De Stieltjes-integraal

Sibel Kalkan

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: Dr. O. van Gaans

4 juli 2016

Mathematische Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De Stieltjes-integraal is een generalisatie van de Riemann-integraal die vernoemd is naar Thomas Johannes Stieltjes. Deze integraal heeft hij tijdens zijn onderzoek naar kettingbreuken ontwikkeld. De Stieltjes-integraal is algemener dan de Riemann-integraal en maakt gebruik van een zogenaamde integrator. Dit is een functie g en fungeert als een gewichtsfunctie en bepaalt hoe sterk een functiewaarde van de integrand meetelt in de integraal. In de Riemann-integraal is de integrator de identieke functie, namelijk $g(t) = t$. Een toepassing van deze integraal is vooral te vinden in de waarschijnlijkheidsleer, waar g dient als een verdelingsfunctie.

Het is een algemeen bekend resultaat dat iedere continue functie Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van een stijgende functie. We hebben ons afgevraagd of een discontinue functie ook Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van een stijgende functie en of er nog variaties hierop zijn.

In hoofdstuk 2 geven we een aantal definities en stellingen die we nodig hebben voor het bewijs van de algemene stelling en bekijken we ook de Stieljes-integreerbaarheid van discontinu functies en de variaties daarop. We laten zien dat een begrensde functie f die in één punt p niet continu is, Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van een stijgende functie g, als g in dat punt p wel continu is. Het is ook voldoende als f in p rechtscontinu is en g in p linkscontinu. We kunnen dit resultaat uitbreiden naar eindig veel discontinuïteiten en functies g van begrensde variatie.

In hoofdstuk 3 behandelen we integranden met waarden in een Banachruimte. We sluiten dit hoofdstuk af door naar de Stieltjes-integreerbaarheid van functies in een Banachruimte te kijken ten opzichte van functies van begrensde variatie.

Tenslotte bekijken we in hoofdstuk 4 f reëel en g met waarden in een Banachruimte. Het stijgend zijn van g heeft dan geen betekenis. In plaats daarvan bekijken we een geschikte definitie van begrensde variatie.

2 Voorbereidende stellingen en definities

Definitie 2.1. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Een *partitie* P van het interval $[a, b]$ is een eindige verzameling $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ van punten uit $[a, b]$ met de eigenschap dat

$$a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = b.$$

Met andere woorden verdeelt een partitie P het interval $[a, b]$ in deelintervallen.

Definitie 2.2. Zij P een partitie van het interval $[a, b]$ met $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, dan is het getal $\mu(P) = \max\{(t_i - t_{i-1})|1 \leq i \leq n\}$ de *maaswijdte* van P.

De maaswijdte is de lengte van het grootste deelinterval.

Definitie 2.3. Als P_1 en P_2 beide partities zijn van het interval $[a, b]$ en $P_1 \subseteq P_2$ dan is P_2 een *fijnere partitie* dan P_1.

Definitie 2.4. Een *strooiing* Q bij de partitie $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ is een verzameling punten

$$Q = \{s_i \, | t_{i-1} \leq s_i \leq t_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

We kijken eerst naar het speciale geval van de Riemann-integraal en vervolgens definiëren we de Stieltjes-integraal.

Definitie 2.5. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. Is $Q = \{s_1, ..., s_n\}$ een strooiing bij een partitie $P = \{t_0, ..., t_n\}$ dan heet de som

$$S_f(Q, P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})$$

de *Riemann-som* van f over het interval $[a, b]$.

Definitie 2.6. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. De functie f is *Riemann-integreerbaar* over het interval $[a, b]$ als er een getal $I \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap: bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat voor iedere partitie P met maaswijdte $\mu(P) < \delta$ en iedere strooiing Q bij P voor de Riemann-som geldt

$$|S_f(Q, P) - I| < \varepsilon.$$

Het getal

$$I =: \int_a^b f(t) \, dt$$

heet dan de *Riemann-integraal* van f over het interval $[a, b]$.

Definitie 2.7. Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide functies. Is $Q = \{s_1, ..., s_n\}$ een strooiing bij een partitie $P = \{t_0, ..., t_n\}$ dan heet de som

$$S_{f,g}(Q, P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

de *Stieltjes-som* van f ten opzichte van g over het interval $[a, b]$.

Definitie 2.8. Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide functies. De functie f is *Stieltjes-integreerbaar* ten opzichte van de functie g als er een getal $I \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap: bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een partitie P_ε van $[a, b]$ zodat voor iedere fijnere partitie P van P_ε en iedere strooiing Q bij P voor de Stieltjes-som geldt

$$|S_{f,g}(Q, P) - I| < \varepsilon.$$

Het getal

$$I =: \int_a^b f(t)\, dg(t)$$

heet dan de *Stieltjes-integraal* van f ten opzichte van g over het interval $[a, b]$.

Net als in Definitie 2.6 hadden we een definitie met een maaswijdte δ kunnen geven. Echter, met de formulering als in Definitie 2.8 zijn er meer integreerbare functies.

In dit onderzoek bekijken we de Stieltjes-integreerbaarheid van discontinue functies. Hierbij hebben we eigenschappen van rechtscontinu en linkscontinu nodig die we hieronder definiëren.

Definitie 2.9. Zij f een functie gedefinieerd op een interval (a, b). Als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle y met $0 < a - y < \delta$ geldt dat $|b - f(y)| < \varepsilon$, dan heeft de functie f een *linkerlimiet* b in $x = a$.

Dit noteren we als volgt

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = b.$$

Definitie 2.10. Een functie f heet *rechtscontinu* in a als $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ bestaat en

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a).$$

Definitie 2.11. Zij f een functie gedefinieerd op een interval (a, b). Als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle y met $0 < y - a < \delta$ geldt dat $|b - f(y)| < \varepsilon$, dan heeft de functie f een *rechterlimiet* b in $x = a$.

Dit noteren we als volgt

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = b.$$

Definitie 2.12. Een functie f heet *linkscontinu* in a als $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ bestaat en

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a).$$

Het volgende lemma zullen we tweemaal gebruiken in het bewijs van Stelling 2.14.

Lemma 2.13. Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ met g stijgend. Zij P_1 en P_2 twee partities van het interval $[a, b]$ met $P_1 \subseteq P_2$ en zij Q_1 een strooiing van P_1 en Q_2 een strooiing van P_2. Dan

$$|S_{f,g}(Q_2, P_2) - S_{f,g}(Q_1, P_1)| \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \max_{\sigma,s\in[t_{i-1},t_i]} |f(\sigma) - f(s)|(g(b) - g(a)).$$

