

C.W.P. Huibers

Effectieve Weerstand en Robuustheid

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: Dr. F. Spieksma

Datum Bachelorexamen: 10 juli 2015



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Natuurkundige Achtergrond	4
3	De Laplaciaan	6
4	Effectieve Weerstand	8
5	Opspannende Bomen	12
6	Gewogen Grafen	15
7	Spingraaf	19
8	Conclusie	27

1 Inleiding

We leven in een wereld met heel veel soorten netwerken. Het is belangrijk dat deze netwerken blijven werken als ze schade hebben opgelopen. Het vermogen van netwerken om te blijven werken, nadat ze zijn beschadigd, wordt de robuustheid van een netwerk genoemd. We zullen de netwerken die we onderzoeken representeren met een simpele, ongerichte, samenhangende graaf.

We willen de robuustheid van een netwerk graag kwantificeren. Laat $G = (V, E)$ de graaf zijn die geassocieerd wordt met ons netwerk. Hierbij is V de verzameling knooppunten en E is de verzameling takken. Er geldt $|V| = n$ en $|E| = m$. De maat voor robuustheid moet wel aan een aantal eisen voldoen:

1. De robuustheid moet voor elke graaf gedefinieerd zijn;
2. Het toevoegen van een tak verslechtert de robuustheid niet;
3. Kwantitatieve uitkomsten voor robuustheid geven intuïtief acceptabele uitkomsten.

Wij zullen in deze scriptie gaan kijken naar de inverse van de totale effectieve weerstand als maat voor robuustheid. In Hoofdstuk 2 zullen we de natuurkundige achtergrond geven die nodig is om de effectieve weerstand goed te begrijpen. Daarna zullen we het in Hoofdstuk 3 hebben over de zogenaamde Laplaciaan en zullen we notatie invoeren voor speciale vormen van de Laplaciaan. In Hoofdstuk 4 zullen we een nieuwe formule geven om de effectieve weerstand te berekenen, gebaseerd op een artikel van R.B. Bapat, I. Gutman en W. Xiao [4]. In Hoofdstuk 5 zullen we zien dat de formule ook een interpretatie in termen van het aantal opspannende bomen in de geassocieerde graaf heeft. Deze is gebaseerd op het totaal aantal opspannende bomen, en het aantal opspannende bomen door één tak. In Hoofdstuk 6 zullen we deze formule generaliseren voor gewogen grafen. Daarna gaan we in Hoofdstuk 7 kijken naar een zogenaamde spingraaf en bepalen welke tak we het best kunnen toevoegen om de graaf robuuster te maken. Er zal blijken dat we niet altijd de tak toevoegen die we verwachten wanneer we de totale effectieve weerstand als maat voor robuustheid gebruiken. Als we echter de algebraïsche connectiviteit gebruiken als maat voor robuustheid, dan blijkt dat we beter de tak kunnen toevoegen die we verwachten dan de tak die de totale effectieve weerstand aangeeft.

In deze scriptie behandelen we alleen ongerichte grafen.

2 Natuurkundige Achtergrond

Door de jaren heen zijn er meerdere maten voorgesteld om de robuustheid van een netwerk te meten. We gaan hier kijken naar de inverse van de totale effectieve weerstand als maat voor robuustheid. Deze werd voorgesteld door D.J. Klein en M. Randić [1]. Eerst zullen we uitleggen wat effectieve weerstand precies inhoudt en wat de relatie is met de robuustheid van een netwerk. Vervolgens zullen we bestuderen hoe we de effectieve weerstand kunnen berekenen.

De effectieve weerstand is een begrip uit de natuurkunde met betrekking op elektrische circuits. Om de effectieve weerstand tussen twee knopen a en b in een graaf te berekenen, moeten we de graaf beschouwen als een elektrisch circuit. Hierbij krijgt iedere tak (i, j) een weerstand $r_{ij} = 1 \Omega$. We zetten een spanningsbron over de knopen a en b en we laten een gegeven stroom Y lopen vanuit a naar b .

Wegens Kirchhoff's stroomwet geldt voor de stroom y_{ij} tussen de knopen i en j :

$$\sum_{j \in N(i)} y_{ij} = \begin{cases} Y & \text{als } i = a \\ -Y & \text{als } i = b \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hierbij is $N(i)$ de verzameling van knopen aangrenzend aan knoop i . Kirchhoff's stroomwet houdt dus in dat de stroom een knoop in gelijk is aan de stroom die knoop uit.

We kunnen nu met ieder knooppunt i een spanning v_i associëren. Vervolgens kunnen we Ohm's wet toepassen die zegt dat voor alle takken $(i, j) \in E$ geldt:

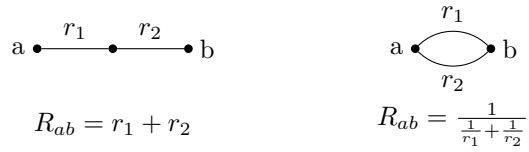
$$y_{ij} r_{ij} = v_i - v_j. \quad (1)$$

De stroom knoop a uit kan genoteerd worden met $y_a = \sum_{i \in V} y_{ai}$. We kunnen nu de effectieve weerstand tussen twee punten definiëren.

Definitie 2.1. De *effectieve weerstand* R_{ab} tussen twee punten a en b is gedefinieerd als:

$$R_{ab} = \frac{v_a - v_b}{Y}. \quad (2)$$

Uit deze twee wetten volgen de regels voor serie- en parallelschakelingen voor elektrische circuits. Als twee weerstanden met weerstand r_1 en r_2 in serie zijn geschakeld, dan kunnen we deze vervangen door één weerstand met waarde $r_1 + r_2$. Als we deze twee weerstanden parallel aan elkaar schakelen, dan kunnen we hen vervangen door een weerstand met waarde $(r_1^{-1} + r_2^{-1})^{-1}$. Dit illustreren we in de volgende figuur.



Figuur 1: Serie- en parallelschakeling van weerstanden.

Het kan voorkomen dat takken in een netwerk een gewicht hebben. Als de gewichten de geleiding van een tak voorstellen, dan wordt de weerstand de inverse van het gewicht. Als de gewichten de afstand tussen twee knopen voorstellen, dan wordt de weerstand hetzelfde als het gewicht.

Als we de effectieve weerstand als maat voor robuustheid willen gebruiken, moeten we de effectieve weerstand van de hele graaf bepalen. Dit is gedefinieerd als de som van de effectieve weerstanden over alle paren knopen van de graaf.

Definitie 2.2. De *totale effectieve weerstand* R_{tot} is gedefinieerd als:

$$R_{tot} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n R_{ij}.$$

De robuustheid van een graaf is gelijk aan de inverse van de totale effectieve weerstand. Er geldt namelijk dat de totale effectieve weerstand van een graaf altijd gedefinieerd is. Ook zullen we in Hoofdstuk 5 bewijzen dat de totale effectieve weerstand afneemt als de geleiding toeneemt, maar nooit gelijk wordt aan nul. De robuustheid wordt dan dus beter.

3 De Laplaciaan

In dit hoofdstuk gaan we andere methoden dan de formule uit Definitie 2.1 behandelen om de effectieve weerstand te bepalen. Deze methoden hebben alle te maken met de Laplaciaan van de graaf.

