

C.J. Meerman

Lijstkleuring van grafen

Bachelorscriptie 10 juni 2010

Email: cjmeerman@gmail.com

Scriptiebegeleider: Dr. D. C. Gijswijt



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Inleiding | 3 |
| 2 | Bipartiete grafen | 5 |
| 3 | Lijngrafen van bipartiete grafen | 10 |
| 4 | Intervalgrafen | 16 |
| | Referenties | 19 |

1 Inleiding

Beschouw een graaf $G = (V, E)$ waarbij V de verzameling van knooppunten en E de verzameling van takken is. Er wordt aangenomen dat als G gekleurd moet worden, de graaf geen lussen en parallelle takken bevat.

Definitie 1. Een *kleuring* van G met de *kleurverzameling* C is een afbeelding $c : V \rightarrow C$ zodanig dat $(i, j) \in E \Rightarrow c(i) \neq c(j)$.

Een belangrijk begrip bij de kleuringstheorie is het kleurgetal, ofwel het minimum aantal elementen van de verzameling C waarmee een graaf G gekleurd kan worden. Het kleurgetal van een graaf G wordt aangeduid met $\chi(G)$.

Nu is ook in te zien dat grafen met lussen niet gekleurd kunnen worden en dat parallelle takken geen extra eis geven voor de kleuring.

Definitie 2. Een *lijstkleuring* is een kleuring $c : V \rightarrow \bigcup_{v \in V} C(v)$ met $c(v) \in C(v)$ voor elke $v \in V$, waarbij elk knooppunt $v \in V$ van tevoren een lijst kleuren $C(v)$ toegewezen heeft gekregen.

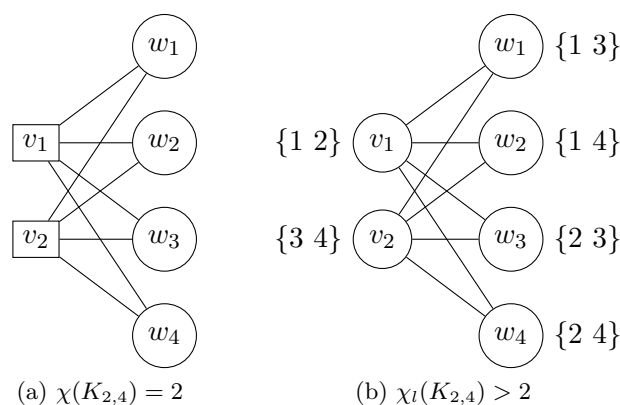
In de lijstkleuringstheorie is het lijstkleurgetal van groot belang. Dit is het kleinste getal k zodanig dat voor elke lijst van kleurenverzamelingen $\{C(v)\}_{v \in V}$ met $|C(v)| = k$ voor alle $v \in V$, er een lijstkleuring bestaat. Het lijstkleurgetal van een graaf G wordt genoteerd als $\chi_l(G)$.

Omdat een kleuring een speciaal geval is van een lijstkleuring, namelijk als voor alle $v, w \in V : C(v) = C(w)$, is de volgende relatie tussen het kleurgetal en het lijstkleurgetal van toepassing:

$$\text{Voor alle grafen } G \text{ geldt } \chi(G) \leq \chi_l(G).$$

Voor sommige grafen geldt er een gelijkheid, maar de ongelijkheid kan ook strikt zijn zoals te zien is bij onderstaande graaf.

Voorbeeld 1.



Figuur 1: De graaf $K_{2,4}$ is wel 2-kleurbaar, maar niet 2-lijstkleurbaar.

Het eerste figuur is te kleuren met twee kleuren; kleur de knooppunten v_1 en v_2 met kleur 1 en de knooppunten w_1, w_2, w_3 en w_4 met kleur 2. Bij het tweede figuur is dit echter niet het geval. Als men begint met het kleuren van knooppunt v_1 zijn er twee mogelijkheden. Of de knooppunten v_1, w_1 en w_2 hebben respectievelijk de kleuren 1, 3 en 4, waardoor knooppunt v_2 niet meer gekleurd kan worden. Of de knooppunten v_1, w_3 en w_4 hebben respectievelijk de kleuren 2, 3 en 4, wat ervoor zorgt dat knooppunt v_2 weer niet gekleurd kan worden. Voor de graaf $K_{2,4}$ geldt dus $\chi(K_{2,4}) = 2$ en $\chi_l(K_{2,4}) > 2$.

In dit artikel wordt voor een aantal soorten grafen op de relatie tussen het kleurgetal en het lijstkleurgetal dieper ingegaan.

- (i) Voor een bipartiete graaf G is er geen expliciete relatie tussen $\chi(G)$ en $\chi_l(G)$ bekend. In dit hoofdstuk zullen meerdere onder- en bovengrenzen bepaald worden. Eveneens zal de asymptotiek van $\chi_l(K_{n,n})$ bewezen worden, waarbij het idee van het bewijs van Erdős, Rubin en Taylor afkomstig is[1].
- (ii) Voor een intervalgraaf G blijkt $\chi(G) = \chi_l(G) = \omega(G)$, waarbij $\omega(G)$ de grootte van de grootste klik van de graaf is.
- (iii) Voor een lijngraaf H van een bipartiete multigraaf G zal het bewijs gegeven worden voor de relatie $\chi(H) = \chi_l(H) = \omega(H)$ aan de hand van een artikel van Galvin[2].

2 Bipartiete grafen

Hoewel de bipartiete graaf een van de eenvoudigste grafen is om te kleuren, is er toch geen expliciete uitdrukking bekend voor het lijstkleurgetal.

Definitie 3. Een graaf $G = (V, E)$ heet *bipartiet* als zijn knooppuntenverzameling V in twee niet-lege verzamelingen V_1 en V_2 gesplitst kan worden zodanig dat elk element uit E een uiteinde heeft in V_1 en een in V_2 .

Als alle knooppunten van V_1 verbonden zijn met alle knooppunten van V_2 , spreekt men van een volledige bipartiete graaf. Als de graaf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ een volledige bipartiete graaf is met $|V_1| = m$ en $|V_2| = n$, dan wordt G ook wel genoteerd als $G = K_{m,n}$.