Bewijs. Zij $P_1 = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ met $t_i \in [a, b]$ waar $i \in \{0, ..., n\}$ zo dat

$$a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = b.$$

De partitie P_2 is fijner dan de partitie P_1, dus voor iedere $k \in \{1, ..., n\}$ zijn er $\tau_{k,i} \in [a, b]$ met $i = \{0, .., m_k\}$ zo dat

$$t_{k-1} = \tau_{k,0} \leq \tau_{k,1} \leq ... \leq \tau_{k,m_k} = t_k$$

en

$$P_2 = \bigcup_{k=1}^{n} \{\tau_{k,0}, ..., \tau_{k,m_k}\}.$$

Zij $Q_1 = \{s_1, ..., s_n\}$ een strooiing van P_1, dan $s_i \in [a, b]$ met $i \in \{1, ..., n\}$ en voor iedere $k \in \{1, ..., n\}$ geldt $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Zij Q_2 een strooiing van P_2. Dan zijn er voor iedere $k \in \{1, ..., n\}$ en $i \in \{1, ..., m_k\}$ $\sigma_{k,i} \in [\tau_{k,i-1}, \tau_{k,i}]$ met

$$Q_2 = \bigcup_{k=1}^{n} \{\sigma_{k,0}, ..., \sigma_{k,m_k}\}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}
|S(Q_2, P_2) - S(Q_1, P_1)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(s_k)(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} (f(\sigma_{k,i}) - f(s_k))(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} |f(\sigma_{k,i}) - f(s_k)| \, |(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1}))| \\
&\leq \max_{k \in \{1,...,n\}} \max_{\sigma, s \in [t_{k-1}, t_k]} |f(\sigma) - f(s)| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} (g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \\
&\leq \max_{k \in \{1,...,n\}} \max_{\sigma, s \in [t_{k-1}, t_k]} |f(\sigma) - f(s)|(g(b) - g(a)).
\end{aligned}$$

□

Stelling 2.14. *[2] Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ twee functies. Als f continu en g stijgend is op het interval $[a, b]$, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Bewijs. Om de stelling te kunnen bewijzen, kiezen we eerst een rij van partities en we willen laten zien dat de rij van de bijbehorende Stieltjessommen een Cauchy rij is. Om de notaties iets te vereenvoudigen, nemen we zonder verlies van algemeenheid aan dat $[a, b] = [0, 1]$. We kiezen voor $n \in \mathbb{N}$ partitie $P_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, ..., 2^n\} \right\}$. Daarnaast kiezen we een strooiing Q_n bij P_n. We merken op dat voor $m \geq n$ de partitie P_m een fijnere partitie is dan de partitie P_n.

We laten eerst zien dat het rijtje $(S(Q_n, P_n))_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy rij is in $\mathbb{R}$.

Volgens Lemma 2.13

$$\begin{aligned}
|S(Q_n, P_n) - S(Q_m, P_m)| &\leq \max_{k \in \{1,...,2^n\}} \max_{\sigma, s \in \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} |f(\sigma) - f(s)|(g(1) - g(0)) \\
&\leq \max_{\sigma, s \in [0,1], |\sigma - s| \leq \frac{1}{2^n}} |f(\sigma) - f(s)|(g(1) - g(0)).
\end{aligned}$$

Als f continu is op het interval $[0, 1]$, dan is f uniform continu, omdat $[0, 1]$ compact is. Dit betekent nu dat $|S(Q_n, P_n) - S(Q_m, P_m)| \to 0$ als $m, n \to \infty$. Hiermee bewijzen we dat $(S(Q_n, P_n))_n$ een Cauchy-rij is in $\mathbb{R}$.

Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt nu dat er een $I \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$I = \lim_{n \to \infty} S(Q_n, P_n).$$

We hebben nu een kandidaat gevonden voor de Stieltjes-integraal I en gaan laten zien dat f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g. Laat $\varepsilon > 0$. Kies $\delta > 0$ zo dat

$$|s - \sigma| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2(g(1) - g(0))}.$$

Kies nu N zodat voor alle $n \geq N$

$$\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en} \quad |S(Q_n, P_n) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neem $P_\varepsilon = P_N$ en laat P een fijnere partitie zijn dan P_ε en Q een strooiing bij P. Dan geldt er met behulp van Lemma 2.13

$$|S(Q,P) - S(Q_N,P_N)| \leq \max_{|\sigma - s| < \frac{1}{2^N}} |f(\sigma) - f(s)|(g(1) - g(0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Met behulp van de driehoeksongelijkheid krijgen we nu het volgende

$$\begin{aligned} |S(Q,P) - I| &= |S(Q,P) - S(Q_N,P_N) + S(Q_N,P_N) - I| \\ &\leq |S(Q,P) - S(Q_N,P_N)| + |S(Q_N,P_N) - I| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus de functie f is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g en $I = \int_a^b f(t)dg(t)$. □

Hieronder bekijken we een voorbeeld waar de functie f die continu is op het interval $[0,3]$ Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van de stijgende functie g.

Voorbeeld 2.15. Bekijk de functie $g : [0,3] \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t \in [1,2) \\ 2, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Als $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ continu is, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g, vanwege Stelling 2.14. Bovendien geldt in dit geval dat

$$I = \int_0^3 f(t)dg(t) = f(1) + f(2).$$

We zijn geïnteresseerd in de functies f die discontinu zijn in meerdere punten. Eerst introduceren we een lemma, dat we nodig zullen hebben voor het bewijs van Stelling 2.18.

Lemma 2.16. Zij $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ twee functies en $p_1, p_2 \in (a,b)$ met $p_1 < p_2$. Als g stijgend is op het interval $[a,b]$ en f is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op $[a,p_1]$ en $[p_2,b]$, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een partitie P van het interval $[a,b]$ zo dat voor iedere strooiing Q van P geldt dat

$$\left| S(Q,P) - \int_a^{p_1} f dg - \int_{p_2}^b f dg \right| \leq \varepsilon + \max_{w \in [p_1,p_2]} f(w)(g(p_2) - g(p_1)).$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. De functie f is Stieltjes integreerbaar ten opzichte van de functie g op het interval $[a,p_1]$ en $[p_2,b]$. Dus er bestaan partities P_1 en P_2 van de intervallen $[a,p_1]$ en $[p_2,b]$ zo dat voor iedere strooiing Q_1 voor partitie P_1 en iedere strooiing Q_2 voor P_2 geldt dat

$$\left| S(Q_1,P_1) - \int_a^{p_1} f dg \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ en } \left| S(Q_2,P_2) - \int_{p_2}^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vervolgens willen we een partitie P over het hele interval $[a,b]$ nemen en dat doen we door

$$P = P_1 \cup P_2.$$

Voor een willekeurige strooiing Q die hoort bij de partitie P kiezen we

$$Q_1 = Q \cup [a,p_1] \text{ en } Q_2 = Q \cup [p_2,b].$$

Er is één punt in $Q \cap [p_1,p_2]$ dat niet bij Q_1 of Q_2 hoort en dat punt noemen we q.