Definitie 3.1. De *Laplaciaan* L van een normale graaf $G = (V, E)$ is de $n \times n$ matrix met de volgende elementen:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{als } i = j \\ -1 & \text{als } (i, j) \in E \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hierbij is d_i de graad van knoop i . De Laplaciaan heeft dus de graden van de knopen als diagonaalelementen, en de waarde -1 als er een tak is tussen de knooppunten i en j . Als de Laplaciaan gegeven is, kunnen we daarmee de originele graaf weer terugvinden. We kunnen de Laplaciaan ook voor gewogen grafen definiëren.

Definitie 3.2. Zij $G = (V, E)$ een gewogen, normale graaf met de gewichten $w_{(i,j)}$ voor de takken (i, j) . De *gewogen Laplaciaan* L^W is de $n \times n$ matrix met de volgende elementen:

$$L_{ij}^W = \begin{cases} w_i = \sum_{j=1}^n w_{(i,j)} & \text{als } i = j \\ -w_{(i,j)} & \text{als } (i, j) \in E \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hierbij is w_i het gewicht van knooppunt i . Aangezien de rijsummen en de kolomsummen van de Laplaciaan gelijk zijn aan nul, weten we dat de Laplaciaan niet gewoon inverteerbaar is. We kunnen wel kijken naar de pseudoinverse van de Laplaciaan. Deze gaan we gebruiken om de effectieve weerstand te bepalen.

Definitie 3.3 (Moore-Penrose pseudoinverse [8]). De *pseudoinverse van de Laplaciaan* $(L^W)^+$ is de unieke matrix met de volgende eigenschappen:

1. $L^W(L^W)^+L^W = L^W$
2. $(L^W)^+L^W(L^W)^+ = (L^W)^+$
3. $(L^W(L^W)^+)^* = L^W(L^W)^+$
4. $((L^W)^+L^W)^* = (L^W)^+L^W$.

Hierbij is L^* de geconjugeerde getransponeerde matrix van L^W .

We kunnen de Laplaciaan gebruiken om de effectieve weerstand te bepalen. Als de gewichten van de graaf de geleiding van een tak voorstellen, dan geldt voor de weerstand tussen twee knooppunten a en b (Stelling 4.1 uit [2]):

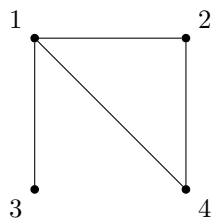
$$R_{ab} = (L^W)_{aa}^+ + (L^W)_{bb}^+ - 2(L^W)_{ab}^+. \quad (3)$$

Hierbij is $(L^W)_{ij}^+$ het $(i, j)^{de}$ element van de pseudoinverse van de Laplaciaan.

In de rest van de scriptie zullen we de volgende met de Laplaciaan geassocieerde matrices bestuderen:

- $L(i_1, \dots, i_k)$ is de Laplaciaan waarbij de rijen en kolommen met indices i_1, \dots, i_k zijn weggelaten.
- $L_{i,j}(k)$ is de Laplaciaan van de graaf G zonder de tak (i, j) , en zonder de k^{de} rij en kolom.

Voorbeeld 3.4. Bekijk de volgende graaf G gegeven in Figuur 2.



Figuur 2: De graaf G waarvan we de Laplaciaan gaan berekenen.

De Laplaciaan van onze graaf G is

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Er geldt dat $L(2)$ deze Laplaciaan is zonder de tweede rij en kolom, dus

$$L(2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ook geldt dat $L_{1,4}(2)$ bovenstaande Laplaciaan is zonder de tak $(1, 4)$, dus

$$L_{1,4}(2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We zien dat de graad van knooppunten 1 en 4 een minder is geworden, en de waarden -1 die overeen komen met tak $(1, 4)$ zijn veranderd in nullen.

4 Effectieve Weerstand

De totale effectieve weerstand van een gewogen graaf is ook te bepalen aan de hand van energiedissipatie [3]. De energiedissipatie over een tak (i, j) is het product van de stroom y_{ij} en het spanningsverschil $v_i - v_j$. In dit geval stellen de gewichten van de takken de geleiding van de tak voor. Voor de weerstand door een tak (i, j) geldt nu dus:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{w(i,j)} & \text{als } (i, j) \in E \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Voor de totale energiedissipatie E_{tot} van een netwerk krijgen we dus de volgende formule:

$$E_{tot} = \sum_{(i,j) \in E} y_{ij}(v_i - v_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} y_{ij}(v_i - v_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} y_{ij}^2 r_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} \frac{(v_i - v_j)^2}{r_{ij}}.$$

Hierbij hebben we voor de laatste twee gelijkheden vergelijking (1) gebruikt. De sommatie over $i, j \in V$ wordt genomen over aangrenzende knooppunten. We zijn vooral geïnteresseerd in de laatste uitdrukking. We kijken naar de eenheidsspanningen over knooppunten a en b .

Definitie 4.1. Gegeven twee knooppunten a en b in een graaf. Een *eenheidsspanning* u tussen a en b is een functie $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt:

- $u_a = 1$
- $u_b = 0$
- $0 \leq u_k \leq 1$ voor alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Zij U de verzameling zijn van alle eenheidsspanningen. Dus de totale energiedissipatie die bij eenheidsspanning u hoort is

$$E_{tot}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} \frac{(u_i - u_j)^2}{r_{ij}},$$

waarbij we sommeren over aangrenzende knooppunten. Uit het Dirichlet Principe [3] volgt dat voor de eenheidsspanning v die bepaald wordt door Kirchhoff's stroomwet, geldt dat:

$$E_{tot}(v) = \min_{u \in U} E_{tot}(u).$$

Het minimum wordt dus aangenomen als $u = v$. Dit minimum is uniek wegens het Dirichlet principe. Omdat v een eenheidsspanning is volgt uit het feit dat $v_a = 1$ en $v_b = 0$ dat

$$E_{tot} = \sum_{i \in V} v_i \sum_{j \in N(i)} y_{ij} = v_a y_a = \frac{v_a^2}{R_{ab}} = \frac{1}{R_{ab}}.$$

Als we dit combineren met het Dirichlet Principe, dan zien we dat

$$R_{ab} = \max_{u \in U} \frac{1}{E_{tot}(u)} = \sup \left\{ \frac{1}{\sum_{i,j \in V} \frac{(u_i - u_j)^2}{r_{ij}}} \mid u_a = 1, u_b = 0, 0 \leq u_k \leq 1, k = 1, \dots, n \right\}. \quad (4)$$

We sommeren hierbij over de knooppunten die met elkaar verbonden zijn. De volgende stelling uit [4] berust op vergelijking (4). Deze zullen we in Hoofdstuk 5 veralgemeniseren voor gewichten.