Omdat een tak altijd verbonden is met zowel een knooppunt uit V_1 als een knooppunt uit V_2 , is het kleurgetal van een bipartiete graaf gelijk aan twee; kleur alle knooppunten uit V_1 met de ene kleur en alle knooppunten uit V_2 met de andere. Voor het lijstkleurgetal van bipartiete grafen is er echter geen mooie uitdrukking te vinden; de ongelijkheid voor het kleurgetal en het lijstkleurgetal kan zelfs strikt zijn, zoals te zien is in Voorbeeld 1.

Als een graaf $G = (V, E)$ k -lijstkleurbaar is, wil dat zeggen dat G lijstkleurbaar is voor willekeurige kleurenverzamelingen met $|C(v)| = k$ voor alle $v \in V$. Voor volledige bipartiete grafen, ongeacht de grootte van de knooppuntenverzameling, is er een bovengrens voor $\chi_l(K_{m,n})$ bekend.

Stelling 1. $K_{m,n}$ is k -lijstkleurbaar voor alle $k \geq \min\{m, n\} + 1$.

Bewijs. Zij $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ een volledige bipartiete graaf, met $|V_1| = m$, $|V_2| = n$. Stel $m \leq n$. Laat voor elk knooppunt v een lijst kleuren $L(v)$ gegeven zijn zodanig dat $|L(v)| = k$ voor alle $v \in V_1 \cup V_2$ met $k \geq m + 1$.

Voor alle $v \in V_1$ kiezen we een willekeurige kleur uit $L(v)$. Omdat geen van deze knooppunten met elkaar is verbonden, is het een toegestane kleuring.

Bekijk nu een knooppunt $v \in V_2$. Dit knooppunt is verbonden met m knooppunten uit V_1 en in het meest ingewikkelde geval zijn er dus m kleuren waarmee knooppunt v niet gekleurd mag worden. Omdat $L(v)$ meer elementen bevat dan m , is er dus altijd minstens een kleur waarmee v gekleurd kan worden zodanig dat er een toegestane lijstkleuring ontstaat.

Voor $n < m$ gaat het bewijs analoog.

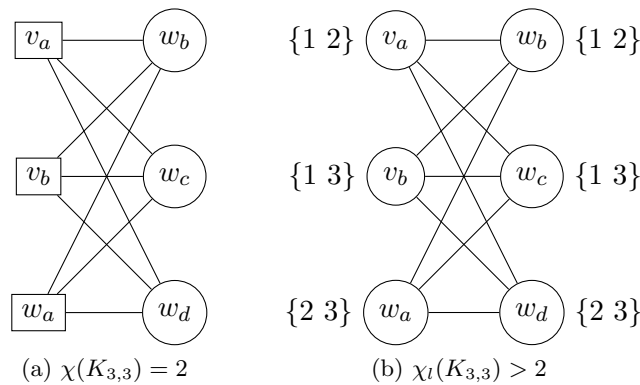
Hiermee kan de conclusie getrokken worden dat $K_{m,n}$ k -lijstkleurbaar is voor alle $k \geq \min\{m, n\} + 1$. □

Uit deze stelling volgt voor het lijstkleurgetal van de graaf $G = K_{m,n}$ het volgende: $\chi_l(G) \leq \min\{m, n\} + 1$. Maar voor een beperkt aantal waarden van m is het lijstkleurgetal expliciet bekend.

Neem $m = 2$. Uit Voorbeeld 1 volgt $\chi_l(K_{2,n}) > 2$ voor $n \geq 4$. Uit Stelling 1 volgt $\chi_l(K_{2,n}) \leq 3$ voor $n > 1$. Dus geldt voor $n > 3$ de gelijkheid $\chi_l(K_{2,n}) = 3$. Voor $n = 1, 2, 3$ is makkelijk na te gaan dat er geldt $\chi_l(K_{2,n}) = 2$.

Onderstaand voorbeeld laat zien dat de graaf $K_{3,3}$ met twee kleuren gekleurd kan worden; de vierkanten knopen hebben een kleur en de cirkels een andere. Met de toewijzingen van de lijsten zoals ze gegeven zijn in het tweede figuur is na te gaan dat de graaf dan niet met twee kleuren gekleurd kan worden, waardoor geldt $\chi_l(K_{3,3}) > 2$.

Voorbeeld 2.

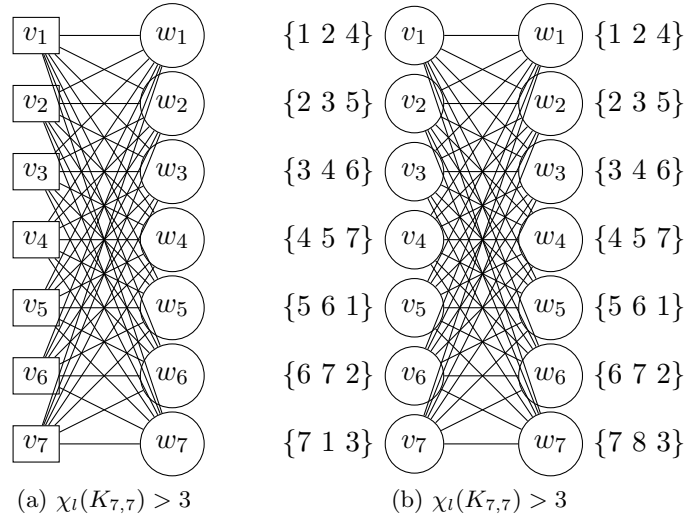


Figuur 2: Er geldt $\chi(K_{3,3}) = 2$, maar $\chi_l(K_{3,3}) = 3$.

Voor $m = 3$ is makkelijk na te gaan dat de gelijkheid $\chi_l(K_{3,n}) = 2$ voor $n = 1, 2$. Bovenstaand voorbeeld laat zien dat voor $n > 2$ de ongelijkheid $\chi_l(K_{3,n}) > 2$ van toepassing is.

Voor de graaf $K_{7,7}$ is er een ondergrens bekend. Met onderstaande lijsten is de graaf niet te kleuren. Immers, elke willekeurige verzameling kleuren waar de knooppunten v_1, \dots, v_7 mee gekleurd worden, bevat een drietal kleuren dat correspondeert met een lijst horende bij een van de knooppunten w_1, \dots, w_7 .

Voorbeeld 3.