We weten dat

$$S(Q,P) = S(Q_1,P_1) + f(q)(g(p_2) - g(p_1)) + S(Q_2,P_2).$$

Dan krijgen we de volgende afschatting:

$$\begin{aligned}\left|S(Q,P) - \int_a^{p_1} fdg - \int_{p_2}^b fdg\right| &\leq |S(Q,P) - S(Q_1,P_1) - S(Q_2,P_2)| + \left|S(Q_1,P_1) - \int_a^{p_1} fdg\right| \\ &\quad + \left|S(Q_2,P_2) - \int_{p_2}^b fdg\right| \\ &< \max_{w\in[p_1,p_2]} |f(w)|(g(p_2) - g(p_1)) + \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.17. Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ twee functies. Als de functie f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van de functie g en g is stijgend, dan geldt er

$$\left|\int_a^b fdg\right| \leq \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(b) - g(a)).$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een partitie P zodat voor iedere strooiing Q voor partitie P geldt dat

$$\left|S(Q,P) - \int_a^b fdg\right| < \varepsilon.$$

Verder merken we op dat g stijgend is en

$$\begin{aligned}|S(Q,P)| &= \left|\sum_{k=1}^n f(s_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(s_k)|(g(t_k) - g(t_{k-1})).\end{aligned}$$

Daarnaast weten we ook dat f begrensd is en merken op dat we een telescoopsom krijgen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |f(s_k)|(g(t_k) - g(t_{k-1})) &\leq \sup_{w\in[a,b]} |f(w)| \sum_{k=1}^n (g(t_n) - g(t_{n-1})) \\ &= \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(b) - g(a)).\end{aligned}$$

Hierdoor krijgen we

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b fdg\right| &\leq \left|\int_a^b fdg - S(Q,P)\right| + |S(Q,P)| \\ &< \varepsilon + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(b) - g(a)).\end{aligned}$$

Omdat ε willekeurig klein is, betekent dit dat

$$\left|\int_a^b fdg\right| \leq \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(b) - g(a)).$$

□

Stelling 2.18. *Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ twee functies en $p \in (a, b)$. Als f begrensd is op het interval $[a, b]$ en continu op $[a, p) \cup (p, b]$ en de functie g is stijgend op het interval $[a, b]$ en continu in p, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Bewijs. Laat $n \in \mathbb{N}$. Allereerst bekijken we de linkerkant van het punt p, het interval $\left[a, p - \frac{1}{n}\right]$.

We kiezen een partitie P_n^1 van dat interval zodat voor iedere gekozen strooiing Q_n^1 van partitie P_n^1 geldt

$$\left| S(Q_n^1, P_n^1) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg \right| < \frac{1}{n}.$$

Voor de rechterkant van het punt p, het interval $[p+\frac{1}{n}, b]$ kiezen we een partitie P_n^2 van dat interval zodat voor iedere strooiing Q_n^2 van partitie P_n^2 geldt

$$\left| S(Q_n^2, P_n^2) - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| < \frac{1}{n}.$$

Vervolgens willen we een partitie P_n over heel dat interval $[a, b]$ en nemen partitie $P_n = P_n^1 \cup P_n^2$ en strooiing $Q_n = Q_n^1 \cup Q_n^2 \cup \{q\}$ met $q \in \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}\right)$ dan krijgen we de volgende afschatting

$$\begin{aligned}
\left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| &\leq \left| S(Q_n^1, P_n^1) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg \right| + \left| S(Q_n^2, P_n^2) - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| \\
&\quad + \left| f(q)(g(p + \frac{1}{n}) - g(p - \frac{1}{n})) \right| \\
&\leq \frac{2}{n} + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)| \, (g(p + \frac{1}{n}) - g(p - \frac{1}{n})).
\end{aligned}$$

Dan krijgen we voor $m \geq n$

$$\begin{aligned}
&|S(Q_m, P_m) - S(Q_n, P_n)| \\
&\quad \leq \left| S(Q_m, P_m) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| + \left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| \\
&\quad \leq \left| S(Q_m, P_m) - \int_a^{p-\frac{1}{m}} f dg - \int_{p+\frac{1}{m}}^{b} f dg \right| + \left| \int_a^{p-\frac{1}{m}} f dg - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg \right| \\
&\quad\quad + \left| \int_{p+\frac{1}{m}}^{b} f dg + \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| + \left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| \\
&\quad \leq \left| S(Q_m, P_m) - \int_a^{p-\frac{1}{m}} f dg - \int_{p+\frac{1}{m}}^{b} f dg \right| + \left| \int_{p-\frac{1}{n}}^{p-\frac{1}{m}} f dg \right| + \left| \int_{p+\frac{1}{n}}^{p+\frac{1}{m}} f dg \right| \\
&\quad\quad + \left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_{p+\frac{1}{n}}^{b} f dg \right| \\
&\quad \leq \frac{2}{m} + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p + \frac{1}{m}) - g(p - \frac{1}{m})) + \frac{2}{n} + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p + \frac{1}{n}) - g(p - \frac{1}{n})) \\
&\quad\quad + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p - \frac{1}{m}) - g(p - \frac{1}{n})) + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p + \frac{1}{m})) - g(p + \frac{1}{n})).
\end{aligned}$$

We merken op dat f begrensd is en als $m, n \to \infty$ dan gaan de termen $g(p + \frac{1}{m}) - g(p - \frac{1}{m})$ en $g(p+\frac{1}{n})-g(p-\frac{1}{n})$ naar 0, omdat g continu is in het punt p. Net zo gaan de termen $g(p-\frac{1}{m})-g(p-\frac{1}{n})$ en $g(p + \frac{1}{m}) - g(p + \frac{1}{n})$ naar 0. Met andere woorden betekent dit dat $(S(Q_n, P_n))$ een Cauchy rij is in $\mathbb{R}$. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt nu dat er een $I \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$I = \lim_{n\to\infty} S(Q_n, P_n).$$

We hebben nu een kandidaat gevonden voor de Stieltjes-integraal I en gaan laten zien dat de functie f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van de functie g.

Zij $\varepsilon > 0$. We kiezen $\delta > 0$ zo dat

$$\text{Voor alle } x, y \in [a, b] \text{ met } |x - y| < \delta \text{ geldt } |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4(\sup_{w\in[a,b]} |f(w)|)}.$$

We nemen $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\frac{1}{N} < \frac{\delta}{4} \text{ en } \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ met } |S(Q_N, P_N) - I| < \varepsilon.$$

Daarnaast nemen we een partitie P_ε^1 van het interval $\left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ zo dat voor iedere partitie P^1 die fijner is dan P_ε^1 en strooiing Q^1 voor P^1 geldt dat

$$\left| S(Q^1, P^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} f dg \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Vervolgens nemen we een partitie P_ε^2 van het interval $\left[p + \frac{1}{N}, b\right]$ zo dat voor iedere partitie P^2 die fijner is dan P_ε^2 en strooiing Q^2 voor P^2 geldt dat

$$\left| S(Q^2, P^2) - \int_{p+\frac{1}{N}}^{b} f dg \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Dan is $P_\varepsilon = P_\varepsilon^1 \cup P_\varepsilon^2$, waar P_ε een partitie is van het interval $[a, b]$. Zij P een partitie van het interval $[a, b]$ die fijner is dan P_ε en strooiing Q voor de partitie P. Verder nemen we ook $P^1 = P \cap \left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ met $Q^1 = Q \cap \left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ en $P^2 = P \cap \left[p + \frac{1}{N}, b\right]$ met $Q^2 = Q \cap \left[p + \frac{1}{N}, b\right]$.

