

A.A. Hendriksen

Percolatietheorie op bomen

Bachelorscriptie, 18 november 2013

Scriptiebegeleider: Prof. Dr. W.Th.F. den Hollander



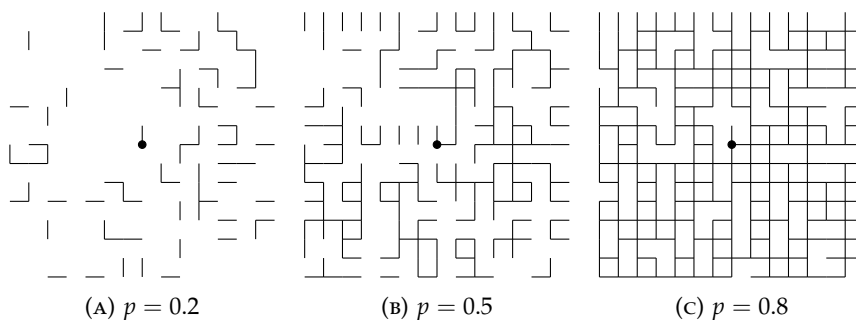
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

INHOUDSOPGAVE

1. Introductie	1
2. Percolatie op het rooster	2
2.1. Kritieke waarde	3
2.2. Uniek oneindig cluster	5
2.3. Continuïteit van de percolatiefunctie	8
3. Vertakkingsprocessen	9
3.1. Verwachte generatiegrootte	10
3.2. Uitstervingskans	11
4. Percolatie op bomen	13
4.1. Binaire boom	13
4.2. Binaire driehoeksboom	14
4.3. Periodieke bomen	15
4.4. Toevallige bomen	16
Referenties	18

1. INTRODUCTIE

Het percolatiemodel is in 1957 opgesteld door Hammersley en Broadbent om te bestuderen in hoeverre een vloeistof een poreus medium doordringt. Men beschouwt het oneindige rooster \mathbb{Z}^d van 'knopen' waarin elk paar buurpunten verbonden is door 'bindingen'. Elke binding heeft een willekeurig gewicht dat wordt getrokken uit een uniforme verdeling op het interval $(0,1)$. Nadat een vaste parameter $p \in [0,1]$ is vastgesteld, wordt een binding geclassificeerd als 'open' als haar gewicht kleiner is dan p en anders 'gesloten'. Zo verkrijgt men een netwerk van open en gesloten bindingen. Als $p = 1$ dan zijn alle bindingen open en als $p = 0$ dan zijn alle bindingen gesloten. Gegeven een netwerk met toegewezen gewichten en een parameter p kan men kijken hoever men vanuit de oorsprong over open bindingen kan lopen. Het cluster $C(p)$ is de verzameling van knopen die vanuit de oorsprong over open bindingen te bereiken zijn. In figuur 1 is te zien hoe dit cluster groeit bij toenemende waarden van p .



FIGUUR 1. Verschillende percolatieroosters. Alleen open bindingen zijn weergegeven. Merk op dat $|C(0.2)| = 2$, $|C(0.5)| = 13$, terwijl $C(0.8)$ bijna het gehele rooster beslaat.

We zijn geïnteresseerd in de kans dat de oorsprong onderdeel is van een oneindig groot cluster. We beschouwen de percolatiefunctie

$$\theta(p) = P(|C(p)| = \infty).$$

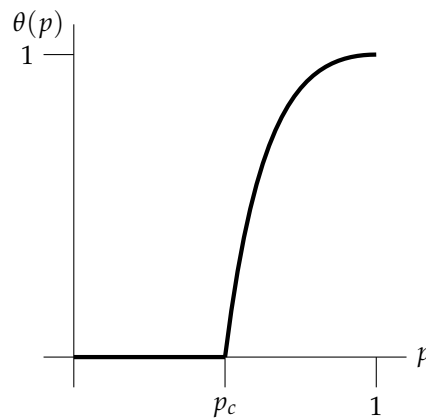
Zoals we zien in figuur 2 is de functie voor kleine p gelijk aan 0. Vanaf een kritieke waarde p_c geldt $\theta(p) > 0$. We definiëren de kritieke waarde

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

Deze kritieke waarde speelt een belangrijke rol binnen de percolatietheorie. We zullen p_c voor verschillende roosters bepalen en bewijzen dat voor alle dimensies p_c ongelijk 0 of 1 is. Naast de vraag of de oorsprong in een oneindig open cluster bevat is, kan men zich ook afvragen of er naast dit cluster nog andere oneindige open clusters zijn. Ook deze vraag zullen we beantwoorden. Vervolgens bewijzen we enkele resultaten met betrekking tot de continuïteit van de percolatiefunctie.