Figuur 3: De graaf $K_{7,7}$ is 2-kleurbaar, maar niet 3-lijstkleurbaar.

Voor de graaf $G = K_{n,n^n}$ is er wel een expliciete waarde voor het lijstkleurgetal bekend.

Stelling 2. *Zij $G = K_{n,n^n}$. Dan geldt er $\chi_l(G) = n + 1$.*

Bewijs. Uit Stelling 1 volgt dat K_{n,n^n} $(n + 1)$ -lijstkleurbaar is. Als K_{n,n^n} niet n -lijstkleurbaar is, dan geldt dus $\chi_l(K_{n,n^n}) = n + 1$. Aan de hand van een voorbeeld laten we zien dat K_{n,n^n} niet n -lijstkleurbaar is.

Zij $K_{n,n^n} = (X \cup Y, E)$ gegeven, waarbij $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{n^n}\}$. De lijsten $L(v)$ worden als volgt gedefinieerd zodanig dat $|L(v)| = n$ voor elk knooppunt $v \in X \cup Y$. Bij knooppunt $x_i \in X$ hoort de lijst $L(x_i) = \{(i - 1)n + 1, \dots, in\}$ en de lijsten horende bij de knooppunten van Y zijn de verschillende combinaties van n elementen waarbij het j -de element uit $L(x_j)$ gekozen wordt.

Voor elke mogelijke keuze van kleuren van de knooppunten uit X , is er een knooppunt uit Y dat precies die elementen (en alleen die) in zijn lijst heeft staan, waardoor dit knooppunt niet meer gekleurd kan worden zodanig dat er een toegestane lijstkleuring ontstaat.

Dus is K_{n,n^n} niet n -lijstkleurbaar, waaruit volgt $\chi_l(K_{n,n^n}) = n + 1$. □

Hoewel er voor andere volledige bipartiete grafen geen expliciete uitdrukking voor het lijstkleurgetal bekend is, is er zowel een onder- als bovengrens bekend. Deze ongelijkheden zijn in 1979 bewezen door P. Erdős, A.L. Rubin en H. Taylor[1].

Stelling 3. *Zij $G = K_{n,n}$ een volledige bipartiete graaf. Dan zijn er constanten C_1, C_2 zodanig dat er geldt*

- (i) $\chi_l(G) \leq C_1 \log(n)$ voor $n > 1$.

(ii) $\chi_l(G) \geq C_2 \log(n)$ voor $\log(n) > 121 \log(6)$.

Bewijs. (i) Zij $G = K_{n,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ een volledige bipartiete graaf. Laat elk knooppunt $v \in (X \cup Y)$ een lijst kleuren $C(v)$ met grootte $|C(v)| = k$ hebben. Laat C de verzameling van deze lijsten zijn.

Zij $B \subseteq C$ een verzameling kleuren met de volgende eigenschappen:

- (i) $\forall v \in V_1 \exists c \in C$ zodanig dat $c \in C(v) \wedge c \notin B$.
- (ii) $\forall v \in V_2$ geldt $\exists c \in C(v)$ zodanig dat $c \in B$.

In totaal zijn er 2^K deelverzamelingen van C mogelijk; elke kleur wordt namelijk of wel of niet gekozen.

Kleur alle knooppunten uit V_2 met een kleur uit B ; dit is mogelijk vanwege eigenschap (i). Kleur alle knooppunten uit V_1 met een kleur die geen element is van B ; dit kan vanwege eigenschap (ii). De graaf G heeft dus een lijstkleuring als er zo'n verzameling B bestaat.

Bekijk een knooppunt $v \in V_1$. Er zijn dan 2^{K-k} deelverzamelingen van C waar geen enkel element een element is van $C(v)$. Dit geldt voor elk knooppunt uit V_2 . In ieder geval zijn er minstens $(2^k - n) \frac{2^K}{2^k}$ verzamelingen die aan eigenschap (i) voldoen.

Bekijk een knooppunt $v \in V_2$. Er zijn 2^{K-k} deelverzamelingen van C waar $C(v)$ helemaal in bevat is. Dit geldt voor elk knooppunt uit V_2 . In ieder geval zijn er minstens $(2^k - n) \frac{2^K}{2^k}$ verzamelingen die aan eigenschap (ii) voldoen.

Om een verzameling B te laten bestaan is het voldoende dat er geldt $2^k - n > 0$, ofwel $n < 2^k$.

Dus er geldt $\chi_l(K_{n,n}) \leq C_1 \log(n)$ met C_1 een constante.

(ii) Zij $G = K_{n,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ een volledige bipartiete graaf. Stel $\frac{\log(n)}{\log(6)} > 121$. Laat $k = \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(6)} \right\rfloor > 120$.

De volgende ongelijkheden zijn van toepassing

$$\begin{aligned}
 n &\geq 6^k && \text{vanwege } \log(n) \geq k \log(6) \\
 &> 7k^2 2^k e^k && \text{vanwege } \left(\frac{6}{2e}\right)^k > 7k^2, \text{ want } k > 120 \\
 &> 7k^2 \left(\frac{2^k k^k}{k!}\right) && \text{vanwege } e^k > \frac{k^k}{k!} \\
 &> 7k^2 \binom{2k-1}{k} && \text{vanwege } \frac{2k}{1} \frac{2k}{2} \dots \frac{2k}{k} > \frac{k+1}{1} \frac{k+2}{2} \dots \frac{2k-1}{k-1} \\
 &> \binom{2k-1}{k}
 \end{aligned}$$

Neem zonder verlies der algemeenheid aan $n = \binom{2k-1}{k}$. Als deze graaf niet k -lijstkleurbaar is, dan is een graaf die meer knooppunten heeft dan $\binom{2k-1}{k}$ dat ook niet.

Laat S een verzameling kleuren zijn met $2k - 1$ elementen. Zij $\binom{2k-1}{k}$ de verschillende k -deelverzamelingen ervan. Definieer de lijsten van de knooppunten als de k -deelverzamelingen zodanig dat elk knooppunt uit V_1 een andere lijst krijgt. Hetzelfde geldt voor de knooppunten uit V_2 .

Voor elke verzameling van $k - 1$ kleuren geldt voor een knooppunt uit V_1 dat die $k - 1$ kleuren niet in zijn lijst voorkomen. Dit geldt ook voor een knooppunt uit V_2 . Dat betekent dus dat er minstens $2k$ kleuren nodig zijn om de graaf te kleuren, laat staan de graaf van een lijstkleuring te voorzien.