De partitie P^1 van het interval $\left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ is fijner dan P_ε^1. Vervolgens merken we op met

$$p - \frac{1}{N} = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = p + \frac{1}{N}$$

het deel van de partitie P in $\left[p - \frac{1}{N}, p + \frac{1}{N}\right]$ en $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ de bijbehorende punten van strooiing Q dat

$$S(Q, P) = S(Q^1, P^1) + S(Q^2, P^2) + \sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})).$$

Daarnaast weten we

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})) \right| &\leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{w \in [a,b]} |f(w)|(g(t_j) - g(t_{j-1})) \\
&= \sup_{w \in [a,b]} |f(w)|(g(p + \frac{1}{N}) - g(p - \frac{1}{N})) \\
&< \sup_{w \in [a,b]} |f(w)| \frac{\varepsilon}{4(\sup_{w \in [a,b]} |f(w)|)} \\
&= \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Dan geldt het volgende

$$
\begin{aligned}
&|S(Q,P)-I| \\
&\quad \leq |S(Q,P)-S(Q_N,P_N)|+|S(Q_N,P_N)-I| \\
&\quad \leq \left|S(Q,P)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right|+\left|S(Q_N,P_N)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right| \\
&\quad \leq \left|S(Q^1,P^1)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right|+\left|S(Q^2,P^2)-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right|+\left|\sum_{j=1}^k f(s_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\right| \\
&\quad +\left|S(Q_N,P_N)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right| \\
&\quad \leq \left|S(Q^1,P^1)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right|+\left|S(Q^2,P^2)-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right|+\left|\sum_{j=1}^k f(s_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\right| \\
&\quad +\left|S(Q_N^1,P_N^1)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right|+\left|S(Q_N^2,P_N^2)-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right| \\
&\quad +|f(q)|(g(p+\frac{1}{N})-g(p-\frac{1}{N})) \\
&\quad \leq \left|S(Q^1,P^1)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right|+\left|S(Q^2,P^2)-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right|+\left|\sum_{j=1}^k f(s_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\right| \\
&\quad +\left|S(Q_N^1,P_N^1)-\int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right|+\left|S(Q_N^2,P_N^2)-\int_{p+\frac{1}{N}}^b fdg\right| \\
&\quad +\sup_{w\in[a,b]}|f(w)|(g(p+\frac{1}{N})-g(p-\frac{1}{N})) \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{4} \\
&\quad =\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dus f is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g. □

Hierboven bewezen we dat f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g, waar f niet continu is in één punt p. Vervolgens bekijken we een functie f die niet continu is in meerdere punten en die nog steeds Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g. Voordat we dit bewijzen, introduceren we eerst een stelling die we nodig zullen hebben in het bewijs van Stelling 2.20.

Stelling 2.19. *Zij $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ een functie en f is begrensd op het interval $[a,c]$ en zij $b\in[a,c]$. Als f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g op het interval $[a,b]$ en f is ook Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op het interval $[b,c]$, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op het interval $[a,c]$ met*

$$\int_a^b fdg+\int_b^c fdg=\int_a^c fdg.$$

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Dan bestaat er een partitie P_ε van het interval $[a,b]$ zo dat voor iedere partitie P van $[a,b]$ die fijner is dan P_ε en iedere strooing Q_1 voor P geldt dat

$$\left|\int_a^b fdg-S(Q_1,P))\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Net zo nemen we een partitie R_ε voor het interval $[b,c]$ zo dat voor iedere partitie R van $[b,c]$ die fijner is dan R_ε en iedere strooiing Q_2 voor R geldt dat

$$\left|\int_b^c f dg - S(Q_2, P)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vervolgens nemen we $A_\varepsilon = P_\varepsilon \cup R_\varepsilon$. Dan is A_ε een partitie van het interval $[a, c]$.

Zij B een partitie van het interval $[a, c]$ die fijner is dan partitie A_ε. Daarnaast merken we op dat $b \in B$, omdat de eindpunten van de twee intervallen in de partitie A_ε zitten.

We schrijven $B = \{t_0, ..., t_{n-1}, t_n = c, t_{n+1}, ..., t_m\}$ met de volgende eigenschap

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_m.$$

Zij Q een strooiing voor B. Dan $Q = \{s_1, ..., s_m\}$ met $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Dan geldt er

$$\begin{aligned} S(Q, B) &= \sum_{k=1}^{m} f(s_k)(g(t_{n-1}) - g(t_n)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(g(t_{n-1}) - g(t_n)) + \sum_{k=n+1}^{m} f(s_k)(g(t_{n-1}) - g(t_n)). \end{aligned}$$

We splitsen de partitie B in $P = \{t_0, ..., t_n\}$ van het interval $[a, b]$ die fijner is dan P_ε en een partitie $R = \{t_n, ..., t_m\}$ van het interval $[b, c]$ die fijner is dan partitie R_ε. Daarnaast kiezen we de strooiing $S_1 = \{s_1, ..., s_n\}$ bij partitie P en de strooiing $S_2 = \{s_{n+1}, ..., s_m\}$ bij partitie R zo dat

$$S(Q, B) = S(S_1, P) + S(S_2, R).$$

Daarnaast weten we

$$\left|S(S_1, P) - \int_a^b f dg\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ en } \left|S(S_2, R) - \int_b^c f dg\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dus dit betekent dat

$$\begin{aligned} \left|S(Q, B) - \left(\int_a^b f dg + \int_b^c f dg\right)\right| &\leq \left|S(S_1, P) - \int_a^b f dg\right| + \left|S(S_2, R) - \int_b^c f dg\right| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus f is Stieltjes-integreerbaar op het interval $[a, c]$ ten opzichte van g en

$$\int_a^c f dg = \int_a^b f dg + \int_b^c f dg.$$

□

Stelling 2.20. *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie en $p_1, ..., p_l \in [a, b]$ zo dat f continu is op $[a, b] \setminus \{p_1, ..., p_l\}$. We nemen een functie g met $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend, waar g continu is in $p_1, ..., p_l$. Dan is f Stieltjes integreerbaar ten opzichte van g.*

Bewijs. We nemen aan dat $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_l$ en kiezen

$$a_1 \in (p_1, p_2),$$

$$a_2 \in (p_2, p_3),$$

$$a_3 \in (p_3, p_4),$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} \in (p_{n-1}, p_n).$$

We bekijken $[a_k, a_{k+1}]$ met $k \in \{1, ..., n-1\}$. Op het interval $[a_k, a_{k+1}]$ is f alleen discontinu in het punt p_{k+1}. Verder weten we dat de functie g continu is in het punt p_{k+1}. Met Stelling 2.18 volgt dat f op $[a_k, a_{k+1}]$ Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g. Dit betekent dat f Stieltjes-integreerbaar is op $[a, a_1]$ en op $[a_1, a_2]$ ten opzichte van g. Omdat f Stieltjes-integreerbaar is op $[a_2, a_3]$ ten opzichte van g volgt ook met behulp van Stelling 2.19 dat f Stieltjes-integreerbaar is op $[a, a_3]$ ten opzichte van g. Met inductie volgt nu dat f Stieltjes-integreerbaar is op het interval $[a, b]$ ten opzichte van g.

□

Er zijn ook variaties hierop. Hieronder geven we een bewijs dat f Stieljes-integreerbaar is ten opzichte van g als f linkscontinu en g rechtscontinu is in een punt p.