De aantrekkingskracht van percolatietheorie is deels te verklaren door het feit dat de probleemstelling eenvoudig te formuleren is, maar de oplossing complexe wiskunde vereist. Daarnaast is de theorie op tal van natuurkundige problemen van toepassing. De doordrenkingsgraad van poreus gesteente is al genoemd, maar men kan ook met behulp van de theorie bepalen hoever de bomen in een boomgaard uit elkaar geplaatst zouden moeten worden om in geval van vuur een brand in de kiem te smoren. De bomen moeten op zulk een afstand van elkaar geplaatst worden dat de kans dat het vuur overslaat tussen naburige bomen kleiner is dan de kritieke waarde p_c .

Ook op andere netwerken dan het Euclidische rooster kan men percolatie toepassen. Het tweede deel van deze scriptie zal zich toeleggen op bomen en boomachtige structuren. We zullen een methode ontwikkelen voor het bepalen van de kritieke waarde en bekijken wat de invloed is van het op willekeurige wijze opbouwen van de netwerkstructuur op de kritieke waarde. We zullen aan de hand van een aantal voorbeelden de theorie ontwikkelen.



FIGUUR 2. Een schets van de percolatiefunctie. Tot de kritieke waarde blijft de kans op een oneindig cluster gelijk nul. Daarna stijgt de functie monotoon tot 1.

2. PERCOLATIE OP HET ROOSTER

We zullen beginnen met enkele definities om het model duidelijk vast te leggen. Het d -dimensionale Euclidische rooster zullen we met \mathbb{Z}^d aanduiden. In het vervolg nemen we $d \geq 2$, omdat de fenomenen die we zullen bestuderen niet voorkomen op de een-dimensionale getallenlijn. Op het rooster definiëren we de

afstandsfunctie

$$d : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|.$$

Twee knopen $x, y \in \mathbb{Z}^d$ zijn verbonden door een binding als $d(x, y) = 1$. De verzameling bindingen van \mathbb{Z}^d noemen we \mathbb{E}^d . Twee knopen x, y heten aangrenzend als $d(x, y) = 1$ en knoop x heet incident met binding e als e aan x verbonden is. [2]

Aan elke binding in $e \in \mathbb{E}^d$ wordt een uniform getrokken gewicht $w_e \sim \mathcal{U}(0, 1)$ toegekend. Zij $p \in [0, 1]$ en q zodanig dat $p + q = 1$. Een binding e heet open als $w_e \leq p$ en anders gesloten. We beschouwen de graaf van \mathbb{Z}^d met alleen de open bindingen. De samenhangende componenten hiervan noemen we ‘open clusters’. Gegeven verschillende waarden p zullen deze open clusters anders zijn. We zijn geïnteresseerd in het open cluster dat de oorsprong bevat en definiëren daarom

$$C(p) = \{\text{het open cluster dat de oorsprong bevat}\}.$$

De kans dat de oorsprong bevat is in een oneindig open cluster noteren we als

$$\theta(p) = P(|C(p)| = \infty).$$

Omdat het rooster \mathbb{Z}^d translatie-invariant is, mogen we deze kans zien als de kans dat een willekeurig knooppunt in een oneindig cluster bevat is.

Zij $A \subset \mathbb{Z}^d$ een verzameling knopen. Met ∂A noteren we de knopen in A die aan een knoop grenzen die niet in A bevat is. Gegeven twee knopen x, y geven we met $x \leftrightarrow y$ aan dat de twee knopen verbonden zijn door een pad van open bindingen. Derhalve kunnen we noteren $C(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leftrightarrow x\}$.

2.1. Kritieke waarde. In de inleiding is de kritieke waarde p_c al kort behandeld. Deze is als volgt gedefinieerd:

$$p_c = \sup_p \{p : \theta(p) = 0\}.$$

Voor $p = 0$ geldt $\theta(p) = 0$ en voor $p = 1$ geldt $\theta(p) = 1$. Minder eenvoudig, maar wel veel interessanter, is het om aan te tonen dat de kritieke waarde strikt tussen 0 en 1 ligt.