Hieruit volgt dan dat $\chi_l(K_{n,n}) > k$, ofwel $\chi_l(K_{n,n}) \geq C_2 \log(n)$ met C_2 een constante.

□

Voor volledige bipartiete grafen zijn dus de volgende relaties bewezen

- (1) $K_{m,n}$ is k -lijstkleurbaar voor alle $k \geq \min\{m, n\} + 1$.
- (2) Er geldt $\chi_l(K_{n,n^n}) = n + 1$.
- (3) Er bestaat een constante C_1 zodanig dat $\chi_l(K_{n,n}) \leq C_1 \log(n)$ voor $n > 1$.
- (4) Er bestaat een constante C_2 zodanig dat $\chi_l(K_{n,n}) \geq C_2 \log(n)$ voor $n > 6^{121}$.

3 Lijngrafen van bipartiete grafen

Hoewel het lijstkleurgetal voor bipartiete grafen niet expliciet bepaald kan worden, is dat wel het geval voor het lijstkleurgetal van de lijngraaf van een bipartiete graaf.

Jeff Dinitz heeft in 1978 het Dinitz-vermoeden geformuleerd[3]. Zij gegeven een $n \times n$ -matrix waar bij elke cel (i, j) een lijst kleuren $C(i, j)$ gegeven is met $|C(i, j)| = n$. Kan de matrix gekleurd worden zodanig dat elk tweetal cellen op dezelfde rij of kolom een andere kleur krijgt?

In grafentheorie kan dit vermoeden vertaald worden door de matrix te laten representeren door de lijngraaf G van een bipartiete volledige graaf $K_{n,n}$.

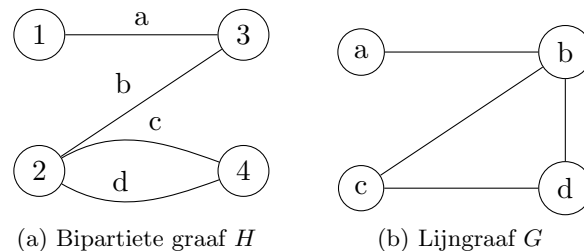
De vraag wordt dan: $\chi_l(G) = n$?

Tegenwoordig is het vermoeden van Dinitz geen vermoeden meer, maar een stelling. In 1995 heeft Fred Galvin namelijk $\chi(G) = \chi_l(G)$ bewezen waarbij G de lijngraaf is van een willekeurige bipartiete multigraaf[2]. Het antwoord op het Dinitz vermoeden is een speciaal geval van deze stelling.

Voordat deze stelling bewezen kan worden, zijn er nog enkele definities en lemma's nodig.

Definitie 4. De lijngraaf G van de graaf $H = (V, E)$ wordt als volgt geconstrueerd. De knooppunten van G corresponderen met de takken van H . Twee knooppunten van G zijn met elkaar verbonden als de bijbehorende takken in de graaf H een gezamenlijk eindknooppunt hebben.

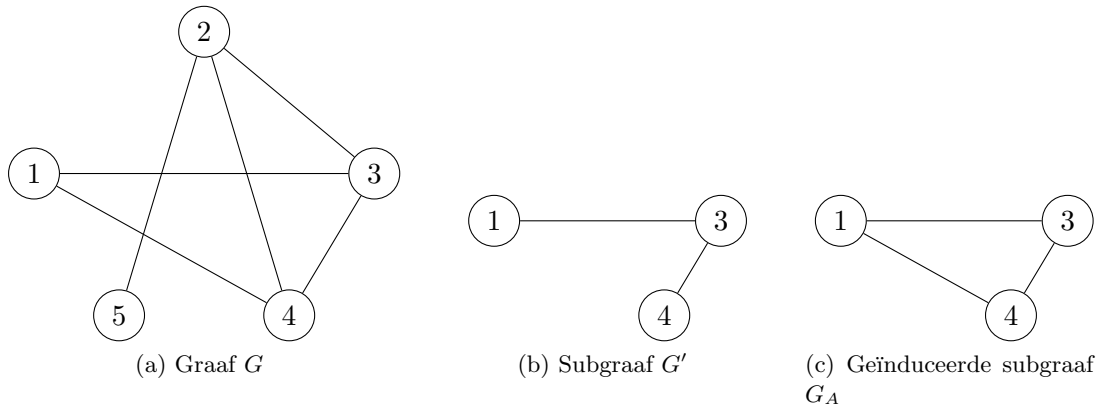
Voorbeeld 4.



Figuur 4: Een bipartiete graaf H en zijn bijbehorende lijngraaf G

Bij grafen kan men spreken over subgrafen en geïnduceerde subgrafen. Zij gegeven een graaf $G = (V, E)$. Een graaf $G' = (V', E')$ is een subgraaf van G als $V' \subseteq V$ en $E' \subseteq E$. Laat $A \subseteq V$ een deelverzameling zijn. De graaf G_A heet een geïnduceerde subgraaf van G als de knooppunten van G_A de elementen van A zijn en als alle takken van G die verbonden zijn met alleen elementen uit A ook takken van G_A zijn.

Voorbeeld 5.



Figuur 5: Graaf G , een subgraaf G' en een geïnduceerde subgraaf G_A met $A = \{1, 3, 4\}$

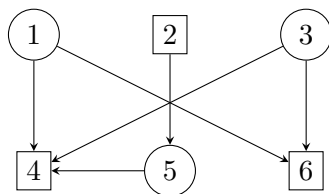
Zij gegeven een graaf $G = (V, E)$. Een verzameling $A \subseteq V$ is onafhankelijk als G_A geen takken bevat, ofwel als de knooppunten van A in de oorspronkelijke graaf G niet met elkaar verbonden zijn.

Als de takken van een graaf G een oriëntatie hebben, spreekt men van een gerichte graaf. Een gerichte graaf wordt genoteerd als $\vec{G} = (V, \vec{E})$. Met de notatie $u \rightarrow v$ wordt aangeduid $(u, v) \in \vec{E}$.