Stelling 2.21. *Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ met f begrensd en waar f continu is op het interval $[a, p) \cup (p, b]$. Neem aan dat f rechtscontinu is in p en dat de functie g stijgend is op $[a, b]$ en linkscontinu in p. Dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Bewijs. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op $\left[a, p - \frac{1}{n}\right]$, omdat f op dat interval continu is. Dit betekent dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een partitie P_n^1 van het interval $\left[a, p - \frac{1}{n}\right]$ bestaat zo dat voor iedere strooiing Q_n^1 van de partitie P_n^1 geldt

$$\left| S(Q_n^1, P_n^1) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg \right| < \frac{1}{n}.$$

Daarnaast is f ook continu op het interval $[p, b]$. Dit betekent dat f ook op dat interval Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g. Dus er bestaat een partitie P_n^2 van $[p, b]$ zo dat voor iedere strooiing Q_n^2 van P_n^2 geldt

$$\left| S(Q_n^2, P_n^2) - \int_p^b f dg \right| < \frac{1}{n}.$$

Vervolgens willen we een partitie P_n over heel het interval $[a, b]$ en nemen partitie $P_n = P_n^1 \cup P_n^2$ en strooiing $Q_n = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q\}$ met $q \in \left(p - \frac{1}{n}, p\right)$ voor P_n, zo dat

$$S(Q_n, P_n) = S(Q_n^1, P_n^1) + S(Q_n^2, P_n^2) + f(q)(g(p) - g(p - \frac{1}{n})).$$

Dan krijgen we met behulp van afschatten

$$\begin{aligned}
&\left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_p^b f dg \right| \\
&\qquad \leq \left| S(Q_n^1, P_n^1) + S(Q_n^2, P_n^2) + f(q)(g(p) - g(p - \frac{1}{n})) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg - \int_p^b f dg \right| \\
&\qquad \leq \left| S(Q_n^1, P_n^1) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} f dg \right| + \left| S(Q_n^2, P_n^2) - \int_p^b f dg \right| + \left| f(q)(g(p) - g(p - \frac{1}{n})) \right| \\
&\qquad < \frac{2}{n} + \sup_{w \in [a,b]} |f(w)|(g(p) - g(p - \frac{1}{n})).
\end{aligned}$$

Voor $m \geq n$ krijgen we

$$\begin{aligned}
&|S(Q_m, P_m) - S(Q_n, P_n)| \\
&\quad \leq \left| S(Q_m, P_m) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} fdg - \int_p^b fdg \right| + \left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} fdg - \int_p^b fdg \right| \\
&\quad \leq \left| S(Q_m, P_m) - \int_a^{p-\frac{1}{m}} fdg - \int_p^b fdg \right| + \left| \int_a^{p-\frac{1}{m}} fdg - \int_a^{p-\frac{1}{n}} fdg \right| \\
&\qquad + \left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} fdg - \int_p^b fdg \right| \\
&\quad \leq \left| S(Q_m, P_m) - \int_a^{p-\frac{1}{m}} fdg - \int_p^b fdg \right| + \left| \int_{p-\frac{1}{n}}^{p-\frac{1}{m}} fdg \right| \\
&\qquad + \left| S(Q_n, P_n) - \int_a^{p-\frac{1}{n}} fdg - \int_p^b fdg \right| \\
&\quad \leq \frac{2}{m} + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p) - g(p - \frac{1}{m})) + \frac{2}{n} + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p) - g(p - \frac{1}{n})) \\
&\qquad + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p - \frac{1}{m}) - g(p - \frac{1}{n})).
\end{aligned}$$

We merken op dat f begrensd is en als $m, n \to \infty$ dan gaan de termen $g(p) - g(p - \frac{1}{m})$ en $g(p) - g(p - \frac{1}{n})$ naar 0, omdat g linkscontinu is in het punt p. Net zo gaan de termen $g(p - \frac{1}{m}) - g(p - \frac{1}{n})$ naar 0. Met andere woorden betekent dit dat $(S(Q_n, P_n))$ een Cauchy rij is in $\mathbb{R}$. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt nu dat er een $I \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$I = \lim_{n\to\infty} S(Q_n, P_n).$$

We hebben nu een kandidaat gevonden voor de Stieltjes-integraal I en gaan laten zien dat de functie f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van de functie g.

Zij $\varepsilon > 0$. We kiezen $\delta > 0$ zo dat

$$\text{Voor alle } x \in [a, p] \text{ met } |x - p| < \delta \text{ geldt } |g(p) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|}.$$

We nemen $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\frac{1}{N} < \frac{\delta}{4} \text{ en } \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ en } |S(Q_N, P_N) - I| < \varepsilon.$$

Daarnaast nemen we een partitie P^1_ε van het interval $\left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ zo dat voor iedere partitie P^1 die fijner is dan P^1_ε en strooiing Q^1 voor P^1 geldt dat

$$\left| S(Q^1, P^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Vervolgens nemen we P^2_ε van het interval $[p, b]$ zo dat voor iedere partitie P^2 die fijner is dan P^2_ε en strooiing Q^2 voor P^2 geldt dat

$$\left| S(Q^2, P^2) - \int_p^b fdg \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dan is $P_\varepsilon = P^1_\varepsilon \cup P^2_\varepsilon$, waar P_ε een partitie is van het interval $[a, b]$. Zij P een partitie van het interval $[a, b]$ die fijner is dan P_ε en strooiing Q voor de paritie P. Verder nemen we $P^1 = P \cap \left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ met $Q^1 = Q \cap \left[a, p - \frac{1}{N}\right]$ en $P^2 = P \cap [p, b]$ met $Q^2 = Q \cap [p, b]$.

Vervolgens merken we op met

$$p - \frac{1}{N} = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = p$$

het deel van de partitie P in $\left[p - \frac{1}{N}, p\right]$ en $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ de bijbehorende punten van de strooiing Q, dat

$$S(Q,P) = S(Q^1,P^1) + S(Q^2,P^2) + \sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})).$$

Daarnaast weten we

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| &\leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(t_j) - g(t_{j-1})) \\
&= \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p) - g(p - \frac{1}{N})) \\
&< \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Dan geldt het volgende

$$\begin{aligned}
&|S(Q,P) - I| \\
&\quad \leq |S(Q,P) - S(Q_N,P_N)| + |S(Q_N,P_N) - I| \\
&\quad \leq \left|S(Q,P) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg - \int_p^b fdg\right| + \left|S(Q_N,P_N) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg - \int_p^b fdg\right| \\
&\quad \leq \left|S(Q^1,P^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right| + \left|S(Q^2,P^2) - \int_p^b fdg\right| + \left|\sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\
&\qquad + \left|S(Q_N,P_N) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg - \int_p^b fdg\right| \\
&\quad \leq \left|S(Q^1,P^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right| + \left|S(Q^2,P^2) - \int_p^b fdg\right| + \left|\sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\
&\qquad + \left|S(Q_N^1,P_N^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right| + \left|S(Q_N^2,P_N^2) - \int_p^b fdg\right| + |f(q)|(g(p) - g(p - \frac{1}{N})) \\
&\quad \leq \left|S(Q^1,P^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right| + \left|S(Q^2,P^2) - \int_p^b fdg\right| + \left|\sum_{j=1}^{k} f(s_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))\right| \\
&\qquad + \left|S(Q_N^1,P_N^1) - \int_a^{p-\frac{1}{N}} fdg\right| + \left|S(Q_N^2,P_N^2) - \int_p^b fdg\right| \\
&\qquad + \sup_{w\in[a,b]} |f(w)|(g(p) - g(p - \frac{1}{N})) \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\quad < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dus f is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g. □

Vervolgens zijn we geïnteresseerd of de functie f nog steeds Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g als g van begrensde variatie is.