Stelling 4.2. *Laat G een normale samenhangende graaf zijn met $n \geq 3$ knopen, en $1 \leq a < b \leq n$. Als de gewichten op de takken de geleiding voorstellen, dus de inverse van de weerstand, dan geldt*

$$R_{ab} = \frac{\det L^W(a, b)}{\det L^W(a)}. \quad (5)$$

Bewijs. We willen (4) maximaliseren, dus kijken we naar de afgeleide van de inverse om deze te minimaliseren:

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{i,j \in V} \frac{(v_i - v_j)^2}{r_{ij}} = \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{i,j \in V} (v_i - v_j)^2 w_{(i,j)} = 2 \sum_{j \in N(i)} (v_i - v_j) w_{(i,j)} = 0. \quad (6)$$

We kunnen de knopen in G nummeren zoals we willen. Dus we hoeven de stelling alleen maar te bewijzen voor $a = n - 1$ en $b = n$. We kunnen de Laplaciaan van G als volgt noteren

$$L = \begin{pmatrix} L(n-1, n) & B \\ B^T & D \end{pmatrix}.$$

B en D zijn hier de overgebleven deelmatrices met grootte $(n-2) \times 2$ respectievelijk 2×2 . We kunnen vergelijking (6) nu als volgt schrijven

$$L(n-1, n) \mathbf{v}^T = \mathbf{c}^T. \quad (7)$$

Hierbij is $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$ en $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2})$. Er geldt immers dat $v_{n-1} = 1$ en $v_n = 0$. Voor $k = 1, 2, \dots, n-2$ hebben we

$$c_k = \begin{cases} w_{(k, n-1)} = w_{(n-1, k)} & \text{als } k \text{ en } n-1 \text{ verbonden zijn} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Merk op dat $w_{(i,j)} = 0$ als $(i, j) \notin E$. Omdat $v_{n-1} = 1$ en $v_n = 0$ en B en B^T symmetrisch zijn, geldt

$$\mathbf{v} B (v_{n-1}, v_n)^T = (v_{n-1}, v_n) B^T \mathbf{v}^T = - \sum_{i=1}^{n-2} v_i w_{(n-1, i)} \quad (8)$$

en

$$(v_{n-1}, v_n) D (v_{n-1}, v_n)^T = w_{n-1}. \quad (9)$$

Hierbij is w_{n-1} het gewicht van knooppunt $n-1$. Ook geldt de gelijkheid

$$\mathbf{vc}^T = \sum_{i=1}^{n-2} v_i w_{(n-1,i)} = \sum_{i \in N(n-1)} w_{(i,n-1)} v_i.$$

Als we deze gelijkheid combineren met (7), (8) en (9), dan krijgen we

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in V} \frac{(v_i - v_j)^2}{r_{ij}} &= (\mathbf{v}, v_{n-1}, v_n) L(\mathbf{v}, v_{n-1}, v_n)^T \\ &= \mathbf{v} L(n-1, n) \mathbf{v}^T + \mathbf{v} B(v_{n-1}, v_n)^T + (v_{n-1}, v_n) B^T \mathbf{v}^T \\ &\quad + (v_{n-1}, v_n) D(v_{n-1}, v_n)^T \\ &= \mathbf{vc}^T - 2 \sum_{i=1}^{n-2} v_i w_{(n-1,i)} + w_{n-1} \\ &= w_{n-1} - \sum_{k \in N(n-1)} w_{(k,n-1)} v_k. \end{aligned}$$

We weten dat de Laplaciaan positief-semidefinit ([2], Hoofdstuk 3) is. Omdat de graaf G samenhangend is, is $L(n-1, n)$ positief definit en bestaat de inverse. Zij t_{ij} het $(i, j)^{de}$ element van deze inverse. Dan volgt uit (7)

$$\mathbf{v}^T = (L(n-1, n))^{-1} \mathbf{c}^T,$$

dus

$$v_k = \sum_{l \in N(n-1)} t_{kl} w_{(l,n-1)}.$$

Zij $L(n-1, n|k, l)$ de Laplaciaan zonder de $(n-1)^{de}$ en n^{de} rij en kolom, en zonder de k^{de} rij en l^{de} kolom. Analoog definiëren we $L(n|k, l)$ als de Laplaciaan zonder de n^{de} rij en kolom, en zonder de k^{de} rij en l^{de} kolom. Er geldt dan met de regel van Cramer ([5], Hoofdstuk 6):

$$t_{kl} = (-1)^{k+l} \frac{\det L(n-1, n|l, k)}{\det L(n-1, n)}.$$

Dus we krijgen nu

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in V} \frac{(v_i - v_j)^2}{r_{ij}} &= \\ w_{n-1} - \sum_{k \in N(n-1)} \sum_{l \in N(n-1)} (-1)^{k+l} \frac{\det L(n-1, n|l, k)}{\det L(n-1, n)} w_{(k,n-1)} w_{(l,n-1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Als we de determinant van $L(n)$ ontwikkelen naar de laatste kolom dan krijgen we

$$\det L(n) = w_{n-1} \det L(n-1, n) - \sum_{k \in N(n-1)} (-1)^{k+n-1} \det L(n|k, n-1) w_{(k,n-1)}.$$

Als we nu $\det L(n|k, n-1)$ verder ontwikkelen naar de laatste rij krijgen we

$$\det L(n|k, n-1) = \sum_{l \in N(n-1)} (-1)^{l+n-1} \det L(n-1, n|l, k) w_{(l, n-1)}.$$

Dit geeft dus

$$\begin{aligned} \det L(n) &= w_{n-1} \det L(n-1, n) \\ &\quad - \sum_{k \in N(n-1)} \sum_{l \in N(n-1)} (-1)^{k+l} \det L(n-1, n|l, k) w_{(k, n-1)} w_{(l, n-1)}, \end{aligned}$$

oftewel

$$\begin{aligned} \frac{\det L(n)}{\det L(n-1, n)} &= \\ w_{n-1} - \sum_{k \in N(n-1)} \sum_{l \in N(n-1)} (-1)^{k+l} \frac{\det L(n-1, n|l, k)}{\det L(n-1, n)} w_{(k, n-1)} w_{(l, n-1)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Een combinatie van (10) en (11) geeft ons

$$\sum_{i, j \in V} \frac{(v_i - v_j)^2}{r_{ij}} = \frac{\det L(n)}{\det L(n-1, n)}.$$

Dit kunnen we weer substitueren in (4), wat de gezochte formule geeft. \square

5 Opspannende Bomen

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar een uitdrukking voor de effectieve weerstand in termen van opspannende bomen. Als $w_{ij} = 1$ voor alle takken in de graaf, dan geldt er een speciale uitspraak voor vergelijking (5):

$$R_{ab} = \frac{\# \text{ opspannende bomen door } (a, b)}{\# \text{ opspannende bomen in } G}. \quad (12)$$

Als de tak (a, b) niet bestaat, dan is de teller te bepalen door het aantal opspannende bomen te berekenen door tak (a, b) na deze toegevoegd te hebben. Om deze vergelijking te bewijzen hebben we de volgende stelling nodig.

Stelling 5.1 (Kirchhoff's Matrix Tree Theorem, Stelling 2.25 uit [6]).

Zij $G = (V, E)$ een normale, samenhangende graaf. Dan is het aantal opspannende bomen van de graaf gelijk aan $\det(L(i))$ voor alle $i \in V$.

