of er überhaupt wel structuren, die aan de voorgaande axioma's voldoen, bestaan. Dit blijkt inderdaad het geval: in figuur 1 vinden we een projectief vlak met 7 punten en 7 lijnen, het *Fano-vlak*. Dit vlak blijkt ook het kleinst mogelijke projectieve vlak te zijn, zoals we later zullen zien.

Een ander voorbeeld is het *reële of Euclidische projectieve vlak*; van de vectorruimte \mathbb{R}^3 kunnen we de 1-dimensionale deelruimtes als punten beschouwen en de 2-dimensionale deelruimtes als lijnen. Een punt ligt in dit geval op een lijn als de 1-dimensionale deelruimte bevat is in de 2-dimensionale deelruimte. Het nagaan van de axioma's is eenvoudig: twee 1-dimensionale deelruimtes spannen samen een unieke 2-dimensionale deelruimte op (PV1), en twee 2-dimensionale deelruimtes hebben een 1-dimensionale doorsnede (PV2). De 1-dimensionale deelruimtes opgespannen door de vectoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$



Figuur 1: Het Fano-vlak.

vormen een vierhoek (PV3), en dus is er inderdaad sprake van een projectief vlak. Deze constructie kan generaliseerd worden naar driedimensionale vectorruimtes V over willekeurige lichamen. De op deze wijze verkregen vlakken noteren we met $\mathbb{P}(V)$.

Zoals al eerder gezegd is de formele notatie in veel gevallen nogal omslachtig, en geven we de voorkeur aan een eenvoudiger notatie. Zo proberen we het gebruik van tripels zoveel mogelijk te beperken; we noteren projectieve vlakken bij voorkeur met \mathbb{P} , en geven het gebruik van punten en lijnen woordelijk aan: “zij p een punt en zij ℓ een lijn in \mathbb{P} ”. We vervangen de notatie met incidentierelatie \mathcal{I} door de volgende notatie: als een punt p op een lijn ℓ ligt dan schrijven we $p \in \ell$.

Axioma PV3 lijkt misschien wat restrictief, maar is een erg nuttig axioma: het sluit een aantal gedegeneerde gevallen, zoals een ‘vlak’ bestaande uit één lijn met daarop een aantal punten, uit. Dit axioma maakt de theorie een stuk prettiger; we hoeven niet meer rekening te houden met deze gedegeneerde gevallen. Twee stellingen die volgen uit PV3 en die we vaak zullen gebruiken zijn de volgende.

Stelling 2.1.2 ([5, p. 79]). *Zij \mathbb{P} een projectief vlak, en zij ℓ en m een tweetal lijnen in \mathbb{P} . Dan bestaat er een bijectie tussen de punten op ℓ en de punten op m . Analoog: zij p en q een tweetal punten in het vlak. Dan bestaat er een bijectie tussen de lijnen door p en de lijnen door q . \square*

Als er een lijn in \mathbb{P} bestaat met daarop eindig veel punten, dan liggen er dus op iedere lijn in \mathbb{P} eindig veel punten. We noemen het vlak dan *eindig*.

Stelling 2.1.3 ([5, p. 79]). *Zij \mathbb{P} een eindig projectief vlak. Dan bestaat er een positief geheel getal $n \geq 2$ zodanig dat geldt:*

1. *Op iedere lijn liggen precies $n + 1$ punten;*
2. *Ieder punt ligt op precies $n + 1$ lijnen;*
3. *\mathbb{P} bevat precies $n^2 + n + 1$ punten en precies $n^2 + n + 1$ lijnen. \square*

We noemen deze n de *orde* van het projectieve vlak. Tot nu toe zijn er alleen voorbeelden van eindige projectieve vlakken bekend waarvan de orde een priemmacht is. Of er ook projectieve vlakken met andere ordes bestaan, is nog een open probleem.

Uit de vorige stelling volgt bovendien dat ieder vlak ten minste 7 punten en lijnen heeft. We zien dus inderdaad dat er geen vlakken kleiner dan het Fano-vlak zijn.

2.2 Dualiteit

Een mooi principe binnen de projectieve wiskunde is het principe van dualiteit. Als $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ een projectief vlak is, dan is het eenvoudig na te gaan dat $\mathbb{P}^d := (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}^{-1})$ ook een projectief vlak is. We noemen dit vlak het *duale vlak* van \mathbb{P} . Merk op dat geldt $(\mathbb{P}^d)^d = \mathbb{P}$.

Hetzelfde kunnen we doen met eigenschappen van projectieve vlakken. Als Γ een eigenschap is van een projectief vlak, dan verkrijgen we de *duale eigenschap* Γ^d door in de uitspraak Γ overal het woord ‘punt’ door ‘lijn’ te vervangen en omgekeerd, en bijvoorbeeld zinsdelen als ‘ligt op’ te vervangen door ‘gaat door’. De duale eigenschap van ‘het vlak bevat een punt dat op precies 7 punten liggen’ is bijvoorbeeld: ‘het vlak bevat een lijn waarop precies 7 lijnen ligt’. Ook hier geldt $(\Gamma^d)^d = \Gamma$. Als een eigenschap Γ voor een projectief vlak \mathbb{P} geldt, dan zien we dat de duale eigenschap Γ^d voor het duale vlak geldt.

Een nuttig gevolg hiervan is het volgende: als T een stelling is die waar is voor alle vlakken, dan is ook de duale stelling waar voor alle vlakken. Zij \mathbb{P} namelijk een projectief vlak. Dan is \mathbb{P}^d ook een projectief vlak, en dus geldt T voor dit vlak. Nu volgt dat T^d geldt voor het vlak $(\mathbb{P}^d)^d = \mathbb{P}$.

2.3 Isomorfismen en centrale collineaties

Net zoals in de wereld van de algebra, is het ook in de projectieve meetkunde en in het bijzonder binnen de theorie van de projectieve vlakken handig om over objecten met dezelfde structuur te kunnen praten. En net zoals er isomorfismen tussen groepen of ringen bestaan, kunnen we ook isomorfismen tussen projectieve vlakken definiëren.

Definitie 2.3.1. Zijn $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ en $\mathbb{P}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ twee projectieve vlakken. Dan is een *isomorfisme (van \mathbb{P} naar \mathbb{P}')* een paar (π, λ) bestaande uit twee bijecties $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ en $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, zodanig dat voor alle $p \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$ geldt:

$$p\mathcal{I}\ell \iff \pi(p)\mathcal{I}'\lambda(\ell).$$

Als er een isomorfisme van \mathbb{P} naar \mathbb{P}' bestaat, dan noemen we \mathbb{P} en \mathbb{P}' *isomorf*, en we schrijven $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}'$. Een isomorfisme van een projectief vlak naar zichzelf heet een *automorfisme*.

Een isomorfisme is dus een afbeelding die punten naar punten, en lijnen naar lijnen stuurt, en incidentierelaties bewaart. Als het geen verwarring oplevert, zullen we de twee bijecties van een isomorfisme met één symbool (bij voorkeur π) aangeven.

De verzameling automorfismen van een vlak noteren we met $\text{Aut}(\mathbb{P})$. We zien eenvoudig in dat $\text{Aut}(\mathbb{P})$ een groep is onder samenstelling.

Voorbeeld 2.3.2. Het 120° draaien van het Fanovlak zoals weergegeven in figuur 1 is een isomorfisme van het Fanovlak naar zichzelf, en dus een automorfisme van het Fanovlak.

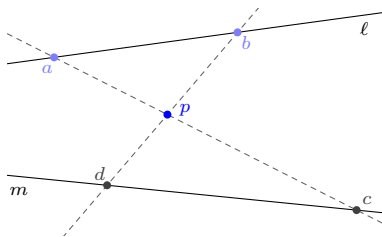
Voorbeeld 2.3.3. Zij V een 3-dimensionale vectorruimte over een lichaam k , en zij $\mathbb{P}(V)$ het geïnduceerde projectieve vlak. Een bijectieve lineaire transformatie op V induceert een automorfisme op $\mathbb{P}(V)$; we noemen deze automorfismen *projectieve afbeeldingen*. Als twee bijectieve lineaire transformaties op V dezelfde projectieve afbeelding induceren volgt dat de een een scalair veelvoud is van de ander; en dus is de verzameling projectieve afbeeldingen op te vatten als het quotiënt $\text{PGL}(V) := \text{GL}(V)/\text{ST}(V)$; hier is $\text{GL}(V)$ de groep van bijectieve lineaire transformaties op V en $\text{ST}(V)$ de ondergroep van scalaire transformaties (de transformaties $v \mapsto \lambda v$ met $\lambda \neq 0$) op V .

Andersom is niet ieder automorfisme een projectieve afbeelding: op $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ met homogene coördinaten $(x : y : z)$ is $(x : y : z) \mapsto (\bar{x} : \bar{y} : \bar{z})$ een automorfisme dat niet geïnduceerd wordt door een lineaire transformatie op \mathbb{C}^3 .

Als ϕ een k -lichaamsautomorfisme is, dan is een *semilineaire transformatie* een bijectie $T : V \rightarrow V$ zodanig dat $T(v + w) = T(v) + T(w)$ en $T(\lambda v) = \phi(\lambda)v$ voor alle $v, w \in V, \lambda \in k$. Uit de fundamentele stelling van de projectieve meetkunde [2, 2.26] volgt dat ieder automorfisme op $\mathbb{P}(V)$ geïnduceerd wordt door een semilineaire transformatie op V . Zo was het automorfisme in het vorige voorbeeld geïnduceerd door de semilineaire transformatie $(x, y, z) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

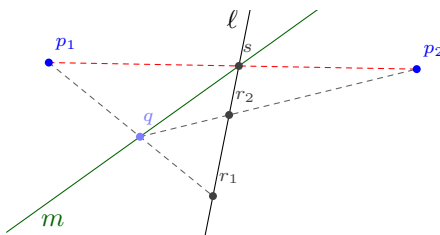
Er volgt dat alle automorfismen op $\mathbb{P}(V)$ projectieve afbeeldingen zijn dan en slechts dan als k alleen een triviaal automorfisme heeft. Dit is bijvoorbeeld het geval voor $k = \mathbb{Q}$ of $k = \mathbb{R}$.

Propositie 2.3.4. Zij π een automorfisme op een vlak \mathbb{P} . Als π twee verschillende lijnen ℓ, m puntsgewijs invariant laat, dan geldt $\pi = \text{id}$.



Bewijs. Zij p een punt buiten ℓ en m . Kies twee punten a, b op ℓ , ongelijk aan het snijpunt $\ell \cap m$. Noem de snijpunten van ap met m en van bp met m respectievelijk c en d . Omdat π alle punten a, b, c, d invariant laat, laat π ook lijnen ac en bd invariant, en daarmee het snijpunt $ac \cap bd = p$. We zien dat π alle punten in het vlak invariant laat, en dus moet π ook alle lijnen invariant laten, en dus zien we dat π de identiteit is. \square

Gevolg 2.3.5. Zij π een automorfisme op een vlak \mathbb{P} . Als π een lijn ℓ puntsgewijs invariant laat en ook twee verschillende punten p_1, p_2 buiten deze lijn invariant laat, dan is π de identiteit.



Bewijs. Zij s het snijpunt $p_1p_2 \cap \ell$. Neem m een lijn door s ongelijk aan ℓ en p_1p_2 . Zij $q \neq s$ een punt op m . Noem $p_1q \cap \ell = r_1$ en $p_2q \cap \ell = r_2$. Omdat p_1 en r_1 invariant gelaten worden, wordt lijn p_1r_1 dat ook, en omdat p_2 en r_2 invariant gelaten worden, volgt dat lijn p_2r_2 ook invariant gelaten wordt. We zien nu dat snijpunt $q = p_1r_1 \cap p_2r_2$ invariant gelaten wordt. Alle punten op lijn m blijven invariant onder π , en omdat ook alle punten op ℓ dat zijn, volgt uit 2.3.4 dat π de identiteit is. \square

Gevolg 2.3.6. Zij $\pi_1, \pi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P})$ een tweetal automorfismen. Als er een lijn ℓ en twee verschillende punten p_1, p_2 bestaan zodanig dat π_1 en π_2 hetzelfde werken op alle punten van ℓ en ook op p_1 en p_2 , dan geldt $\pi_1 = \pi_2$.

Bewijs. Het automorfisme $\pi_2^{-1}\pi_1$ laat ℓ puntsgewijs invariant en laat ook p_1 en p_2 invariant, en dus volgt $\pi_2^{-1}\pi_1 = \text{id}$, dus volgt $\pi_1 = \pi_2$. \square

In het vervolg van deze scriptie neemt een bepaald soort automorfismen een prominente rol in: de *centrale collineaties*.

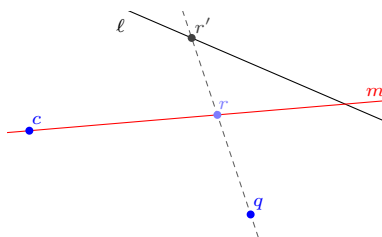
Definitie 2.3.7. Zij c een punt en zij ℓ een lijn in het vlak \mathbb{P} . Een c - ℓ -collineatie is een automorfisme op \mathbb{P} dat alle lijnen door c en alle punten op ℓ invariant laat. We noemen in dit geval c het *centrum* en ℓ de *as* van de collineatie. De verzameling van alle c - ℓ -collineaties in het vlak \mathbb{P} noteren we met $\text{Aut}_{c,\ell}(\mathbb{P})$, of met $\text{Aut}_{c,\ell}$ als er geen verwarring kan ontstaan over het onderliggende vlak.

We zien eenvoudig in dat $\text{Aut}_{c,\ell}(\mathbb{P})$ een ondergroep is van $\text{Aut}(\mathbb{P})$.

Propositie 2.3.8. Zijn \mathbb{P} en \mathbb{P}' twee projectieve vlakken, zijn c en ℓ een punt en een lijn in het vlak \mathbb{P} , zij π een c - ℓ -collineatie, en zij $\rho : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ een isomorfisme. Dan is $\rho\pi\rho^{-1}$ een $\rho(c)$ - $\rho(\ell)$ -collineatie.

Bewijs. Zij p een punt op $\rho(\ell)$. Dan is $\rho^{-1}(p)$ een punt op ℓ , en dus geldt $\pi\rho^{-1}(p) = \rho^{-1}(p)$, en dus volgt $\rho\pi\rho^{-1}(p) = p$. Analoog geldt voor een lijn m door $\rho(c)$ dat $\rho\pi\rho^{-1}(m) = m$. \square

Propositie 2.3.9. Zij π een c - ℓ -collineatie. Als geldt $\pi(q) = q$ voor een punt q buiten c en ℓ , dan volgt $\pi = \text{id}$.



Bewijs. Kies een lijn m door c die niet door q gaat en ongelijk is aan ℓ . Zij nu r een punt op m . Zij r' het snijpunt $qr \cap \ell$. π laat nu r' en q invariant, en dus ook $r'q$. Bovendien laat π lijn m invariant (m loopt immers door centrum c), en dus ook het snijpunt r van $r'q$ met m . We zien dus dat π zowel ℓ als m puntsgewijs invariant laat en uit 2.3.4 volgt nu dat π de identiteit is. \square

We vinden nu het volgende:

Gevolg 2.3.10. Een c - ℓ -collineatie wordt uniek bepaald door zijn werking op een punt q buiten c en ℓ .

Bewijs. Stel, we hebben $\pi_1, \pi_2 \in \text{Aut}_{c,\ell}(\mathbb{P})$ met $\pi_1(q) = \pi_2(q)$. Dan volgt $\pi_1^{-1}\pi_2(q) = q$, en dus volgt uit 2.3.9 dat $\pi_1^{-1}\pi_2 = \text{id}$, en dus volgt $\pi_1 = \pi_2$. \square

De duale uitspraak van de vorige stelling luidt:

Propositie 2.3.11. Een c - ℓ -collineatie wordt uniek bepaald door zijn werking op een lijn m met $m \neq \ell$ en $c \notin m$. \square

Stelling 2.3.12. Zij π een automorfisme dat alle punten op een lijn ℓ invariant laat. Dan is π een centrale collineatie.

Bewijs. Veronderstel dat π een punt c buiten ℓ invariant laat. Dan heeft iedere lijn m door c een snijpunt p met ℓ , en omdat zowel p als c door π op hun plek gelaten worden, volgt dat m ook invariant blijft onder π , en dus is π een c - ℓ -collineatie.

Veronderstel nu dat π geen punt p buiten ℓ invariant laat. Neem p een punt buiten ℓ . Dan volgt $p \neq \pi(p)$ en $\pi(p) \notin \ell$, en dus snijdt de lijn m door p en $\pi(p)$ de lijn ℓ in een punt $c \neq p, \pi(p)$. Omdat c, p en $\pi(p)$ op m liggen, volgt dat m invariant gelaten wordt door π . Zij nu $n \neq \ell, m$ een lijn door c , en zij $q \neq c$ een punt op n . Ook q ligt op een lijn die invariant blijft onder π ; namelijk $q\pi(q)$. Als deze lijn niet n is, dan snijdt de invariante lijn de lijn m in een punt buiten ℓ , en dus hebben we een invariant punt buiten ℓ , wat in tegenspraak is met onze veronderstelling. We zien dus dat ook lijn n invariant gelaten wordt, en dus dat c een centrum is van π , en dus is π een c - ℓ -collineatie. \square

Een c - ℓ -collineatie waarbij c op ℓ ligt noemen we een *elatie*. Uit 2.3.12 volgt nu:

Stelling 2.3.13. Zijn $\pi_1, \pi_2 \neq \text{id}$ elaties met dezelfde as ℓ maar met verschillende centra $c_1 \neq c_2$, dan is $\pi_3 = \pi_2\pi_1$ ook een elatie met centrum $c_3 \neq c_1, c_2$.