Definitie 2.22. Zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie. De functie g is van begrensde variatie als

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = b \right\} < \infty.$$

Met andere woorden is het supremum van de sommen van de verschillen van g op de deelintervallen over alle partities is niet oneindig.

Eerst introduceren we een lemma dat we nodig zullen hebben in het bewijs van Stelling 2.24.

Lemma 2.23. Zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie die linkscontinu en van begrensde variatie is op het interval $[a, b]$. Er bestaan twee stijgende functies g_1 en g_2 die beide linkscontinu zijn zo dat $g = g_1 - g_2$.

Dit bewijs volgt uit Theorem 8-14 van Apostol [2].

Stelling 2.24. *Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ twee functies. Zij $p_1, ..., p_l \in [a, b]$ en neem aan dat f continu is op $[a, b] \setminus \{p_1, ..., p_l\}$. Als f rechtscontinu is in p_j voor $j = \{1, ..., l\}$ en als g van begrensde variatie is en linkscontinu in p_j voor $j = \{1, ..., l\}$, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Bewijs. Uit Lemma 2.23 weten we dat twee functies g_1 en g_2 bestaan, die beide stijgend en linkscontinu zijn op het interval $[a, b]$ met $g = g_1 - g_2$. Uit Stelling 2.21 volgt (net als in het bewijs van Stelling 2.20) dat f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g_1 en ook ten opzichte van g_2.

Laat $n \in \mathbb{N}$. We kiezen een partitie P_1 van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere strooiing Q_1 voor partitie P_1 geldt

$$\left| S_{f,g_1}(Q_1, P_1) - \int_a^b f dg_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daarnaast nemen we een partitie P_2 van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere strooiing Q_2 voor P_2 geldt

$$\left| S_{f,g_2}(Q_2, P_2) - \int_a^b f dg_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vervolgens willen we een partitie P over het interval $[a, b]$ met $P = P_1 \cup P_2$, dan geldt voor iedere strooiing Q voor P dat

$$\begin{aligned} \left| S_{f,g}(Q, P) - \int_a^b f dg_1 - \int_a^b f dg_2 \right| &= \left| S_{f,g_1}(Q, P) - S_{f,g_2}(Q, P) - \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2 \right| \\ &\leq \left| S_{f,g_1}(Q, P) - \int_a^b f dg_1 \right| + \left| S_{f,g_2}(Q, P) - \int_a^b f dg_2 \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus f is Stieltjes integreerbaar ten opzichte van g. □

Hieronder geven we een voorbeeld waar f niet Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g als f en g beide rechtscontinu zijn.

Voorbeeld 2.25. We bekijken twee functies f en g die als volgt gegeven worden

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ en } g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zij $P = \{t_0, ..., t_n\}$ een partitie met de eigenschap $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = 1$ van het interval $[0, 1]$.

Dan is

$$\bigcup_{k=1}^{n}(t_{k-1},t_k]=(0,1]$$

disjunct. Dan bestaat er precies één k zodat $\frac{1}{2}\in(t_{k-1},t_k]$. Verder nemen we $p\in\big(t_{k-1},\frac{1}{2}\big)$.

We bekijken twee strooiigen Q en R. Ten eerste kiezen we een strooiing $Q=(s_j)$ zo dat het punt $s_k\in[t_{k-1},t_k]$ voldoet aan $s_k=\frac{1}{2}$. Daarnaast kiezen we een strooiing $R=(r_j)$ zo dat het punt $r_k\in[t_{k-1},t_k]$ voldoet aan $r_k=p$.

Voor $j\geq k+1$ geldt $t_j\geq t_{k+1}\geq\frac{1}{2}$ dus $g(t_j)=1$. Verder geldt voor $j\leq k-1$ dat $t_j\leq t_{k-1}<\frac{1}{2}$ dus $g(t_j)=0$.

We gaan de Stieltjessommen uitrekenen voor de strooiingen Q en R.

Voor de Stieltjessom met strooiing Q geldt

$$\begin{aligned}S(Q,P)&=\sum_{j=1}^{n}f(s_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\\&=f(s_k)(g(t_k)-g(t_{k-1}))\\&=f(\frac{1}{2})(1-0)\\&=0\cdot(1-0)=0.\end{aligned}$$

Voor de Stieltjessom met strooiing R geldt

$$\begin{aligned}S(R,P)&=\sum_{j=1}^{n}f(r_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\\&=f(r_k)(g(t_k)-g(t_{k-1}))\\&=f(p)(1-0)\\&=1\cdot(1-0)=1.\end{aligned}$$

Het verschil van deze twee Stieltjessommen geeft

$$|S(Q,P)-S(R,P)|=\left|\sum_{j=1}^{n}f(s_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))-\sum_{j=1}^{n}f(r_j)(g(t_j)-g(t_{j-1}))\right|=1. \tag{1}$$

Stel nu dat f wel Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g. We nemen $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Dan is er een partitie P_ε zo dat voor iedere fijnere partitie $\tilde{P}$ en iedere strooiing $\tilde{Q}$ bij de paritite $\tilde{P}$ geldt dat

$$\left|S(\tilde{Q},\tilde{P})-\int_0^1 fdg\right|<\varepsilon.$$

We passen dit toe voor de partitie P en strooiing Q en voor de partitie P en strooiing R toe zo als boven. Dan volgt

$$\left|S(Q,P)-\int_0^1 fdg\right|<\varepsilon \text{ en } \left|S(R,P)-\int_0^1 fdg\right|<\varepsilon.$$

We bekijken nu het verschil van deze twee Stieltjessommen en krijgen

$$\begin{aligned}|S(Q,P)-S(R,P)|&\leq\left|S(Q,P)-\int_0^1 fdg\right|+\left|S(R,P)-\int_0^1 fdg\right|\\&<2\varepsilon=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dit geeft tegenspraak met (1). Dus f is niet Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.

3 Stellingen en definities in een Banachruimte

In dit Hoofdstuk bekijken we een discontinue functie f met waarden in een Banachruimte over het interval $[a, b]$ en een functie g op het interval $[a, b]$. We onderzoeken of deze functie f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g.

Definitie 3.1. Laat X een vectorruimte zijn over $\mathbb{F}$. Een *norm* op X is een functie $||.|| \to \mathbb{R}$ zo dat voor alle $x, y \in X$ en $\alpha \in \mathbb{F}$,

(i) $||x|| \geq 0$;

(ii) $||x|| = 0$ dan en slechts dan als $x = 0$;

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$;

(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definitie 3.2. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ een functie. Is Q een strooiing bij partitie P, dan heet de som

$$S_f(Q, P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})$$

de *Riemann-som* van f over het interval $[a, b]$.

Definitie 3.3. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ een functie. De functie f is *Riemann-integreerbaar* over het interval $[a, b]$ als er een $I \in X$ bestaat met de eigenschap: bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor iedere partitie P met maaswijdte $\mu(P) < \delta$ en iedere strooiing Q bij P voor de Riemann-som geldt

$$||S_f(Q, P) - I|| < \varepsilon$$

Het element

$$I =: \int_a^b f(t)\, dt$$

heet dan de *Riemann-integraal* van f over het interval $[a, b]$.