We gebruiken deze stelling om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 5.2. *Zij $G = (V, E)$ een normale samenhangende graaf en zij $e = (i, j)$ een tak in de graaf. Dan geldt dat $\det(L(i, j))$ gelijk is aan het aantal opspannende bomen door tak e .*

Bewijs. We kunnen de knooppunten van de graaf nummeren zodat $e = (1, 2)$. Het is dus voldoende te bewijzen dat $\det(L(1, 2))$ het aantal opspannende bomen is door tak e . In het algemeen geldt de volgende uitspraak:

$$\begin{aligned} & \# \text{ opspannende bomen in } G \setminus e + \# \text{ opspannende bomen door tak } e \\ & = \# \text{ opspannende bomen in } G. \end{aligned}$$

Laat $L = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & D \end{pmatrix}$ de Laplaciaan zijn van G , waarbij A de 2×2 submatrix, B de $(n-2) \times 2$ submatrix en D de $(n-2) \times (n-2)$ submatrix zijn. Wegens symmetrie van de Laplaciaan hebben we rechtsboven de getransponeerde van B . Er geldt dat A gelijk is aan $\begin{pmatrix} d_1 & -1 \\ -1 & d_2 \end{pmatrix}$. Het verschil tussen G en $G \setminus e$ is de tak e . Dit is alleen te zien in de submatrix A . Als we kijken naar de Laplaciaan $L_{1,2}$ van $G \setminus e$, dan geldt $L_{1,2} = \begin{pmatrix} A' & B^T \\ B & D \end{pmatrix}$ waarbij $A' = \begin{pmatrix} d_1 - 1 & 0 \\ 0 & d_2 - 1 \end{pmatrix}$.

Uit Stelling 5.1 volgt dat het aantal opspannende bomen in G gelijk is aan $\det(L(1))$ en het aantal opspannende bomen in $G \setminus e$ is gelijk aan $\det(L_{1,2}(1))$. We krijgen nu het volgende:

$$\# \text{ opspannende bomen door tak } e = \det(L(1)) - \det(L_{1,2}(1)).$$

Definieer nu B' als de matrix B zonder de eerste kolom en C' als de matrix B^T zonder de eerste rij. Er geldt nu dat:

$$\begin{aligned} \det(L(1)) - \det(L_{1,2}(1)) &= \begin{vmatrix} d_2 & C' \\ B' & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_2 - 1 & C' \\ B' & D \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d_2 - d_2 + 1 & C' - C' \\ B' & D \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ B' & D \end{vmatrix} \\ &= \det(D) = \det(L(1, 2)). \end{aligned}$$

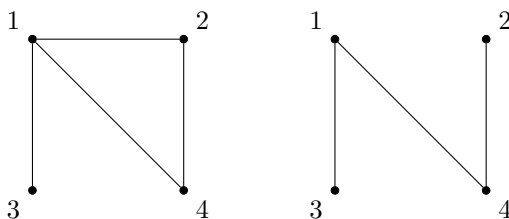
Er geldt dus dat het aantal opspannende bomen door e gelijk is aan $\det(L(1, 2))$. Door de knopen te hernummeren hebben we hiermee bewezen dat het aantal opspannende bomen door (i, j) gelijk is aan $\det(L(i, j))$. \square

Opmerking 5.3. Relatie (12) is ook te generaliseren als $(a, b) \notin E$. Zij $G_{a,b}$ de graaf waarbij we de tak (a, b) tijdelijk toevoegen. Er geldt dan

$$R_{ab} = \frac{\# \text{ opspannende bomen door } (a, b) \text{ in } G_{a,b}}{\# \text{ opspannende bomen in } G}. \quad (13)$$

Als we (a, b) toevoegen in G , dan verandert er in de Laplaciaan alleen iets in de rij van a en b , maar deze worden weggelaten in $\det(L(a, b))$, dus verandert er niets aan deze waarde. Dus voor $\det(L(a, b))$ kunnen we ook kijken naar de graaf $G_{a,b}$. De effectieve weerstand is dus uit te drukken in het aantal opspannende bomen door de tijdelijk toegevoegde tak.

Voorbeeld 5.4. Om dit te illustreren geven we een voorbeeld. We kijken naar de graaf G gegeven in Figuur 3. Het gewicht van alle takken is gelijk aan 1.



Figuur 3: De grafen G en $G \setminus (1, 2)$.

De Laplaciaan van onze graaf G is

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Het aantal bomen door de tak $(1, 2)$ is gelijk aan $\det(L(1, 2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

We gaan de tak $(1, 2)$ nu weghalen. De Laplaciaan van de resulterende graaf $G \setminus (1, 2)$ is

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

We zien dat er alleen veranderingen zijn in de eerste en tweede rij en kolom, dus er verandert niets aan de waarde $\det(L(1, 2))$. Dus als de tak niet in de graaf zit, kunnen we deze tijdelijk toevoegen, en is de $\det(L(1, 2))$ gelijk aan het aantal bomen door de toegevoegde tak.

6 Gewogen Grafen

Gewogen grafen kunnen op dezelfde manier geanalyseerd worden. In dit hoofdstuk zullen we Stelling 5.2 generaliseren. Hiervoor hebben we de volgende generalisatie nodig van Kirchhoff's Matrix Tree Theorem (Stelling 5.1) voor gewogen grafen [7].

Stelling 6.1. *Zij $G = (V, E)$ een normale, gewogen, samenhangende graaf. Voor een boom $T \subset G$ schrijven we het gewicht als $m(T) = \prod_{e \in T} w(e)$. De som van de gewichten van alle opspannende bomen is $P(G) = \sum_{T \subset G} m(T)$. Dan geldt:*

$$P(G) = \det(L(i))$$

voor alle $i \in V$.

Met behulp van deze stelling kunnen we Stelling 5.2 generaliseren voor gewogen grafen.

Stelling 6.2. *Zij $G = (V, E)$ een normale, gewogen, samenhangende graaf en zij $e = (i, j)$ een tak in de graaf. Dan geldt*

$$\det(L(i, j)) = \sum_{T_2 \subset G} m(T_2) \frac{1}{w_{(i, j)}},$$

met T_2 de verzameling opspannende bomen door tak e .

Bewijs. We kunnen de knooppunten van de graaf opnieuw naar eigen inzicht nummeren. Dus het is voldoende de stelling te bewijzen voor $e = (1, 2)$. Zij T de verzameling van alle bomen in de graaf, en zij T_1 de verzameling van alle bomen in de graaf $G \setminus e$. Definieer dan $T_2 = T \setminus T_1$, oftewel T_2 is de verzameling bomen door tak e . Er geldt dan:

$$\sum_{T \subset G} m(T) = \sum_{T_1 \subset G} m(T_1) + \sum_{T_2 \subset G} m(T_2).$$

We splitsen hier $P(G)$ op in de som over de bomen die tak e bevatten en de som over de bomen die tak e niet bevatten. Als we Stelling 6.1 toepassen, krijgen we:

$$\det(L(1)) = \det(L_{1,2}(1)) + \sum_{T_2 \subset G} m(T_2),$$

oftewel

$$\sum_{T_2 \subset G} m(T_2) = \det(L(1)) - \det(L_{1,2}(1)).$$

We schrijven de Laplaciaan weer als volgt:

$$L = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & D \end{pmatrix}.$$

Hierbij is A een 2×2 matrix, B een $(n-2) \times 2$ en D een $(n-2) \times (n-2)$ matrix. Nu geldt $A = \begin{pmatrix} w_1 & -w_{(1,2)} \\ -w_{(1,2)} & w_2 \end{pmatrix}$. De Laplacianen van G en $G \setminus e$ verschillen

alleen in elementen van de submatrix A . Er geldt dat $L_{1,2} = \begin{pmatrix} A' & B^T \\ B & D \end{pmatrix}$ met $A' = \begin{pmatrix} w_1 - w_{(1,2)} & 0 \\ 0 & w_2 - w_{(1,2)} \end{pmatrix}$. Definieer nu B' als de matrix B zonder de eerste kolom en C' als de matrix B^T zonder de eerste rij. Er geldt nu dat:

$$\begin{aligned} \det(L(1)) - \det(L_{1,2}(1)) &= \begin{vmatrix} w_2 & C' \\ B' & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_2 - w_{(1,2)} & C' \\ B' & D \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} w_2 - w_2 + w_{(1,2)} & C' - C' \\ B' & D \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} w_{(1,2)} & 0 \\ B' & D \end{vmatrix} \\ &= w_{(1,2)} \det(D) = w_{(1,2)} \det(L(1, 2)). \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\sum_{T_2 \subset G} m(T_2) = \det(L(1)) - \det(L_{1,2}(1)) = w_{(1,2)} \det(L(1, 2)),$$

oftewel

$$\det(L(1, 2)) = \sum_{T_2 \subset G} m(T_2) \frac{1}{w_{(1,2)}}.$$

□

Stelling 6.2 is ook als volgt te interpreteren. Deel de graaf op in twee componenten. Eén component bevat knooppunt i en de andere bevat knooppunt j . We willen kijken hoeveel deelbossen we kunnen maken, onder voorbehoud dat de componenten disjunct blijven. Dit kan op $\sum_{T_2 \subset G} m(T_2) \frac{1}{w_{(i,j)}} = \det L(i, j)$ manieren, waarbij T_2 het aantal bomen door (i, j) is. Stel nou dat we nog een derde component maken, die knoop $k \neq i, j$ bevat, en er geldt $(i, k) \in E$. Het aantal deelbossen dat we nu kunnen maken is gelijk aan $\sum_{T \subset G} m(T) \frac{1}{w_{(i,j)} w_{(i,k)}}$. Hierbij is T het aantal bomen door de takken (i, j) en (i, k) . Dit is weer gelijk aan $\det L(i, j, k)$. Door steeds een tak weg te halen kunnen we Stelling 6.2 uitbreiden naar een deelboom met meerdere takken.

Stelling 6.3. *Zij G een normale samenhangende graaf met m takken en n knooppunten. Neem $1 \leq k \leq n - 1$ takken, namelijk de takken $\{e_1, \dots, e_k\} = E'$, die een samenhangende deelboom vormen die de knopen $\{i_1, \dots, i_{k+1}\} \in V$ bevat. Zij T de verzameling van opspannende bomen in G die alle takken in E' bevatten. Er geldt dan*

$$\det(L(i_1, \dots, i_{k+1})) = \frac{1}{\prod_{e \in E'} w(e)} \sum_{T \subset G} m(T).$$

Bewijs. We gaan het bewijzen met inductie naar het aantal takken k .

Voor $k = 1$ hebben we in Stelling 6.2 bewezen dat de uitspraak klopt.

We nemen nu $1 < k < n - 1$ willekeurig, en we nemen aan dat de stelling geldt voor k . We noemen dit de inductiehypothese. We willen de stelling nu bewijzen voor $k + 1$. Neem nu een willekeurige samenhangende deelboom met $k + 1$ takken,

en nummer de knopen $1, \dots, k+2$. We weten dat een boom altijd een knoop heeft met graad 1. Dus onze deelboom met $k+1$ takken heeft dat ook. Stel zonder verlies van algemeenheid dat dit knooppunt $k+2$ is, en dat dit verbonden is met knooppunt $k+1$. Als we deze tak verwijderen, dan hebben we een deelboom met $k+1$ knopen en k takken. We noemen deze deelboom G_k , en we definiëren F als de verzameling takken van G_k . We kijken nu naar alle opspannende bomen in G die de deelboom G_k bevatten. We kunnen dit als volgt splitsen:

$$\begin{aligned} & \# \text{ opspannende bomen dat } G_k \text{ en } (k+1, k+2) \text{ bevat} \\ & + \# \text{ opspannende bomen door } G_k \text{ dat } (k+1, k+2) \text{ niet bevat} \\ & = \# \text{ opspannende bomen dat } G_k \text{ bevat.} \end{aligned}$$

Uit de inductiehypothese volgt dat het aantal opspannende bomen dat G_k bevat gelijk is aan

$$\prod_{e \in F} w(e) \cdot \det(L(1, \dots, k+1)).$$

Analoog kunnen we ook een uitdrukking geven voor het aantal opspannende bomen door G_k dat $(k+1, k+2)$ niet bevat, namelijk

$$\prod_{e \in F} w(e) \cdot \det(L_{k+1, k+2}(1, \dots, k+1)).$$

Er volgt:

$$\begin{aligned} & \# \text{ opspannende bomen dat } G_k \text{ en } (k+1, k+2) \text{ bevat} \\ & = \prod_{e \in F} w(e) \cdot \left(\det(L(1, \dots, k+1)) - \det(L_{k+1, k+2}(1, \dots, k+1)) \right). \end{aligned}$$

Laat $L = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & D \end{pmatrix}$ en $L_{k+1, k+2} = \begin{pmatrix} A' & B^T \\ B & D \end{pmatrix}$, waarbij A en A' $(k+2) \times (k+2)$ matrices zijn. A en A' verschillen alleen in de $(k+1)^{ste}$ en $(k+2)^{de}$ rij en kolom. Er geldt dat $a'_{k+2, k+2} = a_{k+2, k+2} - w_{(k+1, k+2)}$. Dus er geldt:

$$\begin{aligned} & \det(L(1, \dots, k+1)) - \det(L_{k+1, k+2}(1, \dots, k+1)) \\ & = \begin{vmatrix} a_{k+1, k+1} & C' \\ B' & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{k+1, k+1} - w_{(k+1, k+2)} & C' \\ B' & D \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_{k+1, k+1} - a_{k+1, k+1} + w_{(k+1, k+2)} & C' - C' \\ B' & D \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} w_{(k+1, k+2)} & 0 \\ B' & D \end{vmatrix} \\ & = w_{(k+1, k+2)} \det(D) = w_{(k+1, k+2)} \det(L(1, \dots, k+2)). \end{aligned}$$

Als T de verzameling van bomen is dat G_k en $(k+1, k+2)$ bevat, en $E' = F \cup (k+1, k+2)$, dan geldt:

$$\prod_{e \in E'} w_{(e)} \cdot \det(L(1, \dots, k+2)) = \sum_{T \subset G} m(T),$$

oftewel

$$\det(L(1, \dots, k+2)) = \frac{1}{\prod_{e \in E'} w_{(e)}} \sum_{T \subset G} m(T).$$

□

We kunnen de knooppunten weer nummeren zoals we zelf willen, dus kunnen we het aantal opspannende bomen bepalen door meerdere takken, zolang de takken maar een samenhangende deelgraaf vormen.