Definitie 5. Zij $\vec{G} = (V, \vec{E})$ een gerichte graaf. Een kern $K \subseteq V$ is een deelverzameling van de knooppunten zodanig dat

- K onafhankelijk is.
- $\forall u \notin K \exists v \in K$ met $u \rightarrow v$.

Voorbeeld 6.



Figuur 6: Een kern van deze graaf is bijvoorbeeld $K = \{2, 4, 6\}$.

De graad $d(v)$ van een knooppunt v is het aantal takken dat verbonden is met v . Bij gerichte grafen kan men ook spreken over in- en uitgraden van een knooppunt. De ingraad van een knooppunt v is het aantal pijlen dat v als eindpunt heeft en de uitgraad van v is het aantal pijlen dat v als beginpunt heeft. De ingraad en uitgraad van knooppunt v

worden genoteerd met $d^+(v)$ respectievelijk $d^-(v)$. De verzameling van de buren waar een pijl naartoe gaat van een knooppunt v en het knooppunt zelf wordt ook wel een gesloten omgeving genoemd: $N[v] = \{u : v \rightarrow u \text{ of } u = v\}$.

De functies $f, g : V \rightarrow \mathbb{N}$ geven per knooppunt respectievelijk aan met hoeveel kleuren een knooppunt gekleurd moet worden en wat de grootte is van de lijst kleuren. Als de graaf vervolgens gekleurd kan worden, heet een graaf $(f : g)$ -kiesbaar.

Definitie 6. Gegeven een graaf $G = (V, E)$ en twee functies $f, g : V \rightarrow \mathbb{N}$. Dan is G $(f : g)$ -kiesbaar als voor elke combinatie van lijsten van kleurenverzamelingen $C(v)$ met voor elke $v \in V : |C(v)| = f(v)$, er $B(v) \subseteq C(v)$ met $|B(v)| = g(v)$ bestaan zodanig dat als $(u, v) \in E$, dan $B(u) \cap B(v) = \emptyset$.

Lemma 1. Zij $\vec{G} = (V, \vec{E})$ een gerichte graaf waarvan elke geïnduceerde gerichte subgraaf een kern bevat. Als voor $f, g : V \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f(v) \geq \sum_{u \in N[v]} g(u)$ als $g(v) > 0$, dan is G $(f : g)$ -kiesbaar.

Bewijs. We maken gebruik van inductie naar $\sum_{v \in V} g(v)$.

Voor $\sum_{v \in V} g(v) = 0$ valt er niets te bewijzen. Bekijk nu een gerichte graaf $\vec{G} = (V, \vec{E})$ met functies $f, g : V \rightarrow \mathbb{N}$ zodanig dat $f(v) \geq \sum_{u \in N[v]} g(u)$ als $g(v) > 0$.

Laat $W = \{v \in V : g(v) > 0\}$, waarbij we mogen aannemen dat $W \neq \emptyset$. Laat voor elk knooppunt $v \in V$ een verzameling kleuren $C(v)$ gegeven zijn met $|C(v)| = f(v)$. Kies een kleur $c \in \bigcup_{v \in V} C(v)$ en laat $A(c) = \{v \in W : c \in C(v)\}$. Per aanname heeft de geïnduceerde subgraaf $G_{A(c)}$ een kern K .

Kleur alle knooppunten uit K met de gekozen kleur c . Definieer vervolgens $g' : V \rightarrow \mathbb{N}$ door $g'(v) := g(v) - 1$ voor $v \in K$ en $g'(v) := g(v)$ voor de overige knooppunten en $f' : V \rightarrow \mathbb{N}$ door $f'(v) := |C(v) \setminus \{c\}|$. Voor de functie g' geldt er nu

$$\sum_{v \in V} g'(v) = \sum_{v \in K} \{g(v) - 1\} + \sum_{v \notin K} g(v) \leq \sum_{v \in V} g(v)$$

en voor de functie f' geldt er

$$\begin{aligned} f'(v) &= f(v) && \geq \sum_{u \in N[v]} g(u) && \text{voor } v \notin A(c) \\ f'(v) &= f(v) - 1 && \geq \sum_{u \in N[v]} g(u) - 1 \geq \sum_{u \in N[v]} g'(u) && \text{voor } v \in A(c) \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid geldt vanwege de eigenschap van een kern; er bestaat tenminste één $u \in N[v]$ waarvoor $g'(u) = g(u) - 1$.

Uit de inductiehypothese volgt dat $G(f' : g')$ -kiesbaar is. Dit betekent dat er verzamelingen $B'(v) \subseteq C(v) \setminus \{c\}$ met $|B'(v)| = g'(v)$ bestaan zodanig dat $B'(u) \cap B'(v) = \emptyset$ als $(u, v) \in E$.

Definieer vervolgens de verzamelingen $B(v) \subseteq C(v)$ als volgt $B(v) := B'(v) \cup \{c\}$ als $v \in K$ en $B(v) := B'(v)$ voor de overige knooppunten. Dan geldt er $|B(v)| = g(v)$ voor alle $v \in V$ en $B(u) \cap B(v) = \emptyset$ als $(u, v) \in E$.

Hieruit volgt dat $G = (V, E)$ $(f : g)$ -kiesbaar is. □

Een graaf $G = (V, E)$ heet $(m : n)$ -kiesbaar als hij $(f : g)$ -kiesbaar is voor de constante functies $f(v) = m$ en $g(v) = n$.

Gevolg 1. Zij $\vec{G} = (V, \vec{E})$ een gerichte graaf met maximale uitgaande graad $n - 1$. Stel dat elke geïnduceerde gerichte subgraaf een kern bevat. Dan is G $(kn : k)$ -kiesbaar.

Bewijs. Omdat de maximale uitgaande graad $n - 1$ is, geldt voor alle knooppunten $v \in V : |\{N[v]\}| \leq n$. Hieruit volgt dat er voor elke $v \in V$ geldt

$$f(v) = kn \geq \sum_{u \in N[v]} g(u).$$

Met het toepassen van Lemma 1 wordt het gewenste resultaat verkregen. □

Voor het tweede lemma wordt er weer gekeken naar een bipartiete graaf $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Een verzameling $M \subseteq E$ heet een koppeling als geen tweetal takken eenzelfde eindknooppunt heeft.