Definitie 3.4. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f\,[a, b] \to X$ en $g\,[a, b] \to \mathbb{R}$. Is Q een strooiing bij partitie P, dan heet de som

$$S_{f,g}(Q, P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

de *Stieltjes-som* van f over het interval $[a, b]$.

Definitie 3.5. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ en zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide functies. De functie f is *Stieltjes-integreerbaar* ten opzichte van de functie g als er een $I \in X$ bestaat met de eigenschap: bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een partitie P_ε van $[a, b]$ zo dat voor iedere fijnere partitie P van P_ε en iedere strooiing Q bij P voor de Stieltjes-som geldt

$$||S_{f,g}(Q, P) - I|| < \varepsilon$$

Het element

$$I =: \int_a^b f(t)\, dg(t)$$

heet dan de *Stieltjes-integraal* van f over het interval $[a, b]$.

Het blijkt dat de theorie van Hoofdstuk 2 ook geldt voor f met waarden in de Banachruimte X. De enige aanpassing in de bewijzen die nodig is, is het vervangen van de absolute waarde $|.|$ door de norm $||.||$. We kopiëren de bewijzen niet, maar geven wel een lijst van de belangrijkste resultaten.

Lemma 3.6. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ en zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ met g stijgend. Zij P_1 en P_2 twee partities van het interval $[a, b]$ met $P_1 \subseteq P_2$ en zij Q_1 een strooiing van P_1 en Q_2 een strooiing van P_2. Dan

$$||S_{f,g}(Q_2, P_2) - S_{f,g}(Q_1, P_1)|| \leq \max_{i \in \{1,...,n\}} \max_{\sigma, s \in [t_{i-1}, t_i]} ||f(\sigma) - f(s)|| \, (g(b) - g(a)).$$

Stelling 3.7. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$. Zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Als f continu en g stijgend is op het interval $[a, b]$, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Lemma 3.8. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ en $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $p_1, p_2 \in (a, b)$ met $p_1 < p_2$. Als g stijgend is op het interval $[a, b]$ en f is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op het interval $[a, p_1]$ en $[p_2, b]$, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een partitie P van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere strooiing Q van P geldt dat

$$\left|\left| S(Q, P) - \int_a^{p_1} f dg - \int_{p_2}^b f dg \right|\right| \leq \varepsilon + \max_{w \in [p_1, p_2]} ||f(w)|| (g(p_2) - g(p_1)).$$

Lemma 3.9. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ en $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Als de functie f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g en g is stijgend, dan geldt er

$$\left|\left| \int_a^b f dg \right|\right| \leq \max_{w \in [a, b]} ||f(w)|| (g(b) - g(a)).$$

Stelling 3.10. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ en $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ twee functies en $p \in (a, b)$. Als f begrensd is op het interval $[a, b]$ en continu op $[a, p) \cup (p, b]$ en de functie g is stijgend op het interval $[a, b]$ en continu in p, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Stelling 3.11. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, c] \to X$ een functie en f is begrensd op het interval $[a, c]$ en zij $b \in [a, c]$. Als f Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g op het interval $[a, b]$ en f is ook Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op het interval $[b, c]$, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g op het interval $[a, c]$ met*

$$\int_a^b f dg + \int_b^c f dg = \int_a^c f dg.$$

Stelling 3.12. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ begrensd. Zij $p_1, ..., p_l \in [a, b]$ zo dat f continu is op het interval $[a, b] \setminus \{p_1, ..., p_l\}$. We nemen een functie g met $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stijgend, waar g continu is in $p_1, ..., p_l$. Dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Stelling 3.13. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ met f begrensd en waar f continu is op het interval $[a, p) \cup (p, b]$. Zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Neem aan dat f rechtscontinu is in p en dat de functie g stijgend is op het interval $[a, b]$ en linkscontinu in het punt p. Dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

Stelling 3.14. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a, b] \to X$ en zij $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Als f continu en g van begrensde variatie is, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.*

4 Stieltjes-integreerbaarheid van discontinue functies in een Banachruimte

In dit laatste Hoofdstuk bekijken we de functie f reëel en g met waarden in een Banachruimte. We laten zien dat de functie f ook met deze voorwaarden Stieltjes-integreerbaar is ten opzichte van g met g van begrensde variatie. We volgen de aanpak van [5] en beschrijven de belangrijkste resultaten daaruit voor onze situatie.

Veronderstel dat X een Banachruimte is. We merken op dat $B(x,\alpha) = \alpha x$ voor $x \in X$ met $\alpha \in \mathbb{F}$ een bilineaire afbeelding $B : X \times \mathbb{F} \to X$ definieert en dat

$$||\alpha x||_X = |\alpha|||x||_X.$$

Definitie 4.1. Zij $g : [a,b] \to X$ en zij $[a,b] \subset \mathbb{R}$ is een begrensd interval. De functie g is van *begrensde variatie* op het interval $[a,b]$ als

$$\mathrm{VAR}(g) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} ||g(t_j) - g(t_{j-1})||_X \right\} < \infty,$$

waar het supremum is genomen over alle eindige partities P van het interval $[a,b]$ met de eigenschap

$$a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n-1} \leq t_n = b.$$

Het blijkt dat een andere definitie van *begrensde variatie* nuttiger is voor de Stieltjes-integralen.

Definitie 4.2. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $g : [a,b] \to X$. De functie g is van *begrensde variatie* op het interval $[a,b]$ als

$$\mathrm{var}(g) = \sup \left\{ \left|\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (g(t_j) - g(t_{j-1})) \right|\right|_X \right\} < \infty,$$

waar het supremum is genomen over alle eindige partities P van het interval $[a,b]$ met de eigenschap

$$a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = b$$

en alle $\alpha_j \in \mathbb{F}$ met $|\alpha_j| \leq 1$.

In het algemeen geldt er $\mathrm{VAR}(g) \neq \mathrm{var}(g)$. Dit illustreren we met het volgende voorbeeld

Voorbeeld 4.3. Zij $X = (\mathbb{R}^2, ||.||_2)$ een Banachruimte. Zij $g : [0,1] \to X$ gegeven door

$$g(t) = \begin{cases} (0,0)^T & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ (1,0)^T & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ (1,1)^T & t = 1. \end{cases}$$

Met behulp van Definitie 4.1 krijgen we met $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$ en $t_2 = 1$ dat

$$\sum_{j=1}^{2} ||g(t_j) - g(t_{j-1})|| = \left|\left|(1,0)^T\right|\right| + \left|\left|(0,1)^T\right|\right| = 2,$$

terwijl we met Definitie 4.2 het volgende krijgen voor alle $|\alpha_j| \leq 1$

$$\left|\left| \sum_{j=1}^{2} \alpha_j (g(t_j) - g(t_{j-1})) \right|\right| = \left|\left|(\alpha_1, \alpha_2)^T\right|\right| \leq \sqrt{2}.$$

Dit betekent nu

$$\sum_{j=1}^{2} ||g(t_j) - g(t_{j-1})|| \neq \left|\left| \sum_{j=1}^{2} \alpha_j (g(t_j) - g(t_{j-1})) \right|\right|, \text{ omdat } \sqrt{2} \neq 2.$$

Met andere woorden $\mathrm{var}(g) \neq \mathrm{VAR}(g)$.