Bewijs. π_3 is een automorfisme dat alle punten op ℓ invariant laat. Zoals we net bewezen hebben is π_3 dus een centrale collineatie met een centrum c_3 . We zullen eerst bewijzen dat c_3 op ℓ ligt. Stel dat π_3 een punt p buiten ℓ vast laat. Dan geldt $\pi_2\pi_1(p) = p$, en dus $\pi_1(p) = \pi_2^{-1}(p)$. Omdat c_1 het centrum is van π_1 liggen $p, c_1, \pi_1(p)$ op één lijn en omdat c_2 het centrum is van π_2 liggen $p, c_2, \pi_2^{-1}(p)$ op één lijn, en omdat geldt $\pi_2^{-1}(p) = \pi_1(p)$, volgt dat deze lijnen hetzelfde zijn. Omdat p op deze lijn ligt, volgt dat deze lijn niet ℓ is, en omdat deze lijn ℓ nu in één uniek punt snijdt, volgt $c_1 = c_2$, tegenspraak. We zien dus dat het centrum van π_3 op ℓ ligt, en dus is π_3 een elatie.

Stel $c_3 = c_1$. Dan is $\pi_2 = \pi_3\pi_1^{-1}$ een als samenstelling van elaties met centrum c_1 zelf ook een elatie met centrum c_1 , tegenspraak, want $c_2 \neq c_1$. Dus volgt $c_3 \neq c_1$, en op dezelfde manier volgt $c_3 \neq c_2$. \square

De vorige stelling zegt dat de verzameling elaties met as ℓ , genoteerd als $\text{El}(\ell) = \bigcup_{c \in \ell} \text{Aut}_{c,\ell}$, een groep vormt onder samenstelling. Een opmerkelijk feit is het volgende:

Stelling 2.3.14 ([5, p. 97]). Zij ℓ een lijn in het vlak \mathbb{P} . Als $\text{Aut}_{c,\ell}(\mathbb{P})$ niet-triviaal is voor ten minste twee verschillende centra c op ℓ , dan is de elatiegroep $\text{El}(\ell)$ abels, en alle elementen van $\text{El}(\ell)$ (behalve de identiteit) hebben in dit geval dezelfde orde (dus óf een priem óf oneindig). \square

2.4 Transitiviteit

Een begrip dat later in deze scriptie een grote rol gaat spelen is de zogenoemde transitiviteit van de centrale automorfismen. Zoals we straks zullen zien heeft een projectief vlak een achterliggende algebraïsche structuur. Deze algebraïsche structuur zal afhangen van de mate waarin de centrale collineatiegroepen van het vlak transitief werken op de punten.

Definitie 2.4.1. Zij c een punt en zij ℓ een lijn binnen het vlak \mathbb{P} . We noemen het vlak c - ℓ -transitief als het volgende geldt: voor ieder tweetal punten p, q , ongelijk aan c en niet liggend op ℓ , zodanig dat p, q, c op één lijn liggen, bestaat er een c - ℓ -collineatie $\pi \in \text{Aut}_{c,\ell}$ met $\pi(p) = q$.

Merk op dat uit 2.3.10 volgt dat de c - ℓ -collineaties uit deze definitie uniek zijn.

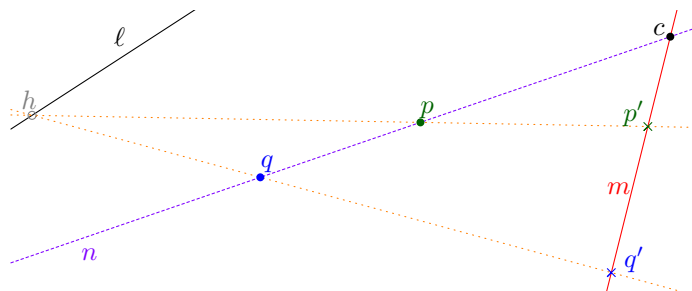
Propositie 2.4.2. Zijn \mathbb{P} en \mathbb{P}' projectieve vlakken, zij c een punt en zij ℓ een lijn in \mathbb{P} , en $\rho : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ een isomorfisme. Als \mathbb{P} c - ℓ -transitief is, dan is \mathbb{P}' $\rho(c)$ - $\rho(\ell)$ -transitief.

Bewijs. Zij $p, q \notin \rho(\ell)$ een tweetal punten op één lijn door $\rho(c)$. Dan zijn $\rho^{-1}(p), \rho^{-1}(q)$ twee punten op één lijn door c die niet op ℓ liggen, en dus bestaat er een c - ℓ -collineatie $\pi \in \text{Aut}_{c,\ell}$ met $\pi(\rho^{-1}(p)) = \rho^{-1}(q)$. Dan volgt $\rho\pi\rho^{-1}(p) = q$, en omdat $\rho\pi\rho^{-1}$ een $\rho(c)$ - $\rho(\ell)$ -collineatie is, is het bewijs afgerond. \square

Het lijkt een vervelend karwei om te bewijzen dat een bepaald vlak c - ℓ -transitief is. De volgende stelling bespaart ons daarbij gelukkig een hoop werk:

Stelling 2.4.3. Een vlak is c - ℓ -transitief dan en slechts dan als geldt:

er bestaat een lijn $m \neq \ell$ door c zodat geldt: als p' en q' twee punten verschillend van c zijn die op m en niet op ℓ liggen dan bestaat er een $\pi \in \text{Aut}_{c,\ell}$ met $\pi(p') = q'$.



Bewijs. De implicatie \implies is triviaal.

Zij p en q een tweetal punten op een lijn $n \neq m, \ell$ door c . We zoeken een automorfisme $\pi \in \text{Aut}_{c,\ell}$ zodanig dat $\pi(p) = q$. Zij $h \neq c$ een punt op ℓ , maar niet op n . Definieer p' en q' als de snijpunten van hp en hq met lijn m . De hypothese vertelt ons dat er een automorfisme $\pi \in \text{Aut}_{c,\ell}$ bestaat met $\pi(p') = q'$. Omdat π centrum c en as ℓ heeft, volgt $\pi(h) = h$ en $\pi(n) = n$. Nu volgt: $p = n \cap (hp')$ en $q = n \cap (hq')$ en dus volgt $\pi(p) = \pi(n \cap (hp')) = n \cap (hq') = q'$, en dus is π onze gezochte collineatie. We zien dus dat ons vlak c - ℓ -transitief is. \square

Bewijs. De implicatie \implies is triviaal. Veronderstel dat \mathbb{P} een ℓ_1 - en een ℓ_2 -translatievlak is voor twee verschillende lijnen ℓ_1, ℓ_2 door p . Zij m een derde lijn door p . Kies een punt q op ℓ_2 en een punt r op m , zodanig dat $q, r \neq p$. Zij s het snijpunt van qr met ℓ_1 . Dan is het vlak s - ℓ_1 -transitief, dus er bestaat een $\pi \in \text{Aut}_{s, \ell_1}$ met $\pi(q) = r$. Bovendien hebben we $\pi(p) = p$, en dus volgt $\pi(\ell_2) = \pi(pq) = pr = m$, en uit 2.4.6 volgt nu dat ons vlak ook een m -translatievlak is. \square

Propositie 2.4.9. *Binnen \mathbb{P} is iedere lijn een translatielijn dan en slechts dan als \mathbb{P} drie niet-concurrente translatielijnen bevat.*

Bewijs. De implicatie \implies is weer triviaal. Veronderstel dat \mathbb{P} drie niet-concurrente translatielijnen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 bevat. Zij m een lijn in het vlak. Als m door één van de drie snijpunten van ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 gaat, volgt uit 2.4.8 dat m ook een translatielijn is. Stel dat m door geen van deze snijpunten gaat. Zij p een punt op m dat niet op ℓ_3 ligt, en zij s het snijpunt $\ell_1 \cap \ell_2$. Zij r het snijpunt $ps \cap \ell_3$. Omdat ℓ_3 een translatielijn is, bestaat er een r - ℓ_3 -collineatie π met $\pi(p) = s$. Nu gaat $\pi(m) = \pi(pr) = sr$ door $s = \ell_1 \cap \ell_2$ en dus volgt uit 2.4.8 dat $\pi(m)$ een translatielijn is. Nu volgt uit 2.4.6 dat $m = \pi^{-1}(\pi(m))$ ook een translatielijn is. \square

Definitie 2.4.10. Een projectief vlak waarin iedere lijn een translatielijn is heet een *Moufangvlak*.

Stelling 2.4.11. *De automorfismengroep $\text{Aut}(\mathbb{P})$ van een Moufangvlak \mathbb{P} werkt transitief op de driehoeken in het vlak.*

Bewijs. Stel, OXY en $O'X'Y'$ zijn twee driehoeken in het vlak. Als $O = O'$, neem dan $\pi_1 = \text{id}$. Als $O \neq O'$, neem dan een punt p_1 op OO' , en een lijn $\ell_1 \neq OO'$ door p_1 . Neem π_1 de p_1 - ℓ_1 -collineatie met $\pi_1(O) = O'$; en definieer $X_1 = \pi_1(X)$ en $Y_1 = \pi_1(Y)$.

Als geldt $X_1 = X'$, neem dan $\pi_2 = \text{id}$. Als $X_1 \neq X'$, kies dan ℓ_2 een lijn door O' die niet door X_1 of X' gaat, en laat $p_2 = X_1X' \cap \ell_2$. Neem dan π_2 de p_2 - ℓ_2 -collineatie met $\pi_2(X_1) = X'$. Definieer nu $Y_2 = \pi_2(Y_1)$.

Voor het derde automorfisme nemen we $\ell_3 = O'X'$, en $p_3 = Y_2Y' \cap \ell_3$. Neem dan π_3 de p_3 - ℓ_3 -collineatie met $\pi_3(Y_2) = Y'$.

Nu zien we dat $\pi_3\pi_2\pi_1$ een automorfisme is dat O naar O' stuurt, X naar X' , en Y naar Y' . \square

3 Vlakke ternaire ringen

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar een bepaald soort algebraïsche structuren: de zogenoemde vlakke ternaire ringen. Deze structuren zijn zeer interessant, omdat ze ons de mogelijkheid bieden om coördinaten te geven aan willekeurige projectieve vlakken, net zoals we dat gewend zijn te doen bij het Euclidische vlak.

3.1 Vlakke ternaire ringen

Zoals we groepen en ringen verkrijgen door verzamelingen uit te rusten met operaties, verkrijgen we de vlakke ternaire ringen op eenzelfde manier.

Definitie 3.1.1. Een *vlakke ternaire ring* is een paar (R, T) , waarbij R een niet-lege verzameling is met twee verschillende elementen $0, 1 \in R$, en $T : R^3 \rightarrow R$ een afbeelding is, zodanig dat geldt:

$$V1 \quad T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b \text{ voor alle } a, b \in R;$$

$$V2 \quad T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a \text{ voor alle } a \in R;$$

$$V3 \quad \text{voor alle } a, b, c, d \in R \text{ met } a \neq c \text{ bestaat er een unieke } x \in R \text{ zodanig dat } T(x, a, b) = T(x, c, d);$$

$$V4 \quad \text{voor alle } a, b, c \in R \text{ bestaat er een unieke } x \in R \text{ zodanig dat } T(a, b, x) = c;$$

$$V5 \quad \text{voor alle } a, b, c, d \in R \text{ met } a \neq c \text{ bestaat er een uniek paar } (x, y) \in R^2 \text{ zodanig dat } T(a, x, y) = b \text{ en } T(b, x, y) = d.$$

Voorbeeld 3.1.2. Zij $(D, +, \cdot)$ een delingsring. We definiëren $T : D^3 \rightarrow D$ als volgt: $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ voor alle $a, b, c \in D$. Door de axioma's na te gaan vinden we dat (D, T) een vlakke ternaire ring is.

Definitie 3.1.3. Een *lus* $(R, *)$ is een verzameling R met een binaire operatie $*$ zodanig dat geldt:

$$L1 \quad \text{voor alle } a, b \in R \text{ bestaan er unieke } x, y \in R \text{ zodanig dat geldt } a * x = b \text{ en } y * a = b;$$

$$L2 \quad \text{er bestaat een eenheidselement } e \in R \text{ zodanig dat geldt } x * e = e * x = x \text{ voor alle } x \in R.$$

Propositie 3.1.4. Zij (R, T) een vlakke ternaire ring met optelling $+$ en vermenigvuldiging \cdot . Dan zijn $(R, +)$ en $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ lussen.

Bewijs. Zij $a, b \in R$. Uit V4 volgt dat er een unieke $x \in R$ bestaat met $T(a, 1, x) = b$, ofwel: $a + x = b$. Uit V3 volgt dat er een unieke $y \in R$ bestaat met $T(y, 1, a) = T(y, 0, b)$, ofwel: $y + a = b$. Uit V1 en V2 volgt dat 0 het identiteitselement voor de optelling is.

Zij $a, b \in R \setminus \{0\}$. Uit V5 volgt dat er een uniek paar $(x, y) \in R$ bestaat met $T(a, x, y) = b$ en $T(0, x, y) = 0$, ofwel: $y = 0$ en dus $a \cdot x = b$. Omdat $b \neq 0$ volgt dat $x \in R \setminus \{0\}$ de unieke oplossing is van $a \cdot x = b$. Uit V3 volgt dat er een unieke $y \in R$ bestaat met $T(y, a, 0) = T(y, 0, b)$, ofwel: $y \cdot a = b$. Omdat $b \neq 0$ volgt $y \neq 0$. Ten slotte volgt uit V2 dat 1 het identiteitselement voor de vermenigvuldiging is. \square

3.2 Coördinaten bij een projectief vlak

In de volgende paragraaf zullen we projectieve vlakken uitrusten met een systeem van coördinaten. Gegeven een vierhoek in het vlak kunnen we op natuurlijke wijze dit vlak van coördinaten voorzien. Helaas is deze constructie in het algemeen niet onafhankelijk van de keuze van de vierhoek. Daarom is het een goed idee om de notie van gepunte projectieve vlakken in te voeren, vergelijkbaar met de gepunte topologische ruimtes in de topologie.

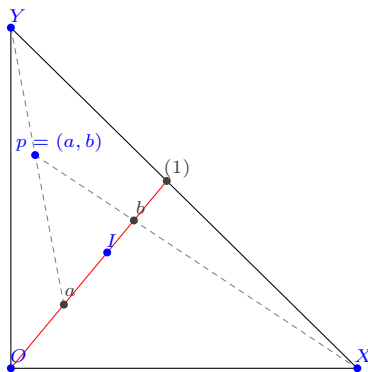
Definitie 3.2.1. Een *n-gepunte vlak* is een paar $(\mathbb{P}, p_1 \dots p_n)$, bestaande uit een projectief vlak \mathbb{P} en een n -tal punten p_1, \dots, p_n in algemene positie binnen dit vlak.

Zoals een continue afbeelding tussen gepunte ruimtes niets meer is dan een continue afbeelding tussen de onderliggende ruimtes die het ene basispunt naar het andere stuurt, zo werken isomorfismen tussen gepunte vlakken op eenzelfde manier.

Definitie 3.2.2. Stel, $(\mathbb{P}, p_1 \dots p_n)$ en $(\mathbb{P}', q_1 \dots q_n)$ zijn twee n -gepunte vlakken. Een *isomorfisme* van n -gepunte vlakken is een isomorfisme $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ zodanig dat geldt $\pi(p_i) = q_i$ voor alle $i = 1, \dots, n$.

We noteren de verzameling isomorfismen $(\mathbb{P}, p_1 \dots p_n) \rightarrow (\mathbb{P}', q_1 \dots q_n)$ met $\text{Isom}((\mathbb{P}, p_1 \dots p_n), (\mathbb{P}', q_1 \dots q_n))$.

We hebben nu genoeg ammunitie verzameld om projectieve vlakken van coördinaten te voorzien. Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een 4-gepunte vlak. We zullen alle punten en lijnen binnen dit vlak voorzien van coördinaten. Als eerste geven we alle punten op de lijn OI , behalve het snijpunt $OI \cap XY$, een uniek label. Het punt O geven we label 0, en het punt I geven we label 1. Noem R de verzameling labels. We zijn nu klaar om alle punten van coördinaten te voorzien.



Zij p een punt buiten XY . Nu volgt dat Yp en OI snijden in een punt ongelijk aan $OI \cap XY$. Dit punt heeft een label $a \in R$. Op analoge wijze is $OI \cap Xp$ een punt met een label $b \in R$. Punt p krijgt nu coördinaten (a, b) . In het bijzonder heeft een punt p op lijn OI met label $a \in R$ coördinaten (a, a) .

De punten op lijn XY hebben nog geen coördinaten. Het punt Y krijgt coördinaat (∞) . Ieder ander punt q op XY krijgt label (m) , waarbij $m \in R$ zodanig is dat $(1, m)$ het snijpunt van Oq met IY is.

De lijnen geven we de volgende coördinaten: lijn XY krijgt coördinaat $[\infty]$. Een lijn $\ell \neq XY$ door Y krijgt coördinaat $[a]$, waarbij $a \in R$ het label is van

het snijpunt $\ell \cap OI$. Iedere andere lijn ℓ krijgt coördinaat $[m, b]$, waarbij $(0, b)$ het snijpunt van ℓ met OY is, en (m) het snijpunt van ℓ met XY .

Om dit geheel wat duidelijker te maken voeren we enkele termen in die ook voorkomen in het Euclidische vlak. We noemen punt O de *oorsprong* van het vlak. Lijnen OX en OY heten de *x-as* en de *y-as*. We noemen lijn XY de *lijn op oneindig* en noteren deze lijn met ℓ_∞ . De lijn met coördinaten $[m, b]$ heeft *helling* m en *beginpunt* b .

We kunnen nu als volgt een ternaire operatie $T : R^3 \rightarrow R$ definiëren: we zeggen $y = T(x, m, b)$ als (x, y) op $[m, b]$ ligt, ofwel: als y de tweede coördinaat van $[x] \cap [m, b]$ is. We vinden nu het volgende:

Stelling 3.2.3. *Zij R en $T : R^3 \rightarrow R$ gedefinieerd als hierboven. Dan is (R, T) een vlakke ternaire ring.*

Bewijs. We gaan de axioma's van de vlakke ternaire ring af.