Voor elk knooppunt $v \in V_1 \cup V_2$ wordt er een lineaire ordening $O(v)$ op $\delta(v)$ geconstrueerd, zodat er gekeken kan worden naar stabiele koppelingen.

Definitie 7. Een koppeling M van de graaf $G = (X \cup Y, E)$ heet stabiel als het volgende geldt: als $(x, y) \in (E \setminus M)$, $x \in X, y \in Y$, dan is een van de volgende situaties van toepassing

- (i) $\exists w \in Y$ met $(x, w) \in M$ en $(x, w) > (x, y)$ in $O(x)$.
- (ii) $\exists z \in X$ met $(z, y) \in M$ en $(z, y) > (x, y)$ in $O(y)$.

Een koppeling M heet instabiel als de koppeling niet stabiel is. In 1962 hebben Gale en Shapley bewezen dat er altijd een stabiele koppeling te vinden is; de stelling daarvan wordt ook wel de huwelijksstelling genoemd[4]

Lemma 2. Zij $G = (X \cup Y, E)$ een bipartiete graaf waarbij X de verzameling mannen en Y de verzameling vrouwen genoemd wordt. De takken in de graaf worden gezien als de aanzoeken die gedaan worden; twee parallelle takken representeren dus twee verschillende aanzoeken aan dezelfde vrouw. Als er voor alle knooppunten $v \in V$ een lineaire ordening op $\delta(v)$ bestaat, dan bestaat er altijd een stabiele koppeling M .

Bewijs. Pas het volgende algoritme toe:

- (1) Alle mannen $x \in X$ doen een aanzoek aan hun eerste keus van de vrouwen $y \in Y$.
- (2) Als de vrouwen $y \in Y$ een aanzoek hebben gekregen, zetten ze de bijbehorende $x \in X$ in hun wachtrij. Mochten er vrouwen zijn die meerdere aanzoeken hebben gekregen, dan kiezen ze daaruit het aanzoek dat ze het leukst vinden. De mannen die niet door een vrouw op een wachtrij zijn gezet, vormen samen de reserve R .

- (3) De mannen uit R doen een aanzoek aan hun tweede keus van de vrouwen.
- (4) De vrouwen die een aanzoek hebben gekregen, vergelijken dat aanzoek met het eventuele aanzoek uit hun wachtrij, waarvan ze de leukste van allen weer op haar wachtrij zet. De afgewezen mannen vormen samen weer de reserve R .
- (5) Dit herhaalt zich totdat R leeg is. Als een man uit R een aanzoek doet aan zijn laatste keus van de vrouwen en hij wordt weer afgewezen, komt hij niet meer terug in R . Merk op dat het algoritme stopt na een eindige tijd.

We zullen nu bewijzen dat dit algoritme ook daadwerkelijk een stabiele koppeling oplevert.

Zij M de verzameling takken die gegeven wordt door het algoritme. Als een vrouw een man heeft en er wordt een leuker aanzoek gedaan, dan plaatst ze de man horende bij het mindere aanzoek in de reserve R . Elke vrouw heeft dus hoogstens één man. Als een man door een vrouw is gekozen, gaat hij niet meer verder met vragen; ook elke man heeft dus hoogstens één vrouw. Dus is M een koppeling.

Nu moet er nog bewezen worden dat M stabiel is. Stel $(x, y) \in (E \setminus M)$, dan zijn er twee mogelijkheden:

- (i) Man x heeft een aanzoek gedaan aan vrouw y en dat aanzoek is afgewezen, waaruit volgt dat y een leuker aanzoek heeft gekregen. Er geldt dan $(x', y) \in M$ met $(x', y) > (x, y)$ in $O(y)$.
- (ii) Man x heeft nooit een aanzoek hoeven doen aan vrouw y , omdat x reeds eerder met een leuker aanzoek is geaccepteerd door een vrouw. Er geldt dan $(x, y') \in M$ met $(x, y') > (x, y)$ in $O(x)$.

De koppeling M voldoet dus aan de definitie van stabiele koppeling. □

Een bipartiete multigraaf is een bipartiete graaf waar ook parallelle takken in voor kunnen komen. In dit artikel hebben de multigrafen geen lussen. Met behulp van bovenstaande lemma's zal er nu bewezen worden dat een lijngraaf G van een bipartiete multigraaf H aan de gelijkheid $\chi(G) = \chi_l(H)$ voldoet.

Stelling 4. *Zij $H = (V_1 \cup V_2, E)$ een bipartiete multigraaf, laat G de lijngraaf van H zijn en stel dat G n -kleurbaar is. Dan is G $(kn : k)$ -kiesbaar voor elke k .*

Bewijs. Laat $V = V(G) = E(H)$ en $E = E(G)$. Aangezien H een bipartiete multigraaf is, kunnen we zijn knooppuntenverzameling opdelen in twee verzamelingen V_1 en V_2 . Voor $v \in V_1 \cup V_2$ noemen we de verzameling $\{w \in V : w \text{ is verbonden met } v\}$ een rij als $v \in V_1$ en een kolom als $v \in V_2$. Dit betekent dus dat twee elementen van V met elkaar verbonden zijn als ze in dezelfde rij en/of kolom zitten. Laat $R(v)$ en $K(v)$ de rij respectievelijk de kolom zijn die v bevat.

Laat $g : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ een toegestane kleuring zijn, dit is per aanname mogelijk. Laat de ordening op H als volgt gedefinieerd zijn, met $e, f \in E(H)$.

- (i) Een knooppunt $v \in V_1$ vindt e leuker dan f als $g(e) > g(f)$.
- (ii) Een knooppunt $v \in V_2$ vindt e leuker dan f als $g(e) < g(f)$.

De oriëntatie van G wordt als volgt geconstrueerd. Er is een tak van e naar f als

- (i) $R(e) = R(f)$ en $g(e) > g(f)$.
- (ii) $K(e) = K(f)$ en $g(e) < g(f)$.

Als H twee parallelle takken, zeg e en f , heeft, dan wordt de tak tussen de bijbehorende knooppunten e en f in de graaf G vervangen door twee pijlen die tegengestelde richting hebben.

Omdat g een toegestane kleuring is, betekent het dus dat $d^+(v) < n$ voor alle $v \in V$.