We gaan nu kijken wat er gebeurt met de effectieve weerstand als we het gewicht van een tak verhogen. Het gewicht van de tak staat voor de geleiding, dus we willen dat de effectieve weerstand kleiner wordt, want dan wordt de robuustheid beter. Er geldt voor de effectieve weerstand tussen twee knooppunten a en b

$$R_{ab} = \frac{\det L(a, b)}{\det L(a)} = \frac{\sum_{T_1 \subset G} \frac{m(T_1)}{w_{(a,b)}}}{P(G)} = \frac{\sum_{T_1 \subset G} \frac{m(T_1)}{w_{(a,b)}}}{w_{(a,b)} \sum_{T_1 \subset G} \frac{m(T_1)}{w_{(a,b)}} + \sum_{T_2 \subset G} m(T_2)},$$

waarbij T_1 de opspannende bomen zijn die (a, b) bevatten en T_2 de opspannende bomen die (a, b) niet bevatten. We hebben bij de laatste gelijkheid $P(G)$ opgesplitst in de verzameling bomen die (a, b) wel en niet bevatten. Merk op dat voor iedere boom in T_1 geldt dat er een factor $w_{(a,b)}$ in het gewicht van de boom zit. We hebben in de laatste uitdrukking deze factor er steeds uitgedeeld. We gaan nu kijken naar de afgeleide naar $w_{(a,b)}$ van deze uitdrukking, om te kijken of $R_{a,b}$ toeneemt of afneemt als we $w_{(a,b)}$ verhogen. Er geldt

$$\frac{\partial R_{ab}}{\partial w_{(a,b)}} = \frac{-(\sum_{T_1 \subset G} \frac{m(T_1)}{w_{(a,b)}})^2}{P(G)^2} < 0.$$

Het verhogen van het gewicht van een tak vermindert dus de effectieve weerstand tussen de aangrenzende twee knopen.

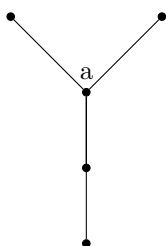
We hebben ook gekeken wat er gebeurt met de weerstand tussen andere takken als we de geleiding verhogen, maar met de formules die gebaseerd zijn op de determinanten van de Laplaciaan konden we het niet bewijzen. In de masterscriptie van W. Ellens is echter al aangetoond dat het gewicht verhogen van een tak de totale effectieve weerstand niet verhoogt, dus de robuustheid van de graaf wordt beter [2].

7 Spingraaf

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar de zogenaamde spingraaf. We bestuderen welke tak we het best kunnen toevoegen om de robuustheid te verbeteren.

Definitie 7.1. Een *spingraaf* is een samenhangende, normale graaf $G = (V, E)$ met de eigenschap dat er maximaal één knooppunt is met een graad groter dan 2. Dit knooppunt wordt ook wel het centrale knooppunt genoemd.

In de figuur hieronder staat een voorbeeld van een spingraaf.

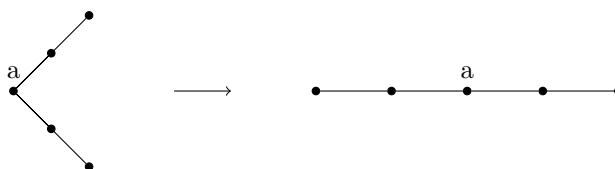


Figuur 4: Een spingraaf met centraal knooppunt a en 3 poten.

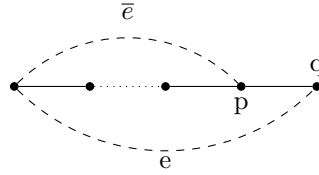
Er zijn netwerken die lijken op spingrafen, zoals het metronetwerk van Rotterdam. Intuïtief zouden we het beste de tak tussen de twee langste poten moeten toevoegen als we de robuustheid willen verbeteren, want dan maken we de grootste cykel. Als er dan een tak wegvalt uit de cykel, dan zijn alle knooppunten in de cykel nog te bereiken. Maar als we de totale effectieve weerstand als maat voor de robuustheid gebruiken, dan zien we dat dit niet altijd het geval is. We zullen eerst kijken naar een spingraaf met twee poten.

Stelling 7.2. Gegeven een spingraaf $G = (V, E)$ met twee poten, $|V| = n$ en $3 \leq n \leq 9$. Als we een nieuwe tak toevoegen met behoud van normaliteit, dan neemt de robuustheid maximaal toe als we de tak tussen de twee uiteinde van de poten toevoegen.

Bewijs. Merk op dat we de spingraaf met twee poten ook kunnen zien als een padgraaf met minstens 3 knooppunten. Dit is geïllustreerd in onderstaande figuur.

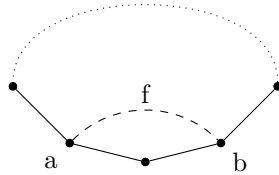


Om te bewijzen dat een nieuwe tak tussen de uiteinden de robuustheid het meest verhoogt, gaan we eerst aantonen dat als we de tak e toevoegen, de totale effectieve weerstand meer afneemt dan als we de tak \bar{e} toevoegen. Zie Figuur 5.



Figuur 5: Padgraaf met twee takken e en \bar{e} die we kunnen toevoegen.

Voor een graaf die bestaat uit een cykel met n knopen gaan we de totale effectieve weerstand berekenen met behulp van het aantal opspannende bomen. Er zijn n paar knopen die één tak van elkaar vandaan zitten. Als we de cykel de andere kant op volgen, dan zitten er $n - 1$ takken tussen. Dus voor deze n paren knopen is de effectieve weerstand gelijk aan het aantal opspannende bomen in de cykel die door de verbindingstak gaan gedeeld door het totaal aantal opspannende bomen in de cykel. Dus de effectieve weerstand is gelijk aan $\frac{n-1}{n}$. Als we kijken naar alle paren knopen die twee takken van elkaar verwijderd zijn, dan wordt de effectieve weerstand tussen deze twee knopen bepaald door het aantal opspannende bomen door de tijdelijk toegevoegde tak tussen deze knopen in de cykel. Dit is gelijk aan $2(n - 2)$, want voor iedere opspannende boom kunnen we één van de twee takken weglaten uit het onderste gedeelte en één van de $n - 2$ takken uit het bovenste gedeelte.



Figuur 6: Cykel waarbij we tijdelijk $f = (a, b)$ toevoegen.

De effectieve weerstand tussen dit paar knopen wordt dan $R_{ab} = \frac{2(n-2)}{n}$. Dit kunnen we blijven doen totdat we hebben gekeken naar alle knopen die $n - 1$ takken van elkaar verwijderd zijn. We hebben nu wel alle paren knopen dubbel geteld, dus voor de totale effectieve weerstand moeten we deze som nog halveren. We krijgen dus

$$R_{tot} = \frac{1}{2}n \left(\frac{1 \cdot (n-1)}{n} + \frac{2 \cdot (n-2)}{n} + \dots + \frac{(n-1) \cdot 1}{n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(n-k).$$

We gaan nu de volgende claim bewijzen:

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1).$$

Dit doen we met behulp van volledige inductie naar n .

Voor $n = 1$ geldt $\sum_{k=1}^1 k(1-k) = 0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2$. Dus de claim is waar voor $n = 1$.

Stel nu dat de claim geldt voor n . We gaan nu aantonen dat de claim geldt voor $n + 1$. Met volledige inductie volgt dan dat de claim waar is voor alle n . Er geldt

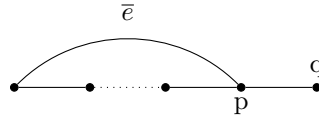
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k) &= \sum_{k=1}^n k(n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^n kn + k - k^2 \\
&= \sum_{k=1}^n kn - k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
&= \sum_{k=1}^n k(n-k) + \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n-1+3) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

Hierbij is bij de vijfde gelijkheid gebruik gemaakt van de inductiehypothese en het feit dat $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$. Hiermee is de claim bewezen.