- V1 Voor $a, b \in R$ geldt $(0, b) \in (0, b)(a) = [a, b]$, en dus volgt $T(0, a, b) = b$. Omdat b de y -coördinaat is van (a, b) , liggen $(0, b)$, (a, b) , (b, b) en $(0) = X$ op één lijn, en dus hebben we $(a, b) \in (0, b)(0) = [0, b]$ en dus volgt $T(a, 0, b) = b$.
- V2 Zij $a \in R$. Omdat $(0, 0)$, $(1, 1)$, (a, a) en (1) op één lijn liggen, volgt $(a, a) \in (0, 0)(1) = [1, 0]$ en dus $a = T(a, 1, 0)$. De punten $(0, 0)$, $(1, a)$, (a) liggen op de lijn $[a, 0]$, en dus volgt uit $(1, a) \in [a, 0]$ dat $a = T(1, a, 0)$.
- V3 Zij $a, b, c, d \in R$ met $a \neq c$. De lijnen $[a, b]$ en $[c, d]$ snijden niet op oneindig, want dan zou gelden $a = c$. Ze snijden dus in een uniek punt (x, y) , en dus volgt dat x de unieke oplossing is van de vergelijking $T(x, a, b) = T(x, c, d)$.
- V4 Zij $a, b, c \in R$. Bekijk de lijn $(a, c)(b)$. Deze lijn is van de vorm $[b, x]$ voor een unieke $x \in R$, en deze x is dus de unieke x waarvoor geldt $(a, c) \in [b, x]$, en dus de unieke oplossing van de vergelijking $T(a, b, x) = c$.
- V5 Zij $a, b, c, d \in R$ met $a \neq c$. Dan geldt $(a, b) \neq (c, d)$ en dus bestaat er een unieke lijn die door beide punten gaat. Deze lijn is van de vorm $[x, y]$ en dus volgt dat het paar (x, y) het unieke paar is waarvoor geldt $(a, b) \in [x, y]$ en $(c, d) \in [x, y]$, en daarmee de unieke oplossing is van de vergelijkingen $T(a, x, y) = b$ en $T(c, x, y) = d$. \square

We kunnen dit proces ook omdraaien: gegeven een vlakke ternaire ring (R, T) kunnen we een projectief vlak bouwen. We nemen de volgende puntenverzameling:

$$\mathcal{P} = \{(x, y) : x, y \in R\} \cup \{(m) : m \in R\} \cup \{(\infty)\},$$

en de lijnen definiëren we op soortgelijke wijze:

$$\mathcal{L} = \{[m, b] : m, b \in R\} \cup \{[a] : a \in R\} \cup \{[\infty]\}.$$

Een punt (x, y) ligt op lijn $[m, b]$ als geldt $y = T(x, m, b)$, en op de verticale lijn $[x]$. Een punt (m) ligt op de lijnen van de vorm $[m, b]$, en op lijn $[\infty]$. Het punt (∞) ligt op alle lijnen $[a]$ en op de lijn $[\infty]$.

Neem $O = (0, 0)$, $I = (1, 1)$, $X = (0)$ en $Y = (\infty)$. We vinden nu het volgende:

Stelling 3.2.4. Zij $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$. Dan is $(\mathbb{P}, OIXY)$ een 4-gepunt projectief vlak.

Bewijs. We gaan de axioma's van het projectieve vlak na:

PV1 Het punt (∞) wordt met de punten van de vorm (m) verbonden door de lijn $[\infty]$, en met de punten (x, y) door de lijn $[x]$. Twee punten (m) en (n) worden verbonden door $[\infty]$. De verbindingslijn tussen punten (x, y) en (m) zal van de vorm $[m, b]$ zijn, waarbij geldt $y = T(x, m, b)$, en dus is deze b en daarmee de verbindingslijn volgens axioma V4 uniek. Zij nu (a, b) en (c, d) twee punten in het vlak. Als $a = c$ dan is $[a]$ de verbindingslijn van de twee punten. Als $a \neq c$ dan is de verbindingslijn van de vorm $[m, k]$, en er moet gelden dat $b = T(a, m, k)$ en $d = T(c, m, k)$. Axioma V5 garandeert dat zo'n lijn $[m, k]$ bestaat en uniek is.

PV2 Lijnen $[\infty]$ en $[a]$ snijden alleen in (∞) . Lijnen $[\infty]$ en $[m, b]$ snijden in (m) . Twee lijnen $[a]$ en $[a']$ met $a \neq a'$ snijden in (∞) . Twee lijnen $[a]$ en $[m, b]$ moeten snijden in het punt $(a, T(a, m, b))$. Stel, we hebben twee lijnen $[m, b]$ en $[m', b']$. Als $m = m'$ dan snijden ze in (m) . Als $m \neq m'$ dan snijden de twee lijnen in een punt (x, y) , waarbij $y = T(x, m, b) = T(x, m', b')$; axioma V3 garandeert het bestaan en de uniciteit van dit punt.

PV3 De punten O, I, X en Y liggen in algemene positie: de lijn OI is niet van de vorm $[a]$ of $[\infty]$ en dus van de vorm $[m, b]$. Er volgt dus $0 = T(0, m, b) = b$ (axioma V1) en $1 = T(1, m, b) = T(1, m, 0) = m$ (axioma V2), en dus volgt $OI = [m, b]$. De punten X en Y liggen dus niet op deze lijn. Bovendien liggen O en I duidelijk niet op XY en dus zien we inderdaad dat deze vier punten in algemene positie liggen. \square

Voorbeeld 3.2.5. Zij k een lichaam. Als we een ternaire operatie T op k definiëren, gegeven door $T(a, b, c) = ab + c$, dan is (k, T) een vlakke ternaire ring. We kunnen dus een projectief vlak \mathbb{P} construeren dat zijn coördinaten van het lichaam k krijgt. Dit projectieve vlak is 'hetzelfde' vlak als het 'klassieke' projectieve vlak $\mathbb{P}^2(k)$; deze twee vlakken zijn isomorf.

Het is niet moeilijk in te zien dat de twee voorgaande constructies elkaars tegengestelde zijn: gegeven een vlakke ternaire ring kunnen we een 4-gepunt projectief vlak maken, en daaruit kunnen we de originele vlakke ternaire ring weer destilleren. We kunnen dus in het vervolg van deze scriptie ervan uitgaan dat alle 4-gepunte vlakken $(\mathbb{P}, OIXY)$ voorzien zijn van coördinaten die een bijbehorende vlakke ternaire ring induceren.

3.3 Isotopismen en isomorfismen

Ook tussen de vlakke ternaire ringen bestaan structuurbewarende afbeeldingen. We maken onderscheid tussen de zogenoemde isotopismen en isomorfismen.

Definitie 3.3.1. Stel, (R, T) en (R', T') zijn twee vlakke ternaire ringen. Een *isotopisme* is een drietal bijectieve afbeeldingen (f, g, h) van R naar R' zodanig dat geldt $h(0) = 0$ en $h(T(a, b, c)) = T'(f(a), g(b), h(c))$ voor alle $a, b, c \in R$.

Propositie 3.3.2. Voor een isotopisme (f, g, h) geldt ook $f(0) = 0$ en $g(0) = 0$.

Bewijs. Omdat f een bijectie is, bestaat er een $x \in R$ met $f(x) = 0$. Uit axioma 1 van de vlakke ternaire ring volgt $h(0) = T'(0, g(1), h(0))$. Nu volgt:

$$h(0) = T'(0, g(1), h(0)) = T'(f(x), g(1), h(0)) = h(T(x, 1, 0)) = h(x)$$

en omdat h een bijectie is volgt $x = 0$. Het bewijs voor $g(0) = 0$ gaat op analoge wijze. \square

Definitie 3.3.3. Stel, (R, T) en (R', T') zijn twee vlakke ternaire ringen. Een *isomorfisme* van (R, T) naar (R', T') is een bijectie $f : R \rightarrow R'$ zodanig dat geldt $f(T(a, b, c)) = T'(f(a), f(b), f(c))$ voor alle $a, b, c \in R$.

Propositie 3.3.4. Voor een isomorfisme f geldt $f(0) = 0$ en $f(1) = 1$.

Bewijs. f is een bijectie, dus er bestaat een $x \in R$ met $f(x) = 0$. Nu volgt uit de axioma's van de vlakke ternaire ring:

$$0 = f(x) = f(T(x, 1, 0)) = T'(f(x), f(1), f(0)) = T'(0, f(1), f(0)) = f(0).$$

Neem nu $y \in R$ zodanig dat $f(y) = 1$. Nu volgt wederom uit de axioma's van de vlakke ternaire ring:

$$1 = f(y) = f(T(y, 1, 0)) = T'(f(y), f(1), f(0)) = T'(1, f(1), 0) = f(1),$$

en hiermee is de stelling bewezen. \square

Het is nu eenvoudig in te zien dat we isomorfismen ook als isotopismen kunnen opvatten: als f een isomorfisme is dan is (f, f, f) een isotopisme.

Zoals we net gezien hebben bestaan er ook isomorfismen tussen projectieve vlakken. We kunnen ons afvragen in hoeverre deze isomorfismen samenhangen met de isotopismen en isomorfismen van vlakke ternaire ringen. We noteren de verzameling van isotopismen van (R, T) naar (R', T') als $\text{Isot}((R, T), (R', T'))$, en de isomorfismenverzameling met $\text{Isom}((R, T), (R', T'))$.

Stelling 3.3.5. *Zijn $(\mathbb{P}, OIXY)$ en $(\mathbb{P}', O'I'X'Y')$ twee 4-gepunte vlakken met bijbehorende vlakke ternaire ringen (R, T) en (R', T') , dan bestaat er een natuurlijke afbeelding*

$$\text{Isot}((R, T), (R', T')) \longrightarrow \text{Isom}((\mathbb{P}, OXY), (\mathbb{P}', O'X'Y'))$$

en deze afbeelding is een bijectie.

Bewijs. Zij $(f, g, h) \in \text{Isot}((R, T), (R', T'))$ een isotopisme. We definiëren een afbeelding π van de punten van \mathbb{P} naar de punten van \mathbb{P}' als volgt:

$$\begin{aligned} \pi((x, y)) &= (f(x), h(y)) \\ \pi((m)) &= (g(m)) \\ \pi((\infty)) &= (\infty) \end{aligned}$$

en definieer een lijnenafbeelding λ als:

$$\begin{aligned} \lambda([m, b]) &= [g(m), h(b)] \\ \lambda([a]) &= [f(a)] \\ \lambda([\infty]) &= [\infty] \end{aligned}$$

Dat π precies de punten van $[\infty]$ naar $\lambda([\infty]) = [\infty]$ stuurt is duidelijk. Ook is goed te zien dat de lijnen door (∞) naar lijnen door (∞) worden gestuurd. We hebben:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in [m, b] &\iff y = T(x, m, b) \\
&\iff h(y) = h(T(x, m, b)) = T'(f(x), g(m), h(b)) \\
&\iff (f(x), h(y)) \in [g(m), h(b)] \\
&\iff \pi((x, y)) \in \lambda([m, b]).
\end{aligned}$$

Verder geldt

$$\begin{aligned}
(m) \in [a, b] &\iff m = a \iff g(m) = g(a) \iff (g(m)) \in [g(a), h(b)] \\
&\iff \pi((m)) \in \lambda([a, b]);
\end{aligned}$$

en we hebben

$$\begin{aligned}
(x, y) \in [a] &\iff x = a \iff f(x) = f(a) \iff (f(x), h(y)) \in [f(a)] \\
&\iff \pi((x, y)) \in \lambda([a]).
\end{aligned}$$

Tenslotte geldt

$$(m) \notin [a] \quad \text{en} \quad \pi((m)) = (g(m)) \notin [f(a)]\lambda([a]);$$

en dus volgt inderdaad dat (π, λ) een isomorfisme is dat O , X , en Y naar respectievelijk O' , X' , en Y' stuurt. We hebben dus een afbeelding gevonden die een isotopisme van vlakke ternaire ringen naar een isomorfisme van de onderliggende gepunte vlakken stuurt. We willen nu nog bewijzen dat deze afbeelding een bijectie is; hiervoor zullen we een inverse geven.

Veronderstel nu dat we een isomorfisme $\pi : (\mathbb{P}, OXY) \rightarrow (\mathbb{P}', O'X'Y')$ hebben. We definiëren een bijectie $f : R \rightarrow R'$, als volgt: π stuurt O naar O' en X naar X' , en dus de lijn OX naar de lijn $O'X'$. π geeft dus een bijectie tussen de punten op OX buiten X en de punten op $O'X'$ buiten X' . We nemen nu f zodanig dat voor alle $x \in R$ geldt: $(f(x), 0) = \pi((x, 0))$. Merk op: uit $\pi(O) = O'$ volgt nu $f(0) = 0$.

Op analoge wijze induceert π een bijectie tussen de punten op OY buiten Y en de punten op $O'Y'$ buiten Y' , en dus vinden we een bijectie $h : R \rightarrow R'$ gegeven door $(0, h(y)) = \pi((0, y))$. Er volgt $h(0) = 0$.

Een derde bijectie g vinden we door op te merken dat XY naar $X'Y'$ gestuurd wordt; we nemen nu $g : R \rightarrow R'$ gegeven door $(g(m)) = \pi((m))$. Merk op: ook hier geldt $g(0) = 0$.

Lijn $[a] = (a, 0)(\infty)$ wordt door π naar $(f(a), 0)(\infty) = [f(a)]$ gestuurd. Lijn $[m, b] = (0, b)(m)$ gaat naar $(0, h(b))(g(m)) = [g(m), h(b)]$. We vinden nu dat een punt $(x, y) = [x] \cap [0, y]$ naar het punt $[f(x)] \cap [g(0), h(y)] = [f(x)] \cap [0, h(y)] = (f(x), h(y))$. Nu vinden we het volgende:

$$\begin{aligned}
y = T(x, m, b) &\iff (x, y) \in [m, b] \\
&\iff \pi((x, y)) \in \pi([m, b]) \\
&\iff (f(x), h(y)) \in [g(m), h(b)] \\
&\iff h(y) = T'(f(x), g(m), h(b))
\end{aligned}$$

en dus volgt $h(T(x, m, b)) = T'(f(x), g(m), h(b))$, en dus is (f, g, h) een isotopisme van (R, T) naar (R', T') .

We zien dat we een inverse van onze afbeelding gevonden hebben en dus volgt inderdaad dat hier sprake is van een bijectie. \square

Gevolg 3.3.6. *Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ en $(\mathbb{P}', O'I'X'Y')$ twee 4-gepunte vlakken met bijbehorende vlakke ternaire ringen (R, T) en (R', T') . Dan bestaat er een natuurlijke afbeelding*

$$\text{Isom}((R, T), (R', T')) \longrightarrow \text{Isom}((\mathbb{P}, OIXY), (\mathbb{P}', O'I'X'Y'))$$

en deze afbeelding is een bijectie.

Bewijs. Zij $f : (R, T) \rightarrow (R', T')$ een isomorfisme. Dan is (f, f, f) een isotopisme, en induceert dus volgens stelling 3.3.5 een isomorfisme π van \mathbb{P} naar \mathbb{P}' dat O, X, Y naar O', X', Y' stuurt. Het punt $I = (1, 1)$ in \mathbb{P} wordt naar $(f(1), f(1))$ gestuurd, en omdat f een isomorfisme is volgt $f(1) = 1$ en dus volgt $\pi((1, 1)) = (1, 1) = I'$, en dus is π een isomorfisme $(\mathbb{P}, OIXY) \rightarrow (\mathbb{P}', O'I'X'Y')$.

Andersom: zij $\pi : (\mathbb{P}, OIXY) \rightarrow (\mathbb{P}', O'I'X'Y')$ een isomorfisme. Neem nu (f, g, h) het corresponderende isotopisme. Omdat π de lijn OI naar $O'I'$ stuurt, en een punt (a, a) voor $a \in R$ naar $(f(a), h(a))$ stuurt, volgt dat $(f(a), h(a))$ op $O'I'$ ligt en dus volgt $f(a) = h(a)$ en daarmee $f = h$. Bovendien volgt voor alle $a \in R$:

$$\begin{aligned} (1, g(a)) &= [g(a), 0] \cap [1] = [g(a), 0] \cap I'Y' = \pi([a, 0]) \cap \pi(iy) \\ &= \pi([a, 0] \cap iy) = \pi([a, 0] \cap [1]) = \pi((1, a)) = (f(1), h(a)) \end{aligned}$$

en dus vinden we $g(a) = h(a)$ en daarmee $f = g = h$, en dus is f een isomorfisme. \square

We kunnen de vorige stellingen ook vanuit categorisch perspectief bekijken. Zij \mathbf{PP}_4 de categorie van 4-gepunte projectieve vlakken, met als morfismen de isomorfismen tussen 4-gepunte vlakken, en zij $\mathbf{PTR}_{\text{isom}}$ de categorie van vlakke ternaire ringen, met als morfismen de isomorfismen. Dan volgt uit de vorige stelling dat \mathbf{PP}_4 en $\mathbf{PTR}_{\text{isom}}$ equivalente categorieën zijn.

4 Centrale collineaties en VTR-eigenschappen

Zoals we al eerder gezien hebben, kunnen we gegeven een delingsring of lichaam een projectief vlak maken. Andersom kan ook: de vlakke ternaire ring bij een projectief vlak blijkt veel te zeggen over de eigenschappen die een projectief vlak bezit. In dit hoofdstuk zullen we kijken wat de correspondentie is tussen eigenschappen van het projectieve vlak en eigenschappen van de bijbehorende vlakke ternaire ring.

4.1 Lineariteit

Zoals we in voorbeeld 3.1.2 hebben gezien is het mogelijk om van een delingsring, uitgerust met een optelling $+$ en vermenigvuldiging \cdot , een vlakke ternaire ring te maken. Het omgekeerde is ook waar: gegeven een vlakke ternaire ring kunnen we een ‘optelling’ en ‘vermenigvuldiging’ definiëren.