Om Gevolg 1 te kunnen toepassen, moeten we bewijzen dat elke geïnduceerde subgraaf van \vec{G} een kern bevat, waarvoor we de huwelijksstelling willen toepassen. Zij $A \subseteq V$ een deelverzameling van de knooppunten van G . Laat $G_A = (A, E_A)$ de geïnduceerde subgraaf zijn en laat H_A de bijbehorende deelgraaf van H zijn. De knooppuntenverzameling van H_A en H zijn hetzelfde en de takken van H zijn de corresponderende elementen uit A . De oriëntatie van G wordt gebruikt om van G_A een gerichte graaf \vec{G}_A te maken en de voorkeursrangorde van H wordt overgenomen om H_A een voorkeursrangorde toe te kennen.

Lemma 3 geeft een stabiele koppeling M voor de graaf H_A . Dit is een kern van de graaf G_A . Immers:

- M is onafhankelijk in G_A , want in H_A heeft geen tweetal takken van M een gezamenlijk knooppunt.
- Als $(x, y) \in E_A \setminus M$, dan kunnen er twee situaties voorkomen
 - $(x, y') \in M$ met $(x, y') > (x, y)$ in $O(x)$. Dit betekent voor de oriëntatie in graaf G_A dat er geldt $(x, y) \rightarrow (x, y')$.
 - $(x', y) \in M$ met $(x', y) > (x, y)$ in $O(y)$. Dit betekent voor oriëntatie in graaf G_A dat er geldt $(x, y) \rightarrow (x', y)$.

Als Gevolg 1 vervolgens toegepast wordt, kan er geconcludeerd worden dat de lijngraaf van een bipartiete multigraaf $(kn : k)$ -kiesbaar is. \square

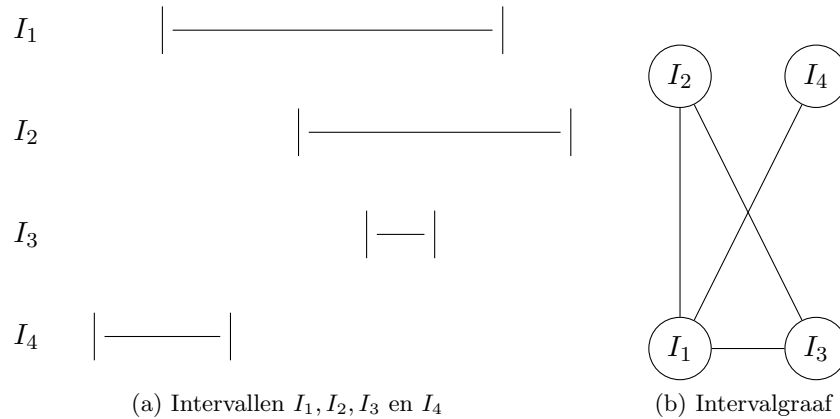
De conclusie is dus dat voor de lijngraaf G van een bipartiete multigraaf de relatie $\chi(G) = \chi_l(G)$ geldt.

Of de gelijkheid geldt voor alle lijngraafen is nog steeds een open probleem in de grafentheorie.

4 Intervalgrafen

Zij $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ een n -tal gegeven intervallen, met $I_j = [a_j, b_j]$ $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Een intervalgraaf $G = (V, E)$ wordt als volgt geconstrueerd. De knooppunten van G corresponderen met de verschillende intervallen. Twee knooppunten van G zijn met elkaar verbonden als de corresponderende intervallen met elkaar overlappen.

Voorbeeld 7.



Figuur 7: Intervallen en bijbehorende intervalgraaf

Een klik is een deelverzameling van de knooppuntenverzameling zodanig dat elk tweetal knooppunten uit de klik met elkaar verbonden is. Het aantal elementen van de grootste klik in een graaf G wordt genoteerd met $\omega(G)$. Voor intervalgrafen blijkt het kleurgetal gelijk te zijn aan het aantal elementen van de grootste klik.

Stelling 5. *Als $G = (V, E)$ een intervalgraaf is, dan $\chi(G) = \omega(G)$.*

Bewijs. Laat n intervallen gegeven zijn, met een interval $I_i = [a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Orden de intervallen aan de hand van hun beginpunt, ofwel $a_i \leq a_j$ voor alle $i < j$. Laat $G = (V, E)$ de bijbehorende intervalgraaf zijn, waarbij knooppunt I_i correspondeert met interval I_i .

Loop de knooppunten nu in oplopende volgorde af, waarbij er begonnen wordt met knooppunt I_1 . Laat $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ een verzameling kleuren zijn. Kleur de knooppunten met de laagste kleur mogelijk, dan blijkt $m = \omega(G)$ te gelden. Er zijn minstens $\omega(G)$ kleuren nodig, omdat de knooppunten in K allemaal een andere kleur moeten krijgen.

Stel dat knooppunt I_k niet gekleurd kan worden met de kleuren $c_1, c_2, \dots, c_{\omega(G)}$. Dan is I_k dus verbonden met $\omega(G)$ reeds gekleurde elementen, zeg $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_{\omega(G)}}$. Aangezien de andere knooppunten al gekleurd zijn, geldt er dus $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{\omega(G)}} \leq a_k$ en omdat I_k verbonden is met al die knooppunten, geldt er ook $b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_{\omega(G)}} \geq a_k$.

Het punt a_k is dus een element van al die intervallen, dus zijn $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_{\omega(G)}}$ ook met elkaar verbonden. Hieruit volgt dat $I_k, I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_{\omega(G)}}$ samen een klik K' vormen. Omdat $|K| < |K'|$ levert het een tegenspraak op.

Dus kan elk knooppunt v_k gekleurd worden met een element uit C , waaruit volgt $\chi(G) = \omega(G)$. \square

Voor intervalgrafen blijkt ook het lijstkleurgetal gelijk te zijn aan het aantal elementen van de grootste klik. In het bewijs daarvoor wordt gebruik gemaakt van het volgende lemma.

Lemma 3. *Zij \vec{G} een gerichte graaf. Als \vec{G} minstens twee kernen heeft, dan bevat \vec{G} een gerichte even cykel.*

Bewijs. Zij K_1 en K_2 twee verschillende kernen van een gerichte graaf $\vec{G} = (V, \vec{E})$.