We hebben $|V| = n$ knopen. Als we kijken naar de padgraaf in Figuur 5, dan kunnen we 2 takken toevoegen. Als we tak e toevoegen, krijgen we een cykel met n knopen, dus de totale effectieve weerstand wordt

$$R_{tot\ e} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{1}{12}(n-1)n(n+1).$$

Als we tak \bar{e} toevoegen, dan krijgen we de volgende graaf



De cykel in deze graaf heeft $n - 1$ knopen. De weerstand tussen alle knooppunten in de cykel is

$$R_{cykel} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-1-k) = \frac{1}{12}(n-2)(n-1)n.$$

We moeten nog de effectieve weerstand naar het knooppunt q bepalen. Er geldt

$$\sum_{a \neq q \in V} R_{aq} = \sum_{a \neq q \in V} (R_{ap} + 1) = \sum_{a \neq q \in V} R_{ap} + (n-1).$$

We hebben hier gebruik gemaakt van de regel voor serieschakelingen. Ook geldt

$$\sum_{a \neq q \in V} R_{ap} = \frac{2}{n-1} R_{cykel} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-1-k) = \frac{1}{6}(n-2)n.$$

De totale effectieve weerstand wordt nu

$$R_{tot \bar{e}} = R_{cykel} + \sum_{a \neq q \in V} R_{aq} = \frac{1}{12}(n-2)(n-1)n + \frac{1}{6}(n-2)n + (n-1).$$

We moeten nu aantonen dat geldt $R_{tot e} < R_{tot \bar{e}}$, oftewel

$$\frac{1}{12}(n-1)n(n+1) < \frac{1}{12}(n-2)(n-1)n + \frac{1}{6}(n-2)n + (n-1),$$

dus

$$\frac{1}{12}(n-1)n(n+1 - (n-2)) < \frac{1}{6}(n-2)n + n - 1.$$

We zien dus dat

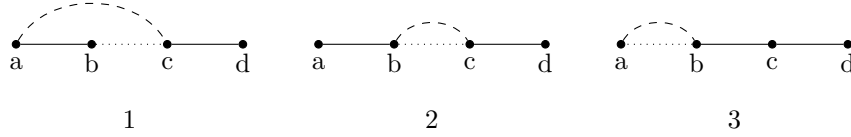
$$\frac{1}{4}(n-1)n - \frac{1}{6}(n-2)n - n + 1 < 0,$$

oftewel

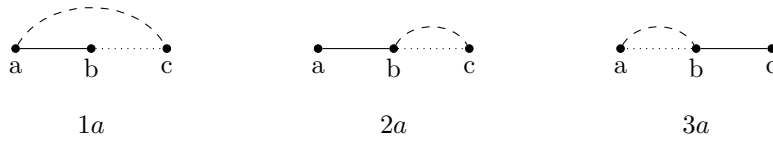
$$\frac{1}{12}n^2 - \frac{11}{12}n + 1 < 0.$$

Dit klopt klopt voor $n \leq 9$. Dus e toevoegen is beter voor de robuustheid dan wanneer we \bar{e} toevoegen. Nu moeten we nog aantonen dat \bar{e} toevoegen beter is dan een tak toevoegen ongelijk \bar{e} en e .

We moeten nu kijken naar de volgende gevallen met ieder $n \leq 9$ knooppunten.



We zullen bij de effectieve weerstand met een superindex aangeven bij welke situatie de effectieve weerstand hoort. Situatie 1 is hetzelfde als wanneer we tak e toevoegen in Figuur 5. In situatie 2 hebben we de tak aan de linkerkant een knoop opgeschoven naar rechts en in situatie 3 hebben we de tak aan de rechterkant een knoop naar links opgeschoven. We moeten nu aantonen dat in situaties 2 en 3 de robuustheid minder is dan in situatie 1. We beschouwen eerst de situaties zonder knooppunt d .



We weten dat de effectieve weerstand in situatie 1a kleiner is dan in situaties 2a en 3a. We definiëren de effectieve weerstand R_a^1 , R_a^2 en R_a^3 voor situatie 1a, 2a en 3a respectievelijk, dus

$$R_a^i = \sum_{k < l; k, l \neq d} R_{kl}^i.$$

Er geldt $R_{tot}^i = R_a^i + \sum_{k \neq d} R_{kd}^i$ voor $i = \{1, 2, 3\}$. We gaan nu aantonen dat $R_{tot}^1 \leq R_{tot}^2, R_{tot}^3$.

In situatie 1 geldt

$$\sum_{k \neq d} R_{kd}^1 = \sum_{k \neq d} (R_{kc}^1 + 1) = n - 1 + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-1-k) = n - 1 + \frac{1}{6}(n-2)n.$$

De eerste gelijkheid geldt vanwege serieschakelingen. Voor situatie 2 geldt

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq d} R_{kd}^2 &= \sum_{k \neq d} (R_{kc}^2 + 1) = \sum_{k \neq a, d} R_{kc}^2 + n - 1 + R_{ac}^2 \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} k(n-2-k) + n - 1 + 1 + R_{bc}^2 \\ &= \frac{1}{6}(n-3)(n-1) + n + R_{bc}^2 \\ &= \frac{1}{6}(n-3)(n-1) + n + \frac{n-3}{n-2}. \end{aligned}$$

We hebben hier gebruik gemaakt dat $R_{bc}^2 = \frac{n-3}{n-2}$, want dat is het aantal opspannende bomen door (b, c) in een cykel met $n-2$ knopen gedeeld door het aantal opspannende bomen in de cykel. We moeten nu dus aantonen dat geldt $R_{tot}^1 < R_{tot}^2$ voor $3 \leq n \leq 9$, oftewel

$$\begin{aligned} R_a^1 + \sum_{k \neq d} R_{kd}^1 &= \frac{1}{12}(n-2)(n-1)n + \frac{1}{6}(n-2)n + n - 1 \\ &< \frac{1}{12}(n-3)(n-2)(n-1) + \frac{1}{6}(n-3)(n-1) + n - 2 \\ &\quad + \frac{1}{6}(n-3)(n-1) + n + \frac{n-3}{n-2} \\ &= R_a^2 + \sum_{k \neq d} R_{kd}^2. \end{aligned}$$

Dit is te reduceren tot

$$n^3 - 10n^2 + 48 < 0.$$

Dit is kleiner dan nul als $6 - 2\sqrt{3} < n < 6 + 2\sqrt{3}$, dus in het bijzonder als $3 \leq n \leq 9$. Er geldt dus dat $R_{tot}^1 < R_{tot}^2$ voor $3 \leq n \leq 9$.