Definitie 4.1.1. Zij (R, T) een vlakke ternaire ring. Voor $a, b \in R$ definiëren we $a \cdot b = ab = T(a, b, 0)$ en $a + b = T(a, 1, b)$.

Merk op dat we hier bij een delingsring de originele optelling en vermenigvuldiging weer terugkrijgen. We noemen een vlakke ternaire ring (R, T) dan ook een *delingsring* (of lichaam, ...) wanneer $(R, +, \cdot)$ een delingsring (of lichaam, ...) is.

Definitie 4.1.2. We noemen een vlakke ternaire ring (R, T) *lineair* als geldt

$$a \cdot b + c = T(a, b, c)$$

voor alle $a, b, c \in R$.

Ofwel: (R, T) is lineair als geldt $T(T(a, b, 0), 1, c) = T(a, b, c)$ voor alle $a, b, c \in R$.

Voorbeeld 4.1.3. In voorbeeld 3.1.2 hebben we gezien dat een delingsring op natuurlijke wijze voorzien kan worden van de structuur van een vlakke ternaire ring. Deze vlakke ternaire ring is lineair.

Definitie 4.1.4. Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt projectief vlak met bijbehorende vlakke ternaire ring (R, T) . Stel dat dit vlak Y - ℓ_∞ -transitief is. Dan definiëren we voor $s \in R$ de *optel-afbeelding* σ_s als de Y - ℓ_∞ -collineatie die $(0, 0)$ naar $(0, b)$ stuurt.

Propositie 4.1.5. De optel-afbeelding σ_s werkt als volgt op de punten en lijnen in het vlak:

$$\begin{array}{ll} (x, y) \mapsto (x + s, y) & [m, b] \mapsto [m, b + s] \\ (m) \mapsto (m) & [a] \mapsto [a] \\ (\infty) \mapsto (\infty) & [\infty] \mapsto [\infty] \end{array}$$

Bewijs. Omdat ℓ_∞ de as is van σ_s , volgt dat σ_s de punten (m) en (∞) invariant laat. Het centrum van σ_s is Y , en dus laat σ_s alle verticale lijnen $[a]$ en $[\infty]$ op hun plek.

De lijnen $[m, 0] = (0, 0)(m)$ worden door π_s naar $(0, s)(m) = [m, s]$ gestuurd. Voor $a \in R$ wordt het snijpunt (a, a) van $[1, 0] \cap [a]$ dus naar $[1, s] \cap [a] =$

$(a, T(a, 1, s)) = (a, a + s)$ gestuurd. Een willekeurig punt (x, y) is het snijpunt van de lijnen $(y, y)(0)$ en $[x]$ en wordt door σ_s dus naar $(y, y + s)(0) \cap [x] = (x, y + s)$ gestuurd. Ten slotte volgt hieruit dat de lijn $[m, b] = (0, b)(m)$ door σ_s naar $(0, b + s)(m) = [m, b + s]$ wordt gestuurd. \square

Zoals we aan het begin van hoofdstuk 2.4 al opmerkten is er een samenhang tussen de eigenschappen van de vlakke ternaire ring bij een projectief vlak en de transitiviteit van de centrale automorfismengroep van dit vlak. Het eerste resultaat volgt nu.

Stelling 4.1.6 ([4, 20.4.5]). *Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt projectief vlak met bijbehorende vlakke ternaire ring (R, T) . Dit vlak is $Y\text{-}\ell_\infty\text{-transitief}$ dan en slechts dan als (R, T) lineair is en $(R, +)$ een groep is.*

Indien \mathbb{P} aan een van deze equivalente eigenschappen voldoet, dan bestaat er een natuurlijk groepsisomorfisme $(R, +) \longrightarrow \text{Aut}_{Y, \ell_\infty}(\mathbb{P})$.

Bewijs. (\implies) Veronderstel dat $(\mathbb{P}, OIXY)$ $Y\text{-}\ell_\infty\text{-transitief}$ is. Zij $a, m, b \in R$. Beschouw de optel-afbeelding σ_b . Deze stuurt het punt (a, am) zoals we in propositie 4.1.5 zagen naar $(a, am + b)$. Het punt $(a, am) = (a, T(a, m, 0))$ ligt ook op de lijn $[m, 0]$. Deze lijn wordt door σ_b naar $[m, b]$ gestuurd; en dus zien we dat $\sigma_b(a, am) = (a, am + b)$ op de lijn $\sigma_b[m, 0] = [m, b]$ ligt. Er volgt dus dat $am + b = T(a, m, b)$; en dus is (R, T) lineair.

We gaan nu de groepsaxioma's na. Het bestaan van een additief eenheidselement volgt direct uit 3.1.4. Om associativiteit van de optelling aan te tonen bekijken we voor $a, b, c \in R$ de optel-afbeeldingen σ_b , σ_c en σ_{b+c} . $\sigma_c\sigma_b$ is als samenstelling van twee $Y\text{-}\ell_\infty\text{-collineaties}$ zelf weer een $Y\text{-}\ell_\infty\text{-collineatie}$. Er geldt:

$$\sigma_c\sigma_b(0, 0) = \sigma_c(0, b) = (0, b + c) = \sigma_{b+c}(0, 0)$$

en omdat een centrale collineatie uniek bepaald wordt door zijn werking op een punt buiten zijn centrum en as, volgt $\sigma_c\sigma_b = \sigma_{b+c}$. Nu volgt ook:

$$(0, a + (b + c)) = \sigma_{b+c}(0, a) = \sigma_c\sigma_b(0, a) = \sigma_c(0, a + b) = (0, (a + b) + c)$$

en dus volgt $a + (b + c) = (a + b) + c$; hiermee is associativiteit van de optelling aangetoond.

Het bestaan van additieve inversen volgt uit 3.1.4 en het feit dat optelling associatief is: een element $a \in R$ heeft een rechtsinverse a' en een linksinverse a'' , en dus volgt:

$$a'' = a'' + 0 = a'' + (a + a') = (a'' + a) + a' = 0 + a' = a'$$

en dus is $a' = a''$ de additieve inverse van a . We zien dat aan alle groepsaxioma's is voldaan en dus is $(R, +)$ een groep.

(\impliedby) Wegens 2.4.4 is het voldoende om aan te tonen dat er voor iedere $t \in R$ een $Y\text{-}\ell_\infty\text{-collineatie}$ bestaat die $(0, 0)$ naar $(0, t)$ stuurt. Zij dus $t \in R$. Nu definiëren we (π, λ) als volgt:

$$\begin{array}{ll} \pi((x, y)) &= (x, y + t) & \lambda([m, b]) &= [m, b + t] \\ \pi((m)) &= (m) & \lambda([a]) &= [a] \\ \pi((\infty)) &= (\infty) & \lambda([\infty]) &= [\infty]. \end{array}$$

We kunnen het feit dat $(R, +)$ een groep is gebruiken om te verifiëren dat (π, λ) een automorfisme is. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} (x, y) \in [m, b] &\iff y = xm + b \\ &\iff y + t = xm + b + t \\ &\iff \pi((x, y)) = (x, y + t) \in [m, b + t] = \lambda([m, b]). \end{aligned}$$

Uit het voorschrift is duidelijk dat (π, λ) de punten op ℓ_∞ en de lijnen door $Y = (\infty)$ op hun plek laat, en dus is (π, λ) een Y - ℓ_∞ -collineatie. Bovendien geldt: $\pi((0, 0)) = (0, t)$, en dus hebben we onze gezochte collineatie te pakken. We kunnen concluderen dat ons vlak Y - ℓ_∞ -transitief is.

Voor het tweede deel van het bewijs bekijken we de afbeelding $\Phi : R \rightarrow \text{Aut}_{Y, \ell_\infty}$ gegeven door $a \mapsto \sigma_a$, waar we met σ_a de optel-afbeeldingen aangeven. Deze afbeelding is duidelijk injectief. Surjectiviteit volgt uit 2.3.10. Omdat geldt $\sigma_c \sigma_b = \sigma_{b+c}$ volgt dat Φ een groepshomomorfisme is. We zien dus dat Φ een groepsisomorfisme is. \square

In het geval dat ons vlak lineair is, kunnen we de lijnen op een inzichtelijker manier schrijven: we schrijven dan $[y = xm + b]$ in plaats van $[m, b]$, en $[x = a]$ in plaats van $[a]$.

In het begin van deze scriptie hebben we kort gekeken naar de ordes van eindige projectieve vlakken. Vermoed wordt dat de orde van ieder projectief vlak een priemmacht is. Met behulp van de voorgaande stelling kunnen we dit vermoeden bewijzen voor een bepaalde klasse projectieve vlakken.

Stelling 4.1.7. *Zij \mathbb{P} een eindig projectief vlak. Als er een tweetal verschillende punten q, r in dit vlak bestaat zodanig dat geldt:*

- \mathbb{P} is q - qr -transitief;
- de collineatiegroep $\text{Aut}_{r, qr}(\mathbb{P})$ is niet de triviale groep;

dan is de orde van \mathbb{P} een priemmacht.

Bewijs. We kiezen een vierhoek $OIXY$ in het vlak zodanig dat $q = Y$ en $qr = \ell_\infty$. Nu is $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt vlak, met een bijbehorende vlakke ternaire ring (R, T) . Uit 4.1.6 volgt dat (R, T) lineair is en dat $(R, +)$ en $\text{Aut}_{Y, \ell_\infty}$ isomorfe groepen zijn. Uit 2.3.14 volgt dat deze groepen abels zijn, en dat er een priemgetal p bestaat zodanig dat ieder element behalve de identiteit orde p heeft. Uit de stelling van Cauchy volgt nu dat de orde van deze groepen een macht van p is. Omdat de orde van \mathbb{P} gelijk is aan het aantal elementen van R is hiermee de stelling bewezen. \square

4.2 Quasilichamen

We gaan verder met onze classificatie van projectieve vlakken en hun bijbehorende vlakke ternaire ringen. We kijken nu naar projectieve vlakken waarvan de vlakke ternaire ringen quasilichamen zijn.

Definitie 4.2.1. Een *rechts-quasilichaam* $(Q, +, \cdot)$ is een niet-lege verzameling Q met twee verschillende elementen $0, 1 \in Q$, met een optelling $+$ en een vermenigvuldiging \cdot , zodanig dat geldt:

Q1 $(Q, +)$ is een groep met eenheidselement 0;

Q2 $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$ is een lus met eenheidselement 1;

Q3 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ voor alle $a, b, c \in Q$;

Q4 $x \cdot a = x \cdot b + c$ heeft voor alle $a, b, c \in Q$ met $a \neq b$ één unieke oplossing $x \in Q$.

Propositie 4.2.2. *Zij $(Q, +, \cdot)$ een rechts-quasilichaam. Dan is (Q, T) , waarbij $T : Q^3 \rightarrow Q$ gegeven wordt door $T(a, b, c) = a \cdot b + c$, een vlakke ternaire ring.*

Het bewijs van deze propositie is triviaal, op een klein punt na: het feit dat $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ is niet direct duidelijk uit de axioma's van het rechts-quasilichaam.

Bewijs. Voor alle $a \in Q$ geldt: $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ en dus volgt $0 \cdot a = 0$.

Zij $a \in Q$. Als $a = 0$ dan volgt $a \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$. Als $a \neq 0$: stel dat $a \cdot 0 \neq 0$. Dan zitten zowel a als $a \cdot 0$ in de lus $Q \setminus \{0\}$, en dus bestaat er een $b \in Q \setminus \{0\}$ zodanig dat $a \cdot b = a \cdot 0$, en dus is $a \neq 0$ een oplossing van de vergelijking $x \cdot b = x \cdot 0$. Maar ook 0 is een oplossing van deze vergelijking, en dus vinden we een tegenspraak met Q4.

De rest van het bewijs is triviaal. \square

We zien dus dat we van een rechts-quasilichaam Q een vlakke ternaire ring en daarmee een gepunt projectief vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ kunnen definiëren. Dit projectieve vlak zullen we voortaan noteren als $\mathbb{P}(Q)$.

Stelling 4.2.3 ([4, 20.4.6]). *Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt projectief vlak met de eigenschap dat de bijbehorende vlakke ternaire ring (R, T) lineair is en dat $(R, +)$ een groep is. Dan is het vlak X - ℓ_∞ -transitief dan en slechts dan als voor alle $a, b, c \in R$ geldt: $(a + b)c = ac + bc$.*

Bewijs. Uit stelling 4.1.6 volgt dat het vlak Y - ℓ_∞ -transitief is.

(\implies) Zij $b \in R$. Omdat ons vlak X - ℓ_∞ -transitief is, volgt dat er een afbeelding $\pi_b \in \text{Aut}_{X, \ell_\infty}$ bestaat met $\pi_b((0, 0)) = (b, 0)$. De lijn $[y = x] = (0, 0)(1)$ wordt onder π_b naar de lijn $[y = x - b] = (b, 0)(1)$ gestuurd, en de horizontale lijnen $[y = c]$ worden op hun plek gehouden. Een punt $(u, u) = [y = u] \cap [y = x]$ wordt dus naar $[y = u] \cap [y = x - b] = (u + b, u)$ gestuurd. Nu weten we ook wat er met de lijnen $[x = a] = (a, a)Y$ gebeurt: die worden naar $(a + b, a)Y = [x = a + b]$ gestuurd. Een willekeurig punt $(u, v) = [x = u] \cap [y = v]$ wordt dus door π_b naar $[x = u + b] \cap [y = v] = (u + b, v)$ gestuurd. Bekijk de lijn $[y = x \cdot c] = (0, 0)(c)$. Deze lijn wordt door π_b naar $(b, 0)(c) = [y = x \cdot c - b \cdot c]$ gestuurd. Het punt $(a, a \cdot c)$ ligt op $[y = x \cdot c]$ en dus ligt $\pi_b((a, a \cdot c)) = (a + b, a \cdot c)$ op $[y = x \cdot c - b \cdot c]$, en dus volgt $a \cdot c = (a + b) \cdot c - b \cdot c$, ofwel: $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$.

(\impliedby) Wegens 2.4.4 is het voldoende om te bewijzen dat er voor iedere $r \in R$ een X - ℓ_∞ -collineatie bestaat die $(0, 0)$ naar $(r, 0)$ stuurt. Zij dus $r \in R$. Claim: de afbeelding π_r die als volgt op punten en lijnen werkt is een automorfisme:

$$\begin{array}{ll} (u, v) & \mapsto (u + r, v) & [m, b] & \mapsto [m, b - r \cdot m] \\ (m) & \mapsto (m) & [a] & \mapsto [a + r] \\ (\infty) & \mapsto (\infty) & [\infty] & \mapsto [\infty] \end{array}$$

Ten eerste werkt π_r bijectief op de punten en lijnen: dit volgt uit het feit dat optelling een groepsstructuur heeft. We hebben

$$\begin{aligned}
\pi_r((u, v)) \in \pi_r([m, b]) &\iff (u + r, v) \in [m, b - r \cdot m] \\
&\iff v = (u + r)m + (b - r \cdot m) \\
&\iff v = um + rm + b - rm \\
&\iff v = um + b \\
&\iff (u, v) \in [m, b].
\end{aligned}$$

Het is eenvoudig te controleren dat π_r ook de overige incidenties intact laat, en dus is π_r een automorfisme. Bovendien laat π_r de lijnen $[0, b]$ door X en de punten op ℓ_∞ op hun plek, en dus is π_r een X - ℓ_∞ -collineatie. Tenslotte volgt $\pi_r((0, 0)) = (r, 0)$, en dus hebben we onze gezochte collineatie te pakken, en dus volgt dat ons vlak X - ℓ_∞ -transitief is. \square

We vinden nu het volgende:

Gevolg 4.2.4. *Een gepunt vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ is een translatievlak ten opzichte van ℓ_∞ dan en slechts dan als de bijbehorende vlakke ternaire ring (R, T) een rechts-quasilichaam is; ofwel:*

1. $T(a, b, c) = ab + c$;
2. $(R, +)$ is een groep met eenheidselement 0;
3. $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ is een lus met eenheidselement 1;
4. $(a + b)c = ac + bc$;
5. $xa = xb + c$ heeft een unieke oplossing $x \in R$ als $a \neq b$.

Bewijs. Uit stelling 2.4.7 volgt: \mathbb{P} is een translatievlak ten opzichte van ℓ_∞ dan en slechts dan als \mathbb{P} zowel Y - ℓ_∞ -transitief als X - ℓ_∞ -transitief is.

Als \mathbb{P} een translatievlak is, dan volgen (1), (2) en (4) uit stellingen 4.1.6 en 4.2.3. (3) volgt uit 3.1.4 en (5) volgt direct uit de axioma's van de vlakke ternaire ring. Als andersom (1) t/m (5) gelden dan volgt uit stellingen 4.1.6 en 4.2.3 dat \mathbb{P} een translatievlak ten opzichte van ℓ_∞ is. \square

We kunnen 4.2.4 gebruiken om op een leuke manier de volgende stelling te bewijzen:

Stelling 4.2.5. *De optelgroep $(R, +)$ in een (rechts-)quasilichaam $(R, +, \cdot)$ is abels, en de karakteristiek van $(R, +, \cdot)$ is een priemgetal of 0.*

Bewijs. We definiëren een ternaire operator T op R als volgt: $T(a, b, c) = a \cdot b + c$. Nu is (R, T) een vlakke ternaire ring, en dus kunnen we hiermee een projectief vlak \mathbb{P} maken. Uit 4.2.4 volgt dat dit vlak zowel X - ℓ_∞ - als Y - ℓ_∞ -transitief is, en dus volgt uit 2.3.14 dat de ℓ_∞ -elaties commuteren en behalve de identiteit allemaal dezelfde orde hebben: een priem of oneindig. In het bijzonder commuteren de optel-afbeeldingen $\pi_b \in \text{Aut}_{Y, \ell_\infty}(\mathbb{P})$, en dus volgt dat optelling commutatief is. Bovendien is de orde van de optelafbeelding π_1 een priemgetal of oneindig, en dus is de karakteristiek van $(R, +, \cdot)$ een priemgetal of 0. \square

Zojuist hebben we kennis gemaakt met de rechts-quasilichamen. Zoals de naamgeving al doet vermoeden, bestaan er ook links-quasilichamen.