Propositie 4.4. [5] Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte en zij $g : [a,b] \to X$ en $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Als de Stieltjes-integraal $\int_a^b f(s)dg(s)$ bestaat en $\mathrm{var}(g) < \infty$ dan

$$\left|\left|\int_a^b f dg\right|\right|_X \leq \sup_{s\in[a,b]} ||f(s)||\mathrm{var}(g).$$

Lemma 4.5. Als $f : [a,b] \to X$ continu is, dan is er een rij (f_n) met $f_n \to f$ uniform op het interval $[a,b]$ en f_n is simpel, dat wil zeggen voor iedere n is f_n van de vorm

$$f_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot 1_{[t_{k-1},t_k)},$$

voor $a \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq b$ en $\alpha_k \in \mathbb{R}$ met $k \in \{1, ..., m\}$.

Het bewijs van Lemma 4.5 is elementair en geven we hier niet.

Lemma 4.6. Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte. Zij $f : [a,b] \to X$ simpel met $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot 1_{[t_{k-1},t_k)}$ en $g : [a,b] \to X$ met $\mathrm{var}(g) < \infty$, dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g met

$$\int_a^b f dg = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (g(t_{k-1}) - g(t_k)).$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. We nemen $P_\varepsilon = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ met $t_i \in [a,b]$ waar $i \in \{0, ..., m\}$ zo dat

$$a = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m = b.$$

Zij P een partitie van het interval $[a,b]$ die fijner is dan partitie P_ε en Q een strooiing voor P. Dus voor iedere $k \in \{1, ..., m\}$ zijn er $\tau_{k,i} \in [a,b]$ met $i \in \{0, ..., m_k\}$ zo dat

$$t_{k-1} = \tau_{k,0} \leq \tau_{k,1} \leq ... \leq \tau_{k,m_k} = t_k$$

en

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} \{\tau_{k,0}, ..., \tau_{k,m_k}\}.$$

Zij Q een strooiing bij P. Dan zijn er voor iedere $k \in \{1, ..., m\}$ en $i \in \{1, ..., m_k\}$, $\sigma_{k,i} \in [\tau_{k,i-1}, \tau_{k,i}]$ met

$$Q = \bigcup_{k=1}^{m} \{\sigma_{k,0}, ..., \sigma_{k,m_k}\}.$$

Dit betekent

$$\begin{aligned} S(Q,P) &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_k (g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{i=1}^{m_k} (g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (g(\tau_{k,m_k}) - g(\tau_{k,0})) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (g(t_k) - g(t_{k-1})). \end{aligned}$$

We krijgen

$$\left| S(Q,P) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| = 0 < \varepsilon.$$

Dus f is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g met

$$\int_a^b f dg = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(g(t_k) - g(t_{k-1})).$$

□

Stelling 4.7. *Zij $(X, ||.||)$ een Banachruimte en $g : [a,b] \to X$. Zij $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $n \in \mathbb{N}$. Als var$(g) < \infty$, f_n is Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g voor alle n en*

$$||f_n - f|| = \sup_{s \in [a,b]} |f_n(s) - f(s)| \to 0 \text{ als } n \to \infty,$$

dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g met

$$\int_a^b f dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg.$$

Bewijs. Laat $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven. Omdat het rijtje f_n uniform convergeert naar f op het interval $[a,b]$, bestaat er een positieve getal N_0 zo dat voor iedere $n > N_0$ en $s \in [a,b]$ geldt

$$||f_n - f|| < \frac{\varepsilon}{6(\text{var}(g)+1)}.$$

Dus voor iedere $m, n > N_0$ en $s \in [a,b]$ hebben we

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m|| &\le ||f_n - f|| + ||f_m - f|| \\ &< \frac{2\varepsilon}{6(\text{var}(g)+1)} = \frac{\varepsilon}{3(\text{var}(g)+1)}. \end{aligned}$$

Met Propositie 4.4 krijgen we voor $m, n > N_0$

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f_n dg - \int_a^b f_m dg \right\|_X &= \left\| \int_a^b (f_n - f_m) dg \right\|_X \\ &\le \sup_{s\in[a,b]} |f_n - f_m| \,\text{var}(g) \\ &< \frac{\text{var}(g)}{3(\text{var}(g)+1)}\varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Dus dit betekent dat $\int_a^b f_n dg$ een Cauchy rij is in X. Omdat X een Banach ruimte is, betekent dit dat we nu een kandidaat I hebben gevonden, namelijk

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg.$$

Laat $N_1 \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor $m > N_1$ geldt

$$\left\| \int_a^b f_m dg - I \right\|_X < \frac{\varepsilon}{3}.$$

We nemen $m > \max(N_0, N_1)$ vast. Omdat de integraal $\int_a^b f_m(s) dg(s)$ bestaat, is er een partitie P_m zo dat voor iedere fijnere partitie $P = \{t_0, ..., t_n\}$ en iedere strooiing $Q = \{s_1, ..., s_n\}$ voor P

geldt dat

$$\left|\left|S_{f_m,g}(Q,P) - \int_a^b f_m dg\right|\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Voor zo'n partitie P en strooiing Q krijgen we

$$\begin{aligned}||S_{f,g}(Q,P) - I||_X &\leq ||S_{f,g}(Q,P) - S_{f_m,g}(Q,P)|| + \left|\left|S_{f_m,g}(Q,P) - \int_a^b f_m dg\right|\right| \\ &+ \left|\left|\int_a^b f_m dg - I\right|\right| \\ &< ||S_{f,g}(Q,P) - S_{f_m,g}(Q,P)|| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Daarnaast hebben we

$$\begin{aligned}||S_{f,g}(Q,P) - S_{f_m,g}(Q,P)|| &= \left|\left|\sum_{j=1}^{m}(g(t_j) - g(t_{j-1}))(f(s_j) - f_m(s_j))\right|\right|_X \\ &\leq \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} ||f(s_j) - f_m(s_j)|| \cdot \operatorname{var}(g) \\ &< \frac{\varepsilon \cdot \operatorname{var}(g)}{6(\operatorname{var}(g)+1)} < \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Deze afschatting hebben we uit [5].

Dit geeft nu het volgende

$$||S_{f,g}(Q,P) - I||_X < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dit betekent nu dat de integraal $\int_a^b f dg$ bestaat en

$$\int_a^b f dg = I.$$

Ook vinden we dat

$$\int_a^b f dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg.$$

Met andere woorden is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g met g van begrensde variatie volgens Definitie 4.2.

Gevolg 4.8. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en zij $g : [a,b] \to X$ waar f continu en $\operatorname{var}(g) < \infty$ dan is f Stieltjes-integreerbaar ten opzichte van g.

□

Referenties

[1] J.H.J. Almering, *Analyse*, 5e druk, Delftse Uitgevers Maatschappij b.v., 1987.

[2] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis,* Addison-Wesley, 1963.

[3] M. Daems, *De Stieltjes-integraal in een Banachruimte*, bachelor thesis, Mathematisch Instituut Leiden, 2013

[4] O. van Gaans, *Topics in analysis 1 - Real functions,* lecture notes, Mathematisch Instituut Leiden, 2008.

[5] Š. Schwabik, A note on integration by part for abstract Perron-Stieltjes integrals, *Mathematica Bohemica,* **126** (2001), no. 3, 613-629.