We weten dat $R_a^1 < R_a^3$, dus we moeten nog aantonen dat $\sum_{k \neq d} R_{kd}^1 < \sum_{k \neq d} R_{kd}^3$. Er geldt

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq d} R_{kd}^3 &= \sum_{k \neq d} (R_{kc}^3 + 1) = \sum_{k \neq c, d} (R_{kb}^3 + 1) + n - 1 \\ &= \sum_{k \neq c, d} R_{kb}^3 + n - 1 + n - 2 \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} k(n-2-k) + 2n - 3 \\ &= \frac{1}{6}(n-3)(n-1) + 2n - 3. \end{aligned}$$

We moeten nu dus aantonen dat

$$n - 1 + \frac{1}{6}(n - 2)n \leq \frac{1}{6}(n - 3)(n - 1) + 2n - 3.$$

Dit is te reduceren tot

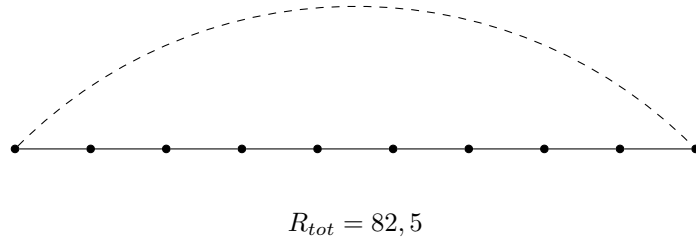
$$-4n \leq -9.$$

Dus $\sum_{k \neq d} R_{kd}$ is kleiner in situatie 1 daar $n \geq \frac{9}{4}$. Aangezien $n \geq 3$, wordt hieraan voldaan. Er geldt dus dat R_{tot}^1 kleiner is dan R_{tot}^2 en R_{tot}^3 . Dus tak \bar{e} toevoegen is beter dan een andere tak toevoegen. Dit impliceert dat e toevoegen de grootste vermindering in de totale effectieve weerstand geeft, dus de grootste verbetering in de robuustheid.

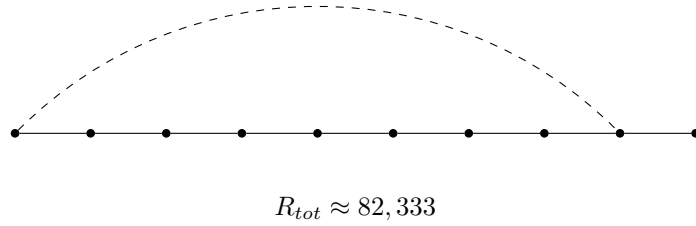
Als de tak die we toevoegen een nog kleinere cykel maakt, dan volgt met behulp van serieschakelingen dat de totale effectieve weerstand groter is dan in situatie 1, dus de robuustheid is maximaal als we een tak toevoegen tussen de twee uiteinden van de padgraaf.

□

In het vorige bewijs zien we dat een nieuwe tak toevoegen tussen de twee poten niet optimaal is als we tien of meer knooppunten hebben. Dit is tegen-intuïtief, want we verwachten dat een grotere cykel voor betere robuustheid zorgt. We gaan nu kijken naar het geval $n = 10$ en $r_{ij} = 1$ voor alle takken. We krijgen dan de volgende twee grafen met bijbehorende totale effectieve weerstand:

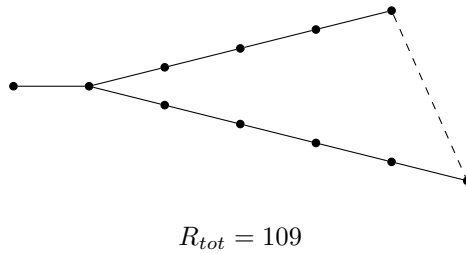


Figuur 7: Padgraaf met 10 knopen waar een tak tussen de twee uiteinden toevoegen.

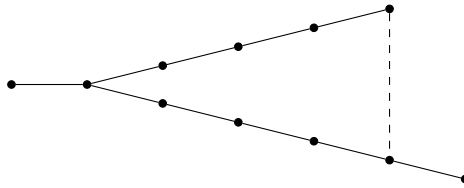


Figuur 8: Padgraaf met 10 knopen waarbij we een tak toevoegen tussen het eerste en negende knooppunt.

We zien dat volgens de totale effectieve weerstand de graaf in Figuur 8 robuuster is dan de graaf in Figuur 7. Dit geldt niet voor alle robuustheidsmaten. Eén van de maten die we bekijken is de *algebraïsche connectiviteit*. De algebraïsche connectiviteit is de op één na kleinste eigenwaarde van de Laplaciaan. In de master scriptie van W. Ellens staan de voor- en nadelen beschreven van de algebraïsche connectiviteit als maat voor de robuustheid [2]. In Figuur 7 is de algebraïsche connectiviteit gelijk aan $\frac{987}{2584} \approx 0,382$ en in Figuur 8 wordt de algebraïsche connectiviteit $\frac{351}{1006} \approx 0,349$. We zien dat in dit geval de intuïtie wel klopt en dat de graaf in Figuur 7 robuuster is. We gaan nu kijken naar spingrafen met 3 poten. Ook hiervoor geldt dat een tak toevoegen tussen de langste poten niet altijd optimaal is. Kijk bijvoorbeeld naar de volgende grafen.



Figuur 9: Een spingraaf waaraan we de gestreepte tak tussen de langste poten toevoegen.



$$R_{tot} \approx 108,888$$

Figuur 10: Een spingraaf waaraan we de gestreepte tak toevoegen.

Voor de graaf in Figuur 9 is de algebraïsche connectiviteit gelijk aan $\frac{65}{219} \approx 0,297$ en voor de graaf in Figuur 10 is die gelijk aan $\frac{485}{1716} \approx 0,283$. Dus ook hier geeft de algebraïsche connectiviteit aan dat de tak toevoegen die de grootste cykel maakt beter is dan de tak toevoegen die de op één na grootste cykel maakt. Dit is wat we verwachten, maar het is anders dan wat de totale effectieve weerstand zegt over de robuustheid van de graaf. Die geeft namelijk aan dat het beter is om de op één na grootste cykel te maken in plaats van de grootste cykel.

Toch blijkt in het algemeen dat de algebraïsche connectiviteit niet een betere maat is voor robuustheid. Zie de masterscriptie van W. Ellens voor voorbeelden [2].

8 Conclusie

We hebben gekeken naar de totale effectieve weerstand als maat voor robuustheid. In het artikel van R.B. Bapat et al.[4] is een formule gegeven voor de effectieve weerstand tussen twee knooppunten. Wij hebben deze formule geïnterpreteerd aan de hand van opspannende bomen. Dit hebben we bewezen in Stelling 5.2 en gegeneraliseerd voor gewogen grafen in Stelling 6.2. Ook hebben we gekeken naar de spingraaf met twee poten en drie poten. Als we een tak willen toevoegen aan de spingraaf, dan blijkt dat de totale effectieve weerstand niet altijd maximaal afneemt als we de tak toevoegen die de grootste cykel oplevert. De algebraïsche connectiviteit geeft voor enkele specifieke gevallen wel aan dat de tak toevoegen die de grootste cykel maakt beter is dan de tak toevoegen die de op één na grootste cykel maakt.

Referenties

- [1] D.J. Klein en M. Randić (1993), Resistance Distance, *Journal of Mathematical Chemistry*, 12: 81-95.
- [2] W. Ellens (2011), Effective Resistance, Master Thesis, Universiteit van Leiden.
- [3] M. Heydenreich, F. den Hollander, E. Verbitsky (2014), Random Walks Lecture Notes, Universiteit van Leiden.
- [4] R.B. Bapat, I. Gutman, W. Xiao (2003), A Simple Method for Computing Resistance Distance, *Z. Naturforsch*, 58a: 494-498.
- [5] C.D. Meyer (2000), Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM.
- [6] F.M. Spieksma, L.C.M. Kallenberg (2015), Besliskunde B Dictaat, Universiteit van Leiden.
- [7] D.G. Wagner (2009), Combinatorics of Electrical Networks, Universiteit van Waterloo.
- [8] Wikipedia, Moore-Penrose pseudoinverse.
https://en.wikipedia.org/wiki/Moore-Penrose_pseudoinverse