Definitie 4.2.6. Een *links-quasilichaam* $(Q, +, \cdot)$ is een niet-lege verzameling Q met twee verschillende elementen $0, 1 \in Q$, met een optelling $+$ en een vermenigvuldiging \cdot , zodanig dat geldt:

- $(Q, +)$ is een groep met eenheidselement 0 ;
- $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$ is een lus;
- $a \cdot (b + c) = ab + ac$ voor alle $a, b, c \in Q$;
- $a \cdot x = b \cdot x + c$ heeft voor alle $a, b, c \in Q$ met $a \neq b$ één unieke oplossing $x \in Q$.

Net zoals er sprake is van dualiteit bij projectieve vlakken, zo is er ook sprake van dualiteit bij quasilichamen.

Propositie 4.2.7. Zij $(Q, +, \cdot)$ een links- (resp. rechts-) quasilichaam. Dan is $(Q, +, *)$, waarbij $a * b := b \cdot a$, een rechts- (resp. links-) quasilichaam. \square

We noemen $(Q, +, *)$ het *duale* quasilichaam van $(Q, +, \cdot)$, en noteren dit met Q^d . Ook van links-quasilichamen kunnen we vlakke ternaire ringen (en daarmee dus projectieve vlakken) maken.

Propositie 4.2.8. Zij $(Q, +, \cdot)$ een links-quasilichaam. Dan is (Q, T) , waarbij $T : Q^3 \rightarrow Q$ gegeven wordt door $T(a, b, c) = a \cdot b + c$, een vlakke ternaire ring. \square

Het projectieve vlak dat we verkrijgen door van een links-quasilichaam Q een vlakke ternaire ring te maken en hiermee een vlak te definiëren, noteren we, analoog aan het geval van het rechts-quasilichaam, met $\mathbb{P}(Q)$.

We hebben nu gezien dat we van rechts- en van links-quasilichamen projectieve vlakken kunnen maken, en dat we dualiteit tussen rechts- en links-quasivlakken hebben. We kunnen ons dus afvragen of deze dualiteit iets te maken heeft met de dualiteit zoals we die kennen bij de projectieve vlakken. Dit blijkt inderdaad het geval.

Stelling 4.2.9. Zij Q een rechts-quasilichaam. Beschouw de afbeelding $\pi : (\mathbb{P}(Q))^d \rightarrow \mathbb{P}(Q^d)$, die als volgt op de punten van $(\mathbb{P}(Q))^d$ (ofwel: de lijnen van $\mathbb{P}(Q)$) werkt:

$$\begin{aligned} [m, b] &\mapsto (m, -b) \\ [a] &\mapsto (a) \\ [\infty] &\mapsto (\infty) \end{aligned}$$

en als volgt op de lijnen van $(\mathbb{P}(Q))^d$ (ofwel: de punten van $\mathbb{P}(Q)$) werkt:

$$\begin{aligned} (a, b) &\mapsto [a, -b] \\ (m) &\mapsto [m] \\ (\infty) &\mapsto [\infty] \end{aligned}$$

Deze afbeelding is een isomorfisme $(\mathbb{P}(Q))^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(Q^d)$. \square

Met behulp van dit isomorfisme vinden we nu het volgende:

Gevolg 4.2.10. Een vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ is een Y -translatievlak dan en slechts dan als de bijbehorende VTR een links-quasilichaam is. \square

4.3 Bijna-lichamen en halflichamen

In de vorige paragraaf hebben we gekeken naar projectieve vlakken uit quasilichamen. We hebben gezien dat bepaalde transitiviteiten in het vlak ervoor zorgen dat de vlakke ternaire ring bij dit vlak een quasilichaam is. In dit hoofdstuk zullen we dit nog verder uitwerken, en zullen we kijken naar bijna- en halflichamen.

Definitie 4.3.1. Een rechts- (resp. links-) *bijna-lichaam* (Engels: nearfield) is een rechts- (resp. links-)quasilichaam $(R, +, \cdot)$ zodanig dat geldt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ voor alle $a, b, c \in R$.

Merk op: in een bijna-lichaam is $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ een groep.

Stelling 4.3.2 ([4, 20.5.4]). *Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt ℓ_∞ -translatievlak (ofwel: de bijbehorende VTR (R, T) is een rechts-quasilichaam). Dan is \mathbb{P} X - OY -transitief dan en slechts dan als (R, T) een rechts-bijna-lichaam is.*

Bewijs. (\implies) Voor $m \neq 0$ definiëren we de *vermenigvuldigingscollineatie* μ_m als de X - OY -collineatie die het punt (m) naar (1) stuurt. We zoeken uit wat μ_m met een punt (u, v) doet. De lijn $[y = xm] = (0, 0)(m)$ wordt dus gestuurd naar $(0, 0)(1) = [y = x]$. Horizontale lijnen gaan door centrum X en blijven dus op hun plek, en dus wordt het punt $(u, um) = [y = xm] \cap [y = um]$ naar $[y = x] \cap [y = um] = (um, um)$ gestuurd. De verticale lijn $[x = u] = (u, um)Y$ wordt dus naar $(um, um)Y = [x = um]$ gestuurd, en dus kunnen we concluderen dat een punt $(u, v) = [x = u] \cap [y = v]$ naar het punt $[x = um] \cap [y = v] = (um, v)$ gestuurd wordt.

Zij $a, b, c \in R$ gegeven. Als b of c gelijk is aan 0, dan volgt direct $(ab)c = 0 = a(bc)$. Stel dus dat $b, c \neq 0$. Dan geldt:

$$\mu_{bc}((1, 1)) = (bc, 1) = \mu_c((b, 1)) = \mu_c \mu_b((1, 1))$$

en dus volgt uit 2.3.10 dat $\mu_{bc} = \mu_c \mu_b$, en dus volgt:

$$(a(bc), 1) = \mu_{bc}((a, 1)) = \mu_c \mu_b((a, 1)) = \mu_c((ab, 1)) = ((ab)c, 1)$$

en dus hebben we de associatieve wet $a(bc) = (ab)c$. We zien dus dat (R, T) een rechts-bijna-lichaam is.

(\impliedby) Zij (c) een punt op OX , buiten O en Y . We hebben dus $c \neq 0$. We zoeken een X - OY -collineatie π met $\pi((c)) = (1)$. Bekijk de afbeelding π die als volgt op de punten en lijnen werkt:

$$\begin{array}{ll} (u, v) \mapsto (uc, v) & [m, b] \mapsto [c^{-1}m, b] \\ (m) \mapsto (c^{-1}m) & [a] \mapsto [ac] \\ (\infty) \mapsto (\infty) & [\infty] \mapsto [\infty]. \end{array}$$

Een simpele gevalsonderscheiding leert ons dat dit inderdaad een automorfisme is. Bovendien laat π de punten op OY en de lijnen door X invariant, en dus is het een X - OY -collineatie. We hebben: $\pi((c)) = (c^{-1}c) = (1)$ en dus is π de gezochte X - OY -collineatie. Nu volgt uit 2.4.4 dat ons vlak X - OY -transitief is. \square

Zoals we al bij quasilichamen hebben gedaan, kunnen we ook bijna-lichamen dualiseren. De duale van stelling 4.3.2 wordt nu:

Stelling 4.3.3. Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt vlak dat een Y -translatievlak is (ofwel: de bijbehorende VTR (R, T) is een links-quasilichaam). Dan is \mathbb{P} X - OY -transitief dan en slechts dan als (R, T) een links-bijna-lichaam is. \square

Definitie 4.3.4. Een *halflichaam* $(R, +, \cdot)$ is een verzameling R met een optelling $+$ en een vermenigvuldiging \cdot , en met twee verschillende elementen $0, 1 \in R$, zodanig dat geldt:

- $(R, +)$ is een groep met identiteit 0 ;
- $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ is een lus met identiteit 1 ;
- voor alle $a, b, c \in R$ geldt $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ en $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

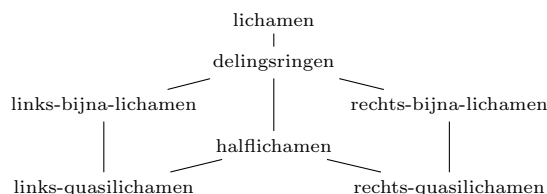
Merk op dat een halflichaam precies hetzelfde is als een ‘rechts-én-links-quasilichaam’. We vinden dus het volgende:

Stelling 4.3.5. Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt projectief vlak met bijbehorende VTR (R, T) . Dan is (R, T) een halflichaam dan en slechts dan als \mathbb{P} zowel X - ℓ_∞ -, Y - ℓ_∞ -, als Y - OY -transitief is.

Bewijs. Uit 2.4.7 volgt: \mathbb{P} is een ℓ_∞ -translatievlak dan en slechts dan als \mathbb{P} zowel X - ℓ_∞ - als Y - ℓ_∞ -transitief is, en \mathbb{P} is een Y -translatievlak dan en slechts dan als \mathbb{P} zowel Y - ℓ_∞ - als Y - OY -transitief is. De rest van het bewijs volgt nu uit 4.2.4 en 4.2.10. \square

4.4 Moufangvlakken en alternatieffichamen

Een structuur $(R, +, \cdot)$ die zowel een links- als een rechts-bijna-lichaam is, is een delingsring, en delingsringen zijn halflichamen. We hebben tot nu toe dus de volgende ‘toren’ binnen onze classificatie van de projectieve vlakken:



Voordat we echter gaan kijken naar vlakken die als VTR een delingsring of zelfs een lichaam hebben, gaan we eerst kijken naar een klasse die tussen de halflichamen en delingsringen zit: de alternatieffichamen.

Definitie 4.4.1. Een *alternatieffichamen* is een halflichaam R met de alternerende wet: $a(ab) = (aa)b$ en $(ab)b = a(bb)$ voor alle $a, b \in R$.

We definiëren de *associator* als $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ voor $a, b, c \in R$. Merk op dat de associator overal 0 is dan en slechts dan de associatieve wet geldt. De alternerende wet is equivalent met $[a, b, b] = 0$ en $[a, a, b] = 0$ voor alle $a, b \in R$. Merk op dat de distributieve eigenschappen impliceren dat de associator additief is in alle argumenten. Nu volgt:

$$0 = [a, b + c, b + c] = [a, b, b] + [a, b, c] + [a, c, b] + [a, c, c] = [a, b, c] + [a, c, b]$$

en dus volgt $[a, c, b] = -[a, b, c]$. Op analoge wijze volgt $[b, a, c] = -[a, b, c]$, en hieruit volgt ook $[c, b, a] = -[a, b, c]$, en dus volgt $[a, b, a] = 0$, ofwel: $(ab)a = a(ba)$ voor alle $a, b \in R$. We zien dat hiermee ook de naamgeving voor de alternerende wet valt te verklaren: het wisselen van twee argumenten in de associator zorgt voor een tekenwisseling.

Definitie 4.4.2. Een lus G voldoet aan de *rechts-inverse-eigenschap* als er voor iedere $x \in G$ een $x^r \in G$ bestaat met $(yx)x^r = y$ voor alle $y \in G$. Analoog: G voldoet aan de *links-inverse-eigenschap* als er voor iedere $x \in G$ een $x^l \in G$ bestaat met $x^l(xy) = y$ voor alle $y \in G$. G voldoet aan de *inverse-eigenschap* als G aan zowel de links- als aan de rechts-inverse-eigenschap voldoet.

Als G aan de rechts-inverse-eigenschap voldoet, dan geldt $(x^r x)x^r = x^r$ en dus volgt $x^r x = 1$. Nu volgt dat $(x^r)^r = x$. Analoog geldt: $(x^l)^l = x$.

Als G aan de inverse-eigenschap voldoet, dan geldt voor alle $x \in G$:

$$x^l = (x^l x)x^r = (x^l(x \cdot 1))x^r = 1 \cdot x^r = x^r$$

en dus zijn de linker- en rechterinverses gelijk. We noteren deze inverse met x^{-1} .

We zeggen dat een vlakke ternaire ring (R, T) aan de rechts- en/of links-inverse-eigenschap voldoet als de lus $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ dat doet.

Lemma 4.4.3 ([5, 6.13]). *Zij R een halfichaam met rechts-inverse-eigenschap. Dan geldt voor alle $x, y \in R$: $(xy)y = x(yy)$.*

Bewijs. Voor $y \neq 0, -1$ hebben we:

$$\begin{aligned} (yy + y)(y^r - (y + 1)^r) &= (yy)y^r + yy^r - (yy + y)(y + 1)^r \\ &= y + 1 - (y(y + 1))(y + 1)^r \\ &= y + 1 - y = 1 \end{aligned}$$

en dus volgt $y^r - (y + 1)^r = (yy + y)^r$. Nu volgt:

$$\begin{aligned} x &= (x(yy + y))(yy + y)^r \\ &= (x(yy + y))(y^r - (y + 1)^r) \\ &= (x(yy) + xy)(y^r - (y + 1)^r). \end{aligned}$$

Definieer $w = ((xy)y + xy)(y^r - (y + 1)^r)$. Nu hebben we:

$$\begin{aligned} w(y + 1) &= (xy + x - ((xy)y + xy)(y + 1)^r)(y + 1) \\ &= (xy + x)(y + 1) - ((xy)y + xy) \\ &= (xy)y + xy + xy + x - (xy)y - xy \\ &= xy + x \\ &= x(y + 1) \end{aligned}$$

en omdat $y + 1 \neq 0$ volgt $w = x$. Omdat $y^r \neq (y + 1)^r$, volgt $x(yy) + xy = (xy)y + xy$, en daarmee volgt $x(yy) = (xy)y$. Voor de gevallen $y = -1$ en $y = 0$ geldt duidelijk ook $x(yy) = (xy)y$, en dus is de rechts-alternerende wet bewezen. \square

We kunnen het vorige lemma dualiseren en vinden:

Lemma 4.4.4. *Als R een halflichaam is met links-inverse-eigenschap dan geldt voor alle $x, y \in R$: $x(xy) = (xx)y$.* \square

Nu volgt:

Gevolg 4.4.5. *Als R een halflichaam is met inverse-eigenschap, dan is R een alternatieflichaam.* \square

Deze stelling blijkt zelfs een equivalentie te zijn. Het bewijs van de tweede implicatie is echter erg lang en technisch, en dus zal ik deze niet in mijn scriptie opnemen.

Stelling 4.4.6 ([5, 6.17]). *Zij R een halflichaam. Dan is R een alternatieflichaam dan en slechts dan als R de inverse-eigenschap heeft.* \square

Stelling 4.4.7 ([4, 20.5.2]). *Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt projectief vlak dat X - ℓ_∞ -, Y - ℓ_∞ - en Y - OY -transitief is (ofwel: de bijbehorende VTR (R, T) is een halflichaam). Dan is \mathbb{P} O - OY -transitief dan en slechts dan als de bijbehorende VTR (R, T) aan de links-inverse-eigenschap voldoet.*

Bewijs. Zij $a \neq 0$ gegeven. Als $a = -1$, dan is $a^{-1} = -1$ de gezochte links-inverse. Veronderstel dat $a \neq -1$. Bekijk dan de O - OY -collineatie ρ gegeven door $\rho((0)) = (-1 - a, 0)$. Voor iedere $b \in R$ geldt dat ρ de punten (0) en $(0, b + ab)$ respectievelijk naar $(-1 - a, 0)$ en $(0, b + ab)$ stuurt, en dus stuurt ρ de verbindingslijn $[y = b + ab]$ naar de lijn $[y = xb + b + ab]$. In het bijzonder: voor $b = 1$ wordt de lijn $[y = 1 + a]$ naar $[y = x + 1 + a]$ gestuurd, en de lijn $[y = x(1 + a)]$ blijft invariant. Het snijpunt $(1, 1 + a)$ van deze twee lijnen gaat dus naar het snijpunt $[y = x(1 + a)] \cap [y = x + 1 + a]$. Omdat $a \neq 0$, hebben deze lijnen een verschillende helling, en dus is het snijpunt van de vorm $(d, d + 1 + a)$ voor een zekere $d \in R$, en bovendien geldt $d + 1 + a = d(1 + a)$. De lijn $[x = 1] = (\infty)(1, 1 + a)$ gaat nu naar $(\infty)(d, d + 1 + a) = [x = d]$. Het punt $(1, b + ab)$ ligt op de lijnen $[x = 1]$, $[y = x(b + ab)]$ en $[y = b + ab]$, en dus ligt het beeld $\rho((1, b + ab))$ op de lijnen $[x = d]$, $[y = x(b + ab)]$ en $[y = xb + b + ab]$, en dus volgt $\rho((1, b + ab)) = (d, d(b + ab))$, waarbij geldt $d(b + ab) = db + b + ab$.

Nu volgt dus dat er voor iedere $a \neq 0, -1$ er een $d \in R$ bestaat zodanig dat geldt $d(b + ab) = db + b + ab$ voor alle $b \in R$, ofwel: $d(ab) = b + ab$. Dus geldt $(d - 1)(ab) = b$ voor alle $b \in R$, en dus is d de gezochte linksinverse van a . We zien dus dat (R, T) aan de links-inverse-eigenschap voldoet.