Stel $K_1 \subset K_2$, ofwel voor alle $u \in K_1$ geldt er $u \in K_2$ en er bestaat een $v \in K_2$ waarvoor geldt $v \notin K_1$. Bekijk een knooppunt $v \in K_2$ waarvoor geldt $v \notin K_1$. Uit de definitie van een kern volgt dat er een $w \in K_1$ bestaat zodanig dat $(v, w) \in E$. Omdat $w \in K_1$ geldt dus ook $w \in K_2$. Dit betekent dat de kern K_2 twee knooppunten bevat, namelijk v en w die verbonden zijn door middel van een tak. Dit is in tegenspraak met de eerste eigenschap van een kern, dus $K_1 \not\subseteq K_2$.

Definieer de volgende verzamelingen:

$$\begin{aligned} A &:= K_1 \setminus K_2 \\ B &:= K_2 \setminus K_1 \end{aligned}$$

Uit $K_1 \not\subseteq K_2$ volgt dat zowel A als B niet leeg kunnen zijn. Uit de definitie van een kern volgt nu

$$\begin{aligned} \forall u \in A \quad \exists x \in B \quad u \rightarrow x \\ \forall w \in B \quad \exists y \in A \quad w \rightarrow y \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat een gerichte cykel altijd een even lengte heeft. De vraag is dus of er een gerichte cykel bestaat.

Bekijk $u \in A$, dan $\exists v \in B$ met $u \rightarrow v$. Voor $v \in B \exists w \in A$ met $v \rightarrow w$. Dit principe kan voortgezet worden waardoor de volgende keten verkregen wordt $u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$, waarbij $u_i \in A$ voor alle i en $v_j \in B$ voor alle j . Omdat het aantal elementen van de verzamelingen A en B eindig is, gaat het voorkomen dat er op een gegeven moment een knooppunt bereikt wordt dat al een element is van de keten, waardoor er dus een gerichte cykel ontstaat. Dus bevat de graaf G een gerichte even cykel. \square

Gevolg 2. Zij \vec{G} een gerichte acyclische graaf. Dan heeft \vec{G} een unieke kern.

Bewijs. Zij $\vec{G} = (V, \vec{E})$ een gerichte acyclische graaf. Stel dat \vec{G} twee verschillende kernen heeft. Uit Lemma 3 volgt dan dat \vec{G} een gerichte even cykel bevat, wat in tegenspraak is met de definitie van een acyclische graaf. Dus als \vec{G} een kern bevat, dan is die uniek.

De kern K van \vec{G} wordt vervolgens als volgt gevonden. In een acyclische gerichte graaf is er een knooppunt $v \in V$ dat alleen binnenkomende pijlen bevat, wat ook wel een sink genoemd wordt. Stel namelijk dat dit niet het geval is. Bekijk dan het langste pad P wat bij knooppunt u begint en bij v eindigt. Omdat v geen sink is, bestaat er dus een knooppunt w waarvoor geldt $v \rightarrow w$. Als $w \notin P$, maak dan een nieuw pad P' door het knooppunt w toe te voegen. Dan is er een tegenspraak want P is het langste pad. Als $w \in P$ dan bevat de graaf een cykel; maar de graaf is acyclisch, dus dat levert ook een tegenspraak op. Dus het knooppunt v is een sink.

Laat w_1, w_2, \dots, w_n de burens van v zijn. Laat het knooppunt v een element worden van K en construeer de geïnduceerde subgraaf G_A met $A = V \setminus \{\bigcup_i w_i \cup v\}$. Volg nu dezelfde procedure voor de graaf G_A . De knooppunten die telkens worden weggehaald hebben allen een uitgaande pijl naar een element van K en de punten van K zijn niet met elkaar verbonden. De verzameling K is dus daadwerkelijk een kern. \square

Stelling 6. Zij G een intervalgraaf. Dan geldt er $\chi_l(G) = \omega(G)$.

Bewijs. Zij I_1, I_2, \dots, I_n met $I_j = [a_j, b_j], a_j, b_j \in \mathbb{R}$ gegeven intervallen en $G = (V, E)$ de bijbehorende intervalgraaf, waarbij knooppunt I_i correspondeert met interval I_i . Het is bekend dat $\chi_l(G) \geq \omega(G)$.

Geef G een oriëntatie op de volgende manier. Als $a_i > a_j$, dan komt er een pijl van I_i naar I_j . Stel dat $a_i = a_j$ voor twee intervallen I_i en I_j . Verander interval I_i dan door $a_i - \epsilon, 0 < \epsilon \ll 1$ als beginpunt te nemen, met ϵ zodanig gekozen dat de verzameling van intervallen waarmee I_i overlapt, hetzelfde blijft.

Stel nu dat er een pijl bestaat van I_i naar I_j en van I_i naar I_k , ofwel $a_j, a_k < a_i$. De intervallen I_j en I_k overlappen elk met interval I_i , dus $b_j, b_k > a_i$. Dit betekent dat het punt a_i een element is van de drie intervallen, dus zijn I_j en I_k ook met elkaar verbonden.

Stel dat I_i verbonden is met $I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_n}$ waarbij de pijlen het knooppunt I_i als beginpunt hebben. Uit bovenstaand argument volgt dan dat de knooppunten $I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_n}$ ook allemaal met elkaar verbonden zijn, ofwel dat $I, I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_n}$ samen een klik vormen.

De grootste klik bevat $\omega(G)$ elementen. Dus voor elk knooppunt $v \in V$ geldt $d^+(v) \leq \omega(G) - 1$.

Zij $A \subseteq V$ een deelverzameling van de knooppunten. Uit Gevolg 2 volgt dan dat de geïnduceerde subgraaf G_A een kern bevat. Gevolg 1 geeft vervolgens $\chi_l(G) = \omega(G)$. \square

Voor een intervalgraaf G bestaat dus de relatie $\chi(G) = \chi_l(G) = \omega(G)$.

Referenties

- [1] Erdős, P., Rubin, A.L. en Taylor, H., 1979. Choosability in graphs. *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 125 – 157
- [2] F. Galvin, 1994. The List Chromatic Index of a Bipartite Multigraph. *Journal of Combinatorial Theory. Series B* 63, 153–158.
- [3] Aigner, M. en Ziegler, G.M., 1998. *Proofs of the Book*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Duitsland.
- [4] Gale, D. en Shapley, L.S., 1962. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly* 69, 9–15.