(\Leftarrow) Zij $(a, 0)$ met $a \neq 0$ een punt op OX , buiten O en X . We zoeken een O - OY -collineatie die (∞) naar $(a, 0)$ stuurt. Bekijk de afbeelding π die als

volgt op de punten en de lijnen van het vlak werkt:

$$\begin{aligned}
(u, v) &\mapsto \left((u^{-1} + a^{-1})^{-1}, (u^{-1} + a^{-1})^{-1} (u^{-1}v) \right) \quad u \neq 0, -a \\
(0, v) &\mapsto (0, v) \\
(-a, v) &\mapsto (-a^{-1}v) \\
(m) &\mapsto (a, am) \\
(\infty) &\mapsto (\infty) \\
[y = xm + b] &\mapsto [y = x(m - a^{-1}b) + b] \\
[x = u] &\mapsto [x = (u^{-1} + a^{-1})^{-1}] \quad u \neq 0, -a \\
[x = 0] &\mapsto [x = 0] \\
[x = -a] &\mapsto [\infty] \\
[\infty] &\mapsto [x = a].
\end{aligned}$$

Een lange gevalsonderscheiding leert ons dat dit een automorfisme is. Alle punten op de lijn OY en alle lijnen door O worden invariant gelaten door π , en dus is π een O - OY -collineatie. Bovendien geldt $\pi((0)) = (a, 0)$, en dus is π de gezochte afbeelding. Uit 2.4.4 volgt nu dat ons vlak O - OY -transitief is. \square

Gevolg 4.4.8. *Een gepunt projectief vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ is een translatievlak ten opzichte van iedere lijn door Y dan en slechts dan als de bijbehorende VTR (R, T) een halflichaam is dat voldoet aan de links-inverse-eigenschap.*

Bewijs. Uit 2.4.8 volgt dat \mathbb{P} een translatievlak is ten opzichte van iedere lijn door Y dan en slechts dan als \mathbb{P} een translatievlak is ten opzichte van de lijnen OY en ℓ_∞ . Uit 2.4.7 volgt dat het laatstgenoemde geldt dan en slechts dan als het vlak X - ℓ_∞ -, Y - ℓ_∞ -, Y - OY - en O - OY -transitief is, en dit is volgens 4.3.5 en 4.4.7 het geval dan en slechts dan als de bijbehorende VTR (R, T) een halflichaam is dat voldoet aan de links-inverse-eigenschap. \square

We kunnen deze situatie weer dualiseren en krijgen op deze manier de volgende stelling:

Gevolg 4.4.9. *Een gepunt projectief vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ is een p -translatievlak voor ieder punt p op ℓ_∞ dan en slechts dan als de bijbehorende VTR (R, T) een halflichaam is dat voldoet aan de rechts-inverse-eigenschap.* \square

Nu volgt:

Stelling 4.4.10. *Een gepunt projectief vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ is een Moufangvlak dan en slechts dan als de bijbehorende VTR (R, T) een alternatiefflichaam is.*

Bewijs. Als $(\mathbb{P}, OIXY)$ een Moufangvlak is, dan volgt uit 4.4.8 en 4.4.9 dat (R, T) een halflichaam is dat voldoet aan de inverse-eigenschap, en uit 4.4.6 volgt nu dat (R, T) een alternatiefflichaam is.

Andersom: als (R, T) een alternatiefflichaam is, dan volgt uit 4.4.6 dat (R, T) een halflichaam is dat voldoet aan de inverse-eigenschap. Uit 4.4.8 volgt dat iedere lijn door Y een translatielijn is, en uit 4.4.9 volgt dat ieder punt op ℓ_∞ een translatiepunt is. In het bijzonder is ons vlak (1) - $O(1)$ -transitief, en dus bestaat er een $\pi \in \text{Aut}_{(1), O(1)}$ met $\pi(Y) = X$, en dus ook $\pi(OY) = OX$. Omdat OY een translatielijn is, volgt dat OX dat ook is. OY , OX en XY zijn translatielijnen, en dus volgt uit 2.4.9 dat \mathbb{P} een Moufangvlak is. \square

Merk op dat het ‘Moufang-zijn’ van een vlak per definitie niet afhangt van de keuze van de coördinaten. Een Moufangvlak levert dus voor iedere keuze van vierhoek $OIXY$ een alternatieflichaam. Equivalent: als er een vierhoek $OIXY$ bestaat waarvoor de VTR bij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een alternatieflichaam is, dan is de VTR bij $(\mathbb{P}, O'I'X'Y')$ voor iedere vierhoek $O'I'X'Y'$ een alternatieflichaam. We kunnen ons nu natuurlijk afvragen of we bij iedere vierhoek $OIXY$ ‘hetzelfde’ alternatieflichaam krijgen.

Stelling 4.4.11. *Zij \mathbb{P} een Moufangvlak, en zij $OIXY$ en $O'I'X'Y'$ twee vierhoeken in dit vlak. Dan zijn de vlakke ternaire ringen bij de gepunte vlakken $(\mathbb{P}, OIXY)$ en $(\mathbb{P}, O'I'X'Y')$ isotope alternatieflichamen.*

Bewijs. Dit volgt direct uit 2.4.11 en 3.3.5. □

We weten dus dat er tussen de vlakke ternaire ringen bij een Moufangvlak isotopismen bestaan. Deze isotopismen blijken zelfs tot isomorfismen te leiden. Voor delingsringen is deze stelling vrij eenvoudig te bewijzen.

Lemma 4.4.12. *Stel, $(R, +, \cdot)$ en (R', \oplus, \odot) zijn twee delingsringen, en stel dat $(f, g, h) : R \rightarrow R'$ een isotopisme is. Dan geldt $h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$ voor alle $x, y \in R$.*

Bewijs.

$$\begin{aligned} h(x + y) &= h(x \cdot 1 + y) = f(x) \odot g(1) \oplus h(y) = (f(x) \odot g(1) \oplus 0) \oplus h(y) \\ &= (f(x) \odot g(1) \oplus h(0)) \oplus h(y) = h(x \cdot 1 + 0) \oplus h(y) \\ &= h(x) \oplus h(y). \end{aligned}$$

□

Stelling 4.4.13. *Stel, $(R, +, \cdot)$ en (R', \oplus, \odot) zijn twee delingsringen, en stel dat $(f, g, h) : R \rightarrow R'$ een isotopisme is. Zij $a = h^{-1}(1)$. Dan is de afbeelding $F : R \rightarrow R' : x \mapsto h(xa)$ een isomorfisme.*

In het bijzonder geldt: isotope delingsringen zijn isomorf.

Bewijs. Zij $b = f^{-1}(1)$ en $c = g^{-1}(1)$. Omdat geldt $h(bc) = f(b) \odot g(c) = 1 \odot 1 = 1$, volgt dat $bc = a$. Voor alle $y \in R$ geldt:

$$h(by) = f(b) \odot g(y) = 1 \odot g(y) = g(y)$$

en voor alle $x \in R$ geldt:

$$h(xc) = f(x) \odot g(c) = f(x) \odot 1 = f(x).$$

Nu volgt voor alle $x, y \in R$:

$$h(x) \odot h(y) = f(xc^{-1}) \odot g(b^{-1}y) = h(xc^{-1}b^{-1}y) = h(xa^{-1}y).$$

Neem nu $\phi : R \rightarrow R' : x \mapsto x \cdot a$. Omdat $a \neq 0$ en omdat a een delingsring is, volgt dat ϕ een bijectie is, en daarmee is ook $F = h\phi$ een bijectie. Bovendien geldt: $F(1) = h(a) = h(bc) = f(b) \odot g(c) = 1$. Daarnaast geldt voor alle $x, y \in R$:

$$F(x + y) = h((x + y)a) = h(xa + ya) = h(xa) \oplus h(ya) = F(x) \oplus F(y)$$

en

$$\begin{aligned} F(xy) &= h(xya) = h(xaa^{-1})ya = h((xa)a^{-1}(ya)) \\ &= h(xa) \odot h(ya) = F(x) \odot h\phi(y) \end{aligned}$$

en dus is F een isomorfisme van R naar R' . □

We kunnen uit deze stelling een generalisatie afleiden. Het bewijs hiervan maakt echter gebruik van een structuurstelling voor alternatieflichamen, die op zijn beurt weer een aantal definities nodig heeft. Daarom is dit bewijs hier achterwege gelaten; het is na te lezen in het boek van Stevenson [8, 14.3.11].

Stelling 4.4.14. *Isotope alternatieflichamen zijn isomorf.* □

We kunnen met dit resultaat stelling 2.4.11 aanscherpen.

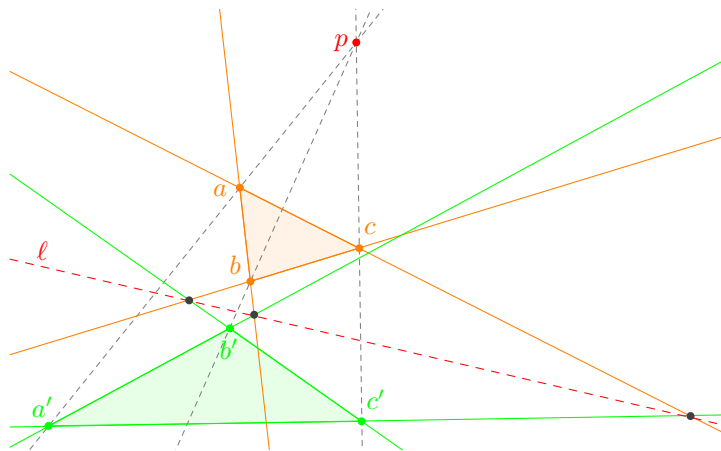
Gevolg 4.4.15. *De automorfismengroep $\text{Aut}(\mathbb{P})$ van een Moufangvlak \mathbb{P} werkt transitief op de vierhoeken in het vlak.* □

Bewijs. Stel, $OIXY$ en $O'I'X'Y'$ zijn twee vierhoeken in het vlak. Beschouw de 4-gepunte projectieve vlakken $(\mathbb{P}, OIXY)$ en $(\mathbb{P}, O'I'X'Y')$ met bijbehorende vlakke ternaire ringen (R, T) en (R', T') ; dit zijn alternatieflichamen vanwege 4.4.10. Uit 2.4.11 volgt dat er een isomorfisme $(\mathbb{P}, OXY) \rightarrow (\mathbb{P}, O'X'Y')$ bestaat; uit 3.3.5 volgt nu dat er een isotopisme $(R, T) \rightarrow (R', T')$ bestaat. Uit 4.4.14 volgt nu dat er een isomorfisme $(R, T) \rightarrow (R', T')$ bestaat; en uit 3.3.6 volgt tenslotte dat er een isomorfisme $(\mathbb{P}, OIXY) \rightarrow (\mathbb{P}, O'I'X'Y')$ bestaat. □

4.5 Desarguesvlakken en delingsringen

Een klassieke stelling binnen de projectieve meetkunde is de *stelling van Desargues*. De stelling van Desargues luidt: het reële projectieve vlak voldoet aan de *Desargueseigenschap*:

DESARGUESEIGENSCHAP Stel, abc en $a'b'c'$ zijn twee driehoeken in het vlak met $a \neq a'$, $b \neq b'$ en $c \neq c'$, en $ab \neq a'b'$, $ac \neq a'c'$ en $bc \neq b'c'$. Als de lijnen aa' , bb' en cc' concurrent zijn, dan zijn de punten $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ en $bc \cap b'c'$ collineair.



De Desargueseigenschap blijkt echter niet voor ieder projectief vlak te gelden. Een vlak dat aan de Desargueseigenschap voldoet noemen we een *Desarguesvlak*.

Definitie 4.5.1. Zij p een punt en zij ℓ een lijn in het vlak \mathbb{P} . We zeggen dat \mathbb{P} een p - ℓ -Desarguesvlak is als het volgende geldt: voor ieder tweetal driehoeken abc en $a'b'c'$ met $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$, $ab \neq a'b'$, $ac \neq a'c'$ en $bc \neq b'c'$: als aa' , bb' en cc' lijnen door p en $ab \cap a'b'$ en $ac \cap a'c'$ punten op ℓ zijn, dan is $bc \cap b'c'$ ook een punt op ℓ .

Merk op dat deze definitie sterk lijkt op de definitie van de Desargueseigenschap. We nemen nu echter het punt p en de lijn ℓ vast in plaats van dat we deze laten variëren. We vinden dus dat \mathbb{P} een Desarguesvlak is dan en slechts dan als \mathbb{P} een p - ℓ -Desarguesvlak is voor alle punten p en lijnen ℓ in het vlak.

Het blijkt dat de Desargueseigenschap nauw samenhangt met een eigenschap van de centrale collineaties van het vlak.

Stelling 4.5.2. *Een projectief vlak is een p - ℓ -Desarguesvlak dan en slechts dan als het vlak p - ℓ -transitief is.*

Ik zal van deze stelling alleen de implicatie \Leftarrow bewijzen. Het bewijs van de implicatie \Rightarrow bestaat uit het expliciet construeren van collineaties; dit bewijs is na te lezen in de boeken van Hughes & Piper [5, p. 108] en Stevenson [8, p. 172].

Bewijs. (\Leftarrow) Stel, abc en $a'b'c'$ zijn twee driehoeken zoals in definitie 4.5.1. Zij π de p - ℓ -collineatie die a naar a' stuurt. De punten $a, b, ab \cap a'b'$ liggen op één lijn, en dus liggen de punten $a', \pi(b), \pi(ab \cap a'b') = ab \cap a'b'$ op één lijn. Bovendien ligt $\pi(b)$ op pb , en dus volgt dat $\pi(b) = b'$. Op analoge wijze volgt $\pi(c) = c'$. Nu zien we dat de lijn bc naar $b'c'$ wordt gestuurd, en dus moet snijpunt $bc \cap b'c'$ invariant blijven onder π . Er geldt $bc \cap b'c' \neq p$, want anders zouden b, b', c, c' op één lijn liggen, wat uitgesloten is vanwege $bb' \neq cc'$. Als $bc \cap b'c'$ niet op ℓ ligt, dan volgt uit 2.3.9 dat $\pi = \text{id}$, maar dit kan niet want $a \neq a' = \pi(a)$. We kunnen dus concluderen dat $bc \cap b'c'$ op ℓ ligt, en dus is ons vlak een p - ℓ -Desarguesvlak. \square

We vinden nu ook direct het volgende:

Gevolg 4.5.3. *Een vlak is een Desarguesvlak dan en slechts dan als dit vlak p - ℓ -transitief is voor alle punten p en lijnen ℓ in het vlak.* \square

Gevolg 4.5.4. *Ieder Desarguesvlak is een Moufangvlak.* \square

We zien dus in het bijzonder dat de vlakke ternaire ringen bij Desarguesvlakken alternatieflichamen zijn. Bovendien geldt: als $(\mathbb{P}, OIXY)$ een Desarguesvlak is, dan is \mathbb{P} X - OY -transitief, en dus volgt uit 4.3.2 dat de bijbehorende vlakke ternaire ring aan de associatieve wet $(ab)c = a(bc)$ voldoet, en dus een delingsring moet zijn. Het omgekeerde blijkt ook waar.

Stelling 4.5.5. *Een gepunt projectief vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ is een Desarguesvlak dan en slechts dan als de bijbehorende VTR (R, T) een delingsring is.*

Bewijs. De implicatie \Rightarrow volgt uit 4.3.2 en 4.3.5.

Andersom: stel dat (R, T) een delingsring is. Dan is (R, T) ook een alternatieflichaam, en uit 4.4.10 volgt nu dat \mathbb{P} een Moufangvlak is.

Zij p een punt en zij ℓ een lijn in het vlak. Als $p \in \ell$, dan volgt dat ons vlak p - ℓ -transitief is; \mathbb{P} is immers een Moufangvlak. Stel dat $p \notin \ell$. Neem twee punten q, r op ℓ . Dan is pqr een driehoek. Uit 2.4.11 volgt dat er een automorfisme π bestaat dat X , O , en Y respectievelijk naar p, q en r stuurt. Omdat uit 4.3.2 volgt dat het vlak $X-OY$ -transitief is, volgt uit 2.4.2 dat het vlak ook $p-qr$ -transitief, ofwel p - ℓ -transitief is. We zien dat het vlak p - ℓ -transitief is voor alle punten p en lijnen ℓ in het vlak, en dus volgt uit 4.5.3 dat \mathbb{P} een Desarguesvlak is. \square

5 Papposvlakken en de stelling van Hessenberg

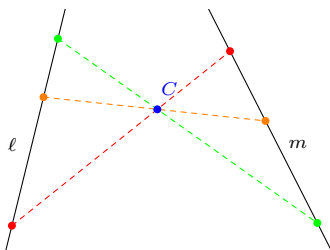
In dit hoofdstuk zullen we kennismaken met een tweede klassieke stelling binnen de projectieve meetkunde: de stelling van Pappos. In 1905 publiceerde Hessenberg een artikel waarin hij een (onvolledig) bewijs gaf dat vlakken die aan deze stelling voldoen ook voldoen aan de stelling van Desargues. In 1952 kwam Cronheim [3] met een volledig bewijs voor deze stelling. In deze scriptie wil ik een alternatief bewijs voor deze stelling geven. Dit bewijs zal gebruik maken van een nieuw soort afbeeldingen tussen lijnen in het projectieve vlak: de zogenaamde projecties en projectieve afbeeldingen.

We zullen eerst kijken naar verschillende soorten projectieve afbeeldingen tussen lijnen in het vlak, en vervolgens leiden we enkele eigenschappen van deze projectieve afbeeldingen af die gelden in Papposvlakken en in Desarguesvlakken. Ten slotte zullen we, om terug te komen op onze classificatie van projectieve vlakken, met behulp van deze eigenschappen afleiden dat de vlakke ternaire ringen bij Papposvlakken altijd lichamen zijn.

5.1 Projecties en projectieve afbeeldingen

Naast de eerder besproken automorfismen bestaat er nog een soort afbeeldingen binnen het projectieve vlak: de projecties. Dit zijn geen afbeeldingen die het gehele vlak permuteren, maar afbeeldingen die punten van één lijn naar de punten van een andere lijn sturen.

Definitie 5.1.1. Stel ℓ en m zijn twee lijnen in het vlak, en c is een punt buiten ℓ en m . Dan is de *projectie van ℓ op m met centrum c* de afbeelding $\ell \rightarrow m$, genoteerd als: $\ell \xrightarrow{c} m$, die een punt p op ℓ naar het snijpunt van $pc \cap m$ stuurt.



Bovenstaande afbeelding is een voorbeeld van een projectie.

Propositie 5.1.2. Zij $\ell \xrightarrow{c} m$ een projectie. Dan is deze projectie bijectief, en zijn inverse is de projectie $m \xrightarrow{c} \ell$. \square

We kunnen ons afvragen in hoeverre een projectie uniek is vastgelegd. De volgende propositie geeft antwoord op deze vraag.

Propositie 5.1.3. Stel, ℓ, m zijn twee verschillende lijnen in het vlak met snijpunt s , en c_1, c_2 zijn twee punten buiten ℓ en m . Beschouw de projecties $\pi_1 : \ell \xrightarrow{c_1} m$ en $\pi_2 : \ell \xrightarrow{c_2} m$. Stel, p, q zijn twee verschillende punten op ℓ , verschillend van s . Als geldt $\pi_1(p) = \pi_2(p)$ en $\pi_1(q) = \pi_2(q)$ dan volgt $\pi_1 = \pi_2$. M.a.w. een projectie van ℓ op m wordt uniek vastgelegd door de beelden van twee punten buiten het snijpunt $\ell \cap m$.

Bewijs. De projectie π_1 stuurt p naar $\pi_1(p)$ en dus moet het centrum c_1 op de lijn $p\pi_1(p)$ liggen. Op analoge wijze ligt c_1 op $q\pi_2(q)$, en dus op het snijpunt $p\pi_1(p) \cap q\pi_2(q)$. Dit geldt ook voor c_2 , en dus volgt $c_1 = c_2$ en $\pi_1 = \pi_2$. \square

Propositie 5.1.4. *Stel, ℓ, m zijn twee verschillende lijnen met snijpunt s , p en q zijn twee verschillende punten op ℓ , buiten s , en p' en q' zijn twee verschillende punten op m , buiten s . Dan bestaat er een projectie π van ℓ op m met $\pi(p) = p'$ en $\pi(q) = q'$.*

Bewijs. Neem $c = pp' \cap qq'$. De projectie $\pi : \ell \xrightarrow{c} m$ voldoet. \square

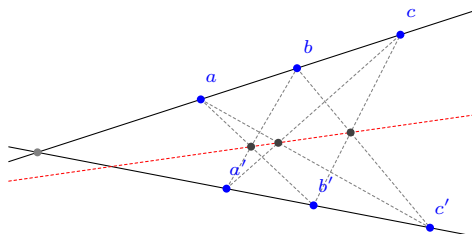
Definitie 5.1.5. Een *projectieve afbeelding* is de samenstelling van één of meer projecties.

Als een projectieve afbeelding de samenstelling is van de projecties $\ell_1 \xrightarrow{c_1} \ell_2, \dots, \ell_n \xrightarrow{c_n} \ell_{n+1}$, dan noteren we deze afbeelding als $\ell_1 \xrightarrow{c_1} \ell_2 \xrightarrow{c_2} \dots \xrightarrow{c_n} \ell_{n+1}$.

5.2 De stelling van Pappos

Eerder in deze scriptie hebben we kennis gemaakt met de stelling van Desargues. Een andere klassieke stelling uit de projectieve meetkunde is de stelling van Pappos. De stelling van Pappos luidt: het reële projectieve vlak voldoet aan de *Papposeigenschap*:

PAPPOSEIGENSCHAP. Stel, ℓ en ℓ' zijn twee lijnen in het vlak, a, b, c zijn drie verschillende punten op ℓ , en a', b', c' drie verschillende punten op ℓ' , zodanig dat deze zes punten allemaal verschillend zijn van het snijpunt $\ell \cap \ell'$. Dan liggen de snijpunten $ab' \cap a'b$, $ac' \cap a'c$ en $bc' \cap b'c$ op één lijn.



Een vlak met de Papposeigenschap noemen we een *Papposvlak*. Het reële projectieve vlak is dus een Papposvlak. Niet ieder vlak is een Papposvlak: een voorbeeld volgt.

Voorbeeld 5.2.1. Bekijk de vlakke ternaire ring (R, T) , waar $R = \mathbb{H}$ de Hamilton-quaternionenalgebra is, en T gegeven wordt door $T(a, b, c) = ab + c$. In het bijzonder is (R, T) nu een delingsring, en dus is het bijbehorende gepunte projectieve vlak $(\mathbb{P}, OIXY)$ een Desarguesvlak. Beschouw de lijn ℓ_∞ , met daarop de punten (-1) , $(-i)$ en $(-j)$, en de lijn $y = 0$, met daarop de punten $(1, 0)$, $(i, 0)$ en $(j, 0)$. De lijn door $(1, 0)$ en $(-i)$ wordt gegeven door de vergelijking $y = -xi + i$, en de lijn door $(i, 0)$ en (-1) wordt gegeven door de vergelijking $y = -x + i$. Deze lijnen snijden in het punt $(0, i)$. De lijnen

$(1, 0)(-j)$ en $(j, 0)(-1)$ snijden in het punt $(0, j)$. Als \mathbb{P} een Papposvlak zou zijn, dan zouden de lijnen $(i, 0)(-j)$, gegeven door de vergelijking $y = -xj + k$, en $(j, 0)(-i)$, gegeven door $y = -xi - k$, snijden op de lijn door $(0, i)$ en $(0, j)$, ofwel: de y -as. De lijn $y = -xj + k$ snijdt de y -as echter in het punt $(0, k)$, waar de lijn $y = -xi - k$ de y -as in het punt $(0, -k)$ snijdt. De stelling van Pappos geldt hier dus niet.

5.3 De stelling van Hessenberg

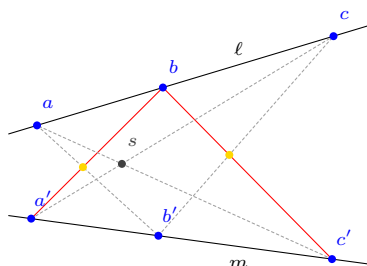
De Pappos- en Desargueseigenschappen blijken niet onafhankelijk van elkaar te zijn. In deze paragraaf zullen we een bewijs bekijken voor de stelling van Hessenberg. Deze stelling zegt dat de Papposeigenschap de Desargueseigenschap impliceert.

Er blijkt een opmerkelijk verband te bestaan tussen Papposvlakken en eigenschappen van de projectieve afbeeldingen in het vlak.

Stelling 5.3.1. *Zij \mathbb{P} een projectief vlak. Dan is \mathbb{P} een Papposvlak dan en slechts dan als \mathbb{P} aan de volgende eigenschap voldoet:*

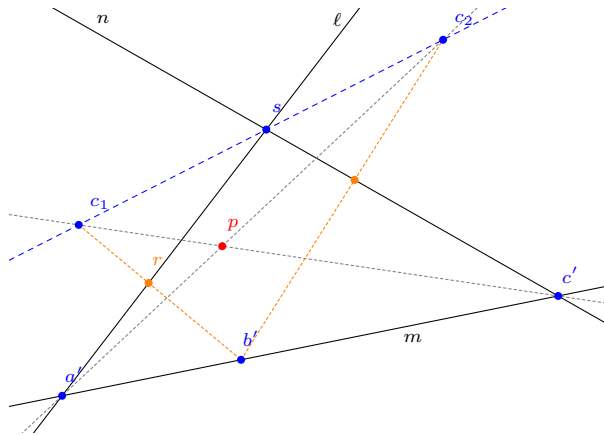
EIGENSCHAP P. *Zij ℓ, m, n een drietal niet-concurrente lijnen in het vlak; en $\ell \xrightarrow{c_1} m$ en $m \xrightarrow{c_2} n$ een tweetal projecties. Als de samenstelling $\ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$ het snijpunt $\ell \cap n$ invariant laat, dan is deze samenstelling zelf ook een projectie.*

Bewijs. (P \implies Pappos) Stel, ℓ en m zijn twee lijnen, a, b, c drie punten op ℓ en a', b', c' drie punten op m , alle punten verschillend van het snijpunt $\ell \cap m$. Bekijk de projecties $\pi_1 : ba' \xrightarrow{a} m$ en $\pi_2 : m \xrightarrow{c} bc'$.



De samenstelling $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : ba' \xrightarrow{a} m \xrightarrow{c} bc'$ is nu ook een projectie. Zij p het snijpunt $ac' \cap ba'$. Dan volgt $\pi_1(p) = c'$ en dus $\pi(p) = \pi_2(c') = c'$, en dus moet het centrum s van π ergens op lijn $pc' = ac'$ liggen. Op analoge wijze volgt dat s op $a'c$ ligt, en dus is s het snijpunt $ac' \cap a'c$. Het punt $ab' \cap a'b$ wordt door π_1 naar b' gestuurd, en dit punt wordt door π_2 weer naar $b'c \cap bc'$ gestuurd. We vinden dus: $\pi(ab' \cap a'b) = bc' \cap b'c$, en dus liggen $ab' \cap a'b$, $bc' \cap b'c$ en het centrum $s = ac' \cap a'c$ op één lijn, en dus is de stelling van Pappos bewezen.

(Pappos \implies P) Omdat het snijpunt $s = \ell \cap n$ invariant gelaten wordt, volgt direct dat s, c_1, c_2 op één lijn moeten liggen. Hieruit volgt dat c_1 niet op n ligt en dat c_2 niet op ℓ ligt. Als $c_1 = c_2$ dan is de stelling duidelijk waar: π is de projectie $\ell \xrightarrow{c_1} n$. Veronderstel dat $c_1 \neq c_2$. Noem $\ell \cap m = a'$ en $m \cap n = c'$. Definieer $p = c_1c' \cap c_2a'$.



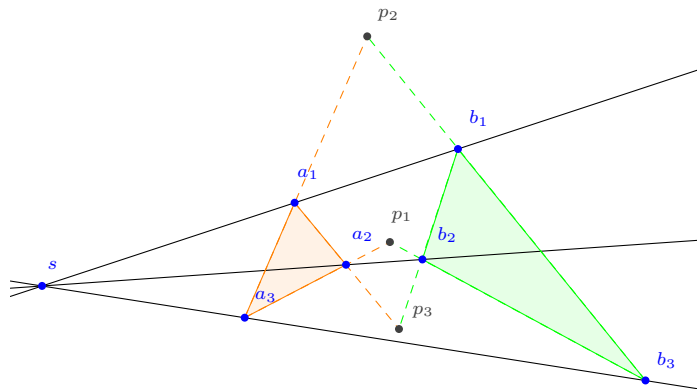
Zij $\pi' : \ell \xrightarrow{\mathbb{P}} n$. Claim: $\pi = \pi'$. Dat π en π' hetzelfde op de punten a', s, c' werken volgt per constructie van het punt p . Zij nu r een punt op ℓ , ongelijk aan s en a' . Zij b' het beeld van r onder $\ell \xrightarrow{c_1} m$. Dan volgt dat $b'c_2 \cap sc'$ het beeld van b onder $m \xrightarrow{c_2} n$ is, en dus volgt $\pi(r) = b'c_2 \cap bc'_2$. Maar uit de stelling van Pappos volgt dat de punten $p = c_1c' \cap a'c_2$, $r = b'c_1 \cap a's$, en $\pi(r) = b'c_2 \cap sc'$ op één lijn liggen, en dus volgt $\pi'(r) = \pi(r)$. We zien dus dat $\pi = \pi'$, en dus is de afbeelding $\pi : \ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$ een projectie. \square

Ook de stelling van Desargues blijkt samen te hangen met een soortgelijke eigenschap van projecties.

Stelling 5.3.2. *Zij \mathbb{P} een projectief vlak. Dan is \mathbb{P} een Desarguesvlak dan en slechts dan als \mathbb{P} aan de volgende eigenschap voldoet:*

EIGENSCHAP D. *Zij ℓ, m, n een drietal verschillende concurrente lijnen in het vlak, en $\ell \xrightarrow{c_1} m$ en $m \xrightarrow{c_2} n$ een tweetal projecties. Dan is de samenstelling $\ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$ zelf ook een projectie.*

Bewijs. (D \implies Desargues) Stel, $a_1a_2a_3$ en $b_1b_2b_3$ zijn twee driehoeken in het vlak met $a_i \neq b_i$ voor $i = 1, \dots, 3$, en $a_ia_j \neq b_ib_j$ voor iedere permutatie (i, j, k) van $(1, 2, 3)$, zodanig dat de drie lijnen $\ell_i := a_ib_i$ ($i = 1, \dots, 3$) concurrent zijn. Voor iedere permutatie (i, j, k) van $(1, 2, 3)$ definiëren we p_i als $a_ja_k \cap b_jb_k$. Merk op dat de p_i paarsgewijs verschillend zijn, aangezien a_1, a_2, a_3 niet op één lijn liggen. Het snijpunt van de lijnen ℓ_i noemen we s .



We willen aantonen dat p_1, p_2 en p_3 op één lijn liggen. We maken onderscheid tussen twee gevallen. In het eerste geval geldt voor iedere permutatie (i, j, k) van $(1, 2, 3)$ dat p_i, p_j en s op één lijn liggen. Hieruit volgt direct dat p_1, p_2 en p_3 collineair zijn.

In het tweede geval bestaat er een permutatie (i, j, k) van $(1, 2, 3)$ waarvoor s, p_i, p_j niet op één lijn liggen. Beschouw de projecties $\pi_i : \ell_j \xrightarrow{p_i} \ell_k$ en $\pi_j : \ell_k \xrightarrow{p_j} \ell_i$. Er geldt $\pi_i(a_j) = p_i a_j \cap \ell_k = a_k$ en $\pi_i(b_j) = b_k$. Bovendien geldt $\pi_j(a_k) = p_j a_k \cap \ell_i = a_i$ en $\pi_j(b_k) = b_i$. Uit eigenschap D volgt dat de samenstelling $\pi = \pi_j \pi_i$ weer een projectie $\ell_j \rightarrow \ell_i$ is. Er geldt $\pi(a_j) = \pi_j \pi_i(a_j) = \pi_j(a_k) = a_i$ en $\pi(b_j) = b_i$, en dus is het centrum van π het snijpunt $a_j a_i \cap b_j b_i = p_k$. Zij d het snijpunt van $p_i p_j$ met ℓ_j . Dan volgt $d \neq s$ want p_i, p_j, s zijn niet collineair. Omdat p_i en p_j de centra van π_i en π_j zijn, blijft het beeld van b onder π_i en onder $\pi = \pi_j \pi_i$ op deze lijn. We zien dus dat $p_i, p_j, b, \pi(b)$ op één lijn liggen. Omdat p_k het centrum is van π volgt bovendien dat $b, \pi(b), p_k$ op één lijn liggen, en omdat $b \neq \pi(b)$, volgt dat de twee laatstgenoemde lijnen gelijk zijn. We zien dus dat p_1, p_2, p_3 collineair zijn.

(Desargues \implies D) Veronderstel dat we een tweetal projecties $\pi_1 : \ell \xrightarrow{c_1} m$ en $\pi_2 : m \xrightarrow{c_2} n$ hebben. Als $c_1 = c_2$ dan volgt direct dat de samenstelling $\pi_2 \pi_1$ de projectie $\ell \xrightarrow{c_1} n$ is. Veronderstel dus dat $c_1 \neq c_2$. Kies een punt a_1 op ℓ , ongelijk aan het snijpunt s van ℓ, m, n en ongelijk aan het snijpunt $c_1 c_2 \cap \ell$. Zij $a_2 = \pi_1(a_1)$ en zij $a_3 = \pi_2(a_2) = \pi_2 \pi_1(a_1)$. Definieer $c_3 = c_1 c_2 \cap a_1 a_3$. We zullen bewijzen dat $\pi_2 \pi_1$ gelijk is aan de projectie $\pi : \ell \xrightarrow{c_3} n$. Er geldt duidelijk: $\pi(s) = s = \pi_2 \pi_1(s)$ en $\pi(a_1) = a_3 = \pi_2 \pi_1(a_1)$. Zij $b_1 \in \ell$ een punt verschillend van s en a_1 . Neem $b_2 = \pi_1(b_1)$ en $b_3 = \pi_2(b_2)$. Nu volgt $a_1 a_2 \cap b_1 b_2 = c_1$ en $a_2 a_3 \cap b_2 b_3 = c_2$. Uit Desargues volgt dat het snijpunt $a_1 a_3 \cap b_1 b_3$ op de lijn $c_1 c_2$ ligt, en omdat $a_1 a_3 \cap c_1 c_2 = c_3$, volgt dat dit snijpunt dus c_3 moet zijn. We zien dus dat b_1, b_3, c_3 op één lijn liggen en dus volgt dat $\pi(b_1) = b_3 = \pi_2 \pi_1(b_1)$. We zien dus dat geldt $\pi = \pi_2 \pi_1$ en dus is $\pi_2 \pi_1$ een projectie. \square

Nu we deze twee equivalenties hebben, zijn we bijna klaar om Hessenberg te bewijzen. Met behulp van de volgende stelling kunnen we enkele kleine vlakken, waar de argumenten uit het bewijs niet gelden, uitsluiten.

Stelling 5.3.3. *Zij $2 \leq n \leq 4$. Dan zijn alle projectieve vlakken van orde n isomorf. In het bijzonder zijn alle projectieve vlakken van orde n isomorf met $\mathbb{P}(\mathbb{F}_n)$, en dus zijn alle vlakken van deze orde Desargues-vlakken.* \square

Deze stelling is met de computer of met de hand te verifiëren. Moorhouse [6] heeft met de computer zelfs alle mogelijke projectieve vlakken van orde ≤ 10 bepaald.

We hebben nu voldoende gereedschap verzameld om de stelling van Hessenberg te bewijzen.

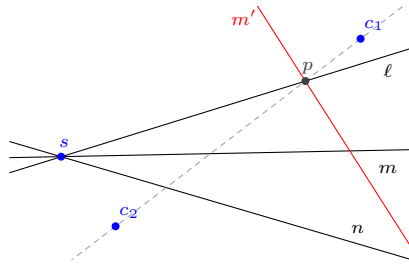
Stelling 5.3.4 (Hessenberg). *Zij \mathbb{P} een projectief vlak. Als \mathbb{P} een Papposvlak is, dan is \mathbb{P} ook een Desarguesvlak.*

Bewijs. Wegens 5.3.3 mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat de orde van \mathbb{P} minstens 5 is; door ieder punt gaan dus minstens 5 lijnen en iedere lijn gaat door minstens 5 punten.

Zij ℓ, m, n een drietal verschillende concurrente lijnen met snijpunt s , en c_1 en c_2 een tweetal punten in het vlak met $c_1 \notin \ell, m$ en $c_2 \notin m, n$. We willen

bewijzen dat de projectieve afbeelding $\pi : \ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$ een projectie is; uit 5.3.2 volgt dan immers dat \mathbb{P} een Desarguesvlak is. In het geval dat $c_1 = c_2$ is dit altijd waar: dan is π de projectie $\ell \xrightarrow{c_1} n$. Veronderstel dus dat $c_1 \neq c_2$. We veronderstellen ook dat $c_2 \notin \ell$, en dat de lijn c_1c_2 niet door s gaat. Later zullen we terugkomen op de gevallen waarin dit wel aan de orde is.

Geval 1 ($c_2 \notin \ell$ en $s \notin c_1c_2$). Zij p het snijpunt van c_1c_2 met ℓ . Vanwege onze eerdere veronderstellingen geldt nu $p \neq s$ en $p \neq c_2$. Kies m' een lijn door p ongelijk aan ℓ en c_1c_2 . Dit kan, want door ieder punt gaan minstens 3 lijnen. We zien nu dat onze projectieve afbeelding als volgt 'splitst': $\pi : \ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} m' \xrightarrow{c_2} n$.

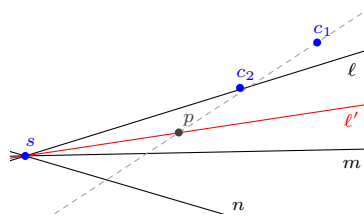


We bekijken het eerste deel van deze projectieve afbeelding, namelijk $\pi_1 : \ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} m'$. We zien dat ℓ, m, m' drie niet-concurrente lijnen zijn. Het snijpunt p van ℓ en m' ligt op de lijn c_1c_2 en zal door projecties met centrum c_1 of c_2 ook op deze lijn blijven liggen. We zien dus dat $\pi_1(p) = p$. Omdat \mathbb{P} een Papposvlak is volgt nu uit 5.3.1 dat π_1 een projectie is. We kunnen π_1 dus schrijven als $\ell \xrightarrow{c_3} m'$ voor een zeker centrum c_3 .

Nu is π als volgt te herschrijven: $\pi : \ell \xrightarrow{c_3} m' \xrightarrow{c_2} n$. Ook ℓ, m', n zijn drie niet-concurrente lijnen, en π laat het snijpunt s van ℓ en n invariant. We kunnen dus weer 5.3.1 toepassen en vinden dat π een projectie is.

Geval 2 ($c_2 \in \ell$, $s \notin c_1c_2$).

Stel nu dat c_2 op ℓ ligt. Kies ℓ' een lijn door s , ongelijk aan ℓ, m, n en zodanig dat c_1 niet op ℓ' ligt. Dit kan, want er gaan minstens 5 lijnen door s . De projectie π splitst nu als $\ell \xrightarrow{c_1} \ell' \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$.



Omdat $c_2 \notin \ell'$, volgt uit geval 1 dat $\ell' \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$ een projectie $\ell' \xrightarrow{c_3} n$ is. Het punt $p = c_1c_2 \cap \ell'$ wordt door deze projectie naar $c_1c_2 \cap n$ gestuurd, en blijft in het bijzonder op c_1c_2 , en dus moet het centrum c_3 ook op c_1c_2 liggen. Als $c_3 = c_2$ dan volgt:

$$\begin{aligned} \pi &= (\ell \xrightarrow{c_1} \ell' \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n) \\ &= (\ell \xrightarrow{c_1} \ell' \xrightarrow{c_3} n) \\ &= (\ell \xrightarrow{c_1} \ell' \xrightarrow{c_2} n) \\ &= (\ell \xrightarrow{c_1} \ell' \xrightarrow{c_2} m \xrightarrow{c_2} n) \end{aligned}$$

en uit $(\ell' \xrightarrow{c_1} m) = (\ell' \xrightarrow{c_2} m)$ volgt nu $c_1 = c_2$, wat we net uitgesloten hebben. Als $c_3 \neq c_2$ dan ligt c_3 dus niet op ℓ , en dan volgt uit het voorgaande deel dat $\ell \xrightarrow{c_1} \ell' \xrightarrow{c_3} n$ een projectie is.

Geval 3 ($s \in c_1c_2$). Veronderstel nu dat c_1c_2 wél door s gaat. Noteer $\pi_1 : \ell \xrightarrow{c_1} m$ en $\pi_2 : m \xrightarrow{c_2} n$. Stel, er bestaat een paar verschillende punten p, q op ℓ , verschillend van s , zodanig dat $c_3 := p\pi(p) \cap q\pi(q)$ niet op c_1c_2 ligt. Dan volgt dat c_1c_3 niet door s gaat, en dus is de projectieve afbeelding $m \xrightarrow{c_1} \ell \xrightarrow{c_3} n$ een projectie. Deze projectie stuurt $\pi_1(p)$ via p naar $\pi(p)$ en $\pi_1(q)$ via q naar $\pi(q)$. De projectie π_2 doet hetzelfde, en dus volgt dat de projectie $m \xrightarrow{c_1} \ell \xrightarrow{c_3} n$ gelijk is aan de projectie $m \xrightarrow{c_2} n$. Samenstelling met $\ell \xrightarrow{c_1} m$ laat zien dat $\ell \xrightarrow{c_1} m \xrightarrow{c_2} n$ gelijk is aan de projectie $\ell \xrightarrow{c_3} n$.

Stel nu dat zo'n paar niet bestaat. Kies p op ℓ buiten s vast en zij $c_3 := p\pi(p) \cap c_1c_2$. Claim: π is de projectie $\pi_3 : \ell \xrightarrow{c_3} n$. Duidelijk geldt $\pi(s) = \pi_3(s)$ en $\pi(p) = \pi_3(p)$. Zij q een punt op ℓ buiten p en s . Uit de aanname aan het begin van deze alinea volgt dat $q\pi(q)$ en $p\pi(p)$ elkaar snijden op c_1c_2 . Omdat het snijpunt van $p\pi(p)$ met c_1c_2 gelijk is aan c_3 volgt dat $p\pi(p)$ en $q\pi(q)$ snijden in c_3 . Hieruit volgt dat $\pi(q) = \pi_3(q)$ en dus kunnen we concluderen dat $\pi = \pi_3$ een projectie is.

We hebben nu alle gevallen behandeld, en dus is de stelling van Hessenberg bewezen. \square

Een logische vraag zou zijn: zijn de Pappos- en Desargueseigenschappen equivalent? Dit blijkt niet het geval te zijn. In voorbeeld 5.2.1 hebben we uit de Hamilton-quaternionenalgebra \mathbb{H} een vlak geconstrueerd dat niet aan Pappos voldoet. Omdat \mathbb{H} een delingsring is, volgt echter wel dat het bijbehorende vlak aan de stelling van Desargues voldoet.

5.4 De VTR van een Papposvlak

Met de resultaten uit het vorige hoofdstuk zullen we aantonen dat de vlakke ternaire ring bij een Papposvlak altijd een lichaam is.

Stelling 5.4.1. *Zij $(\mathbb{P}, OIXY)$ een gepunt projectief vlak met bijbehorende vlakke ternaire ring (R, T) . Dan is \mathbb{P} een Papposvlak dan en slechts dan als (R, T) een lichaam is.*

Bewijs. (\implies) Uit de stelling van Hessenberg volgt dat (R, T) een delingsring is. We hoeven dus alleen aan te tonen dat vermenigvuldiging commutatief is. Zij $a, b \in R$. We kunnen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $0, 1, a, b$ verschillend zijn (anders volgt op triviale wijze $ab = ba$). Beschouw op de x -as de punten $(1, 0)$, $(a, 0)$ en $(b, 0)$, en op oneindig de punten (-1) , $(-a)$ en $(-b)$. De stelling van Pappos zegt nu dat de punten $(1, 0)(-a) \cap (a, 0)(-1)$, $(1, 0)(-b) \cap (b, 0)(-1)$, en $(a, 0)(-b) \cap (b, 0)(-a)$ op één lijn liggen. De lijn $(a, 0)(-1)$ wordt gegeven door de vergelijking $y = -x + a$, en de lijn $(1, 0)(-a)$ wordt gegeven door $y = -xa + a$. Deze lijnen snijden in het punt $(0, a)$. Op analoge wijze volgt $(1, 0)(-b) \cap (b, 0)(-1) = (0, b)$. Deze punten liggen beide op de y -as, en uit de stelling van Pappos volgt nu dat $(a, 0)(-b) \cap (b, 0)(-a)$ ook op de y -as moet liggen. De lijn $(a, 0)(-b)$ wordt gegeven door de vergelijking $y = -xb + ab$ en de lijn $(b, 0)(-a)$ wordt gegeven door $y = -xa + ba$. Deze lijnen snijden op de y -as; dus ze hebben dezelfde y -waarde als we $x = 0$ invullen. Er

volgt dus: $ab = ba$. De vermenigvuldiging is commutatief en dus is (R, T) een lichaam.

(\Leftarrow) Veronderstel dat we twee lijnen ℓ en m hebben met snijpunt s , met op ℓ drie verschillende punten p_1, p_2, p_3 en op m drie verschillende punten q_1, q_2, q_3 , allen verschillend van s . We willen bewijzen dat de punten $p_1q_2 \cap p_2q_1$, $p_1q_3 \cap p_3q_1$ en $p_2q_3 \cap p_3q_2$ op één lijn liggen. We zouden nu met coördinaten kunnen gaan rekenen om de snijpunten te vinden, maar voordat we dat doen maken we het ons een stuk gemakkelijker. (R, T) is een lichaam en dus ook een alternatieflichaam. Er volgt dus dat \mathbb{P} een Moufangvlak is. We zien dat $p_1p_2q_1q_2$ een vierhoek is, en dus bestaat er een automorfisme π op \mathbb{P} dat deze vierhoek naar de vierhoek $(0, 0)(1, 1)(0)(\infty)$ stuurt. Nu volgt $\pi(\ell) = (0, 0)(1, 1) = [y = x]$, en $\pi(m) = (0)(\infty) = \ell_\infty$. Het snijpunt s wordt dus gestuurd naar $\pi(s) = (1)$. Het punt p_3 wordt gestuurd naar (a, a) voor een zekere $a \in R$, en $\pi(q_3) = (b)$ voor een zekere $b \in R$, waarbij a en b ongelijk zijn aan 0 en 1. De beelden van $p_1q_2 \cap p_2q_1$, $p_1q_3 \cap p_3q_1$ en $p_2q_3 \cap p_3q_2$ onder π zijn respectievelijk $(0, 0)(\infty) \cap (1, 1)(0)$, $(0, 0)(b) \cap (a, a)(0)$ en $(1, 1)(b) \cap (a, a)(\infty)$, dus als we bewijzen dat deze drie punten collineair zijn, dan zijn we klaar met het bewijs.

De lijn $(0, 0)(\infty)$ is de lijn $x = 0$, de lijn $(1, 1)(0)$ is de lijn $y = 1$; deze snijden in het punt $(0, 1)$. De lijn $(0, 0)(b)$ is de lijn $y = xb$, de lijn $(a, a)(0)$ is de lijn $y = a$; deze snijden in het punt (ab^{-1}, a) . De lijn $(1, 1)(b)$ is de lijn $y = xb + 1 - b$, de lijn $(a, a)(\infty)$ is de lijn $x = a$; deze lijnen snijden in het punt $(a, ab + 1 - b)$. We willen bewijzen dat de punten $(0, 1)$, (ab^{-1}, a) en $(a, ab + 1 - b)$ op één lijn liggen. De lijn door $(0, 1)$ en (ab^{-1}, a) wordt gegeven door de vergelijking $y = xb(1 - a^{-1}) + 1$. Als we $x = a$ invullen in deze vergelijking volgt $y = ab(1 - a^{-1}) + 1 = ab - b + 1 = ab + 1 - b$, en dus volgt dat ook het punt $(a, ab + 1 - b)$ op deze lijn ligt. Hiermee is bewezen dat \mathbb{P} de Pappos-eigenschap heeft. \square

5.5 Vlakken van eindige orde

In de vorige paragrafen hebben we gezien dat de Papposeigenschap de Desargueseigenschap impliceert. We hebben ook gezien dat deze implicatie geen equivalentie is; het projectieve vlak bij de Hamilton-quaternionenalgebra \mathbb{H} voldoet aan Desargues, maar niet aan Pappos. Omdat \mathbb{H} oneindig is, heeft dit vlak geen eindige orde. We kunnen ons afvragen of er ook dergelijke tegenvoorbeelden bestaan met eindige orde. Het antwoord op deze vraag volgt uit een bekende stelling in de algebra: de stelling van Wedderburn.

Stelling 5.5.1 (Wedderburn). *Iedere eindige delingsring is een lichaam.* \square

Een bijzonder elegant bewijs voor deze stelling is gegeven door Witt. Dit bewijs is na te lezen in Proofs from the Book [1, p. 23]. Als we deze stelling combineren met onze kennis over Desargues- en Papposvlakken en hun vlakke ternaire ringen, vinden we het volgende.

Gevolg 5.5.2. *Ieder Desarguesvlak van eindige orde is een Papposvlak.* \square

We kunnen de stelling van Wedderburn nog iets generaliseren.

Stelling 5.5.3. *Zij R een eindige ring zonder nuldelers. Dan is R een lichaam.*

Bewijs. We zullen bewijzen dat R een delingsring is; dan volgt uit de stelling van Wedderburn dat R een lichaam is.

Zij $a \in R \setminus \{0\}$. Bekijk de afbeeldingen $R \rightarrow R : x \mapsto xa$ en $x \mapsto ax$. Als $xa = ya$ voor zekere $x, y \in R$ dan volgt $(x - y)a = 0$ en dus volgt $x = y$. De gegeven afbeeldingen zijn dus injectief, en omdat R eindig is, bijtief. Er bestaat dus een $b \in R$ zodanig dat $ba = 1$ en een $b' \in R$ zodanig dat $ab' = 1$. Nu volgt $b' = 1 \cdot b' = bab' = b \cdot 1 = b$ en dus is b de multiplicatieve inverse van a . We zien dus dat ieder niet-nul element van R een eenheid is en dus is R een delingsring. \square

De stelling van Artin-Zorn is een tweede generalisatie van de stelling van Wedderburn.

Stelling 5.5.4 (Artin-Zorn). *Ieder eindig alternatieflichaam is een lichaam.*

Om deze stelling te bewijzen hebben we een technisch lemma nodig. Een bewijs van dit lemma is te vinden in het boek van Hughes en Piper [5, p. 149].

Lemma 5.5.5. *Zij D een alternatieflichaam, en zij $a, b \in D$. Dan zijn a en b bevat in een (associatieve!) deelring $R \subset D$.* \square

Bewijs (5.5.4). Stel, D is een eindig alternatieflichaam dat geen lichaam is. Zij \mathcal{R} de verzameling (associatieve) deelringen $R \subset D$ met $0, 1 \in R$. Uit het vorige lemma volgt dat deze verzameling niet leeg is. Uit het lemma van Zorn volgt nu dat we een maximaal element M uit \mathcal{R} kunnen nemen.

Omdat D een halflichaam is, volgt dat $D \setminus \{0\}$ gesloten is onder vermenigvuldiging; D bevat dus geen nuldelers. Er volgt dus ook dat M een eindige ring zonder nuldelers en dus een eindig lichaam is. Er volgt [7, p. 23] dat de eenhedengroep M^* cyclisch is, en dus wordt voortgebracht door een zekere m .

Omdat D geen lichaam is, volgt $D \neq M$, en dus is $D \setminus M$ niet leeg. Neem een $d \in D \setminus M$. Nu volgt uit 5.5.5 dat D een associatieve deelring $R \subset D$ bevat met $d, m \in R$. Omdat geldt $m \in R$ volgt $M \subset R$, en omdat geldt $d \notin M$ volgt $M \subsetneq R$. We hebben nu een associatieve deelring $R \subset D$ gevonden met $M \subsetneq R$, maar dit is in tegenspraak met het feit dat D maximaal was. We vinden dus een tegenspraak en kunnen concluderen dat zo'n tegenvoorbeeld niet bestaat. \square

Hieruit volgt een opmerkelijk verband.

Gevolg 5.5.6. *Voor projectieve vlakken van eindige orde zijn de Moufang-, Desargues-, en Papposeigenschap equivalent.* \square

Referenties

- [1] Martin Aigner & Günter Ziegler (2003), *Proofs from THE BOOK*, 3e ed., Springer.
- [2] E. Artin (1957), *Geometric Algebra*, Interscience Publishers.
- [3] Arno Cronheim (1953), *A Proof of Hessenberg's Theorem*, Proceedings of the Am. Math. Soc., 4(2), 219-221.
- [4] Marshall Hall (1976), *The Theory of Groups*, MacMillan Company.
- [5] Daniel R. Hughes & Fred C. Piper (1973), *Projective Planes*, Springer-Verlag.
- [6] G. E. Moorhouse (2010), *Projective Planes of Small Order*, <http://www.uwo.edu/moorhouse/pub/planes/>
- [7] Peter Stevenhagen (2011), *Algebra III*, Universiteit Leiden: Mathematisch Instituut.
- [8] Fredrick W. Stevenson (1972), *Projective Planes*, W. H. Freeman and Company.