Stelling 1. *Op \mathbb{Z}^2 is het kritieke punt niet triviaal, dat wil zeggen $p_c \in (0, 1)$.*

Bewijs. We merken op dat de percolatiefunctie $p \rightarrow \theta(p)$ niet-dalend is. Derhalve hoeven we slechts te bewijzen dat de functie in een omgeving van $p = 0$ gelijk is aan 0 en in een omgeving van $p = 1$ groter gelijk dan een half is.

(1) Zij $\sigma(n)$ het aantal paden van lengte n beginnend in de oorsprong en $N(n)$ het aantal paden dat open is (gegeven een p en bindingsgewichten). Elk pad heeft een kans p^n om geheel open te zijn. Daarom geldt

$$p^n \sigma(n) = E[N(n)] = \sum_{i=0}^n P(N(n) = i) i \geq \sum_{i=1}^n P(N(n) = i) = P(N(n) \geq 1).$$

Vervolgens merken we op dat voor elke n de ongelijkheid

$$\theta(p) \leq P_p(N(n) \geq 1)$$

geldt, aangezien het bestaan van een oneindig cluster impliceert dat er een open pad van lengte n bestaat. Ten slotte kunnen we $\sigma(n)$ van boven begrenzen. Vanuit de oorsprong kan een pad zich in vier richtingen bewegen. Bij elke volgende stap kan het pad zich in ten hoogste drie richtingen bewegen om niet zichzelf te kruisen. Dus geldt

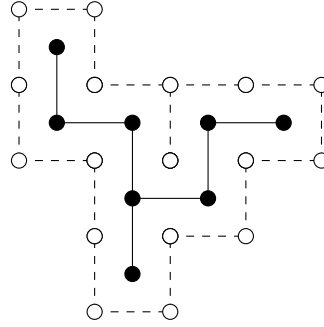
$$\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1} \leq 4^n.$$

De drie ongelijkheden combinerend, zien we dat voor alle n het volgende geldt:

$$\theta(p) \leq E[N(n)] = p^n 4^n = (4p)^n.$$

Neem nu de limiet $n \rightarrow \infty$. Voor alle $p < \frac{1}{4}$ geldt dan dat $\theta(p) = 0$.

- (2) We bewijzen dat $\theta(p) \geq \frac{1}{2}$ voor $p \in (\pi, 1]$ voor een zekere π met $0 < \pi < 1$. We bekijken voor dit bewijs het duale netwerk van \mathbb{Z}^2 . Dit rooster, $\mathbb{Z}_*^2 =$



FIGUUR 3. Een open cluster in \mathbb{Z}^2 omgeven door een gesloten cluster in het duale rooster.

$\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, neemt de bindingen van \mathbb{Z}^2 mee. Deze bindingen zijn open als ze een open binding in het originele netwerk kruisen en anders gesloten.

Zoals we zien in figuur 3, wordt een eindig open cluster omgeven door een gesloten circuit in \mathbb{Z}_*^2 . Zij $\rho(n)$ het aantal circuits van lengte n in \mathbb{Z}_*^2 die de oorsprong omvatten. Merk op dat zulk een circuit de horizontale as moet kruisen. Dit kan op ten hoogste n plekken, want vanuit dit kruispunt moet de oorsprong omsloten worden. Gegeven een kruispunt met de horizontale as zijn er ten hoogste $\sigma(n-1)$ mogelijke circuits. Verwijdert men namelijk uit een circuit de laatste binding, dan blijft er een zichzelf vermijdend pad van lengte $n-1$ over. Derhalve geldt

$$\rho(n) \leq n\sigma(n-1).$$

Zij γ een circuit dat de oorsprong omvat en $q = 1-p$ de kans dat een binding in de duaal gesloten is. Er geldt dat een circuit van lengte n een kans q^n heeft om gesloten te zijn. Zodoende verkrijgen we de volgende ongelijkheid:

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ gesloten}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n n\sigma(n-1) \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n(4q)^n.$$

Derhalve geldt

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ gesloten}) \rightarrow 0 \text{ als } q \rightarrow 0.$$

Er bestaat dus een π met $0 < \pi < 1$ zodat

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ gesloten}) \leq \frac{1}{2} \text{ voor } p > \pi.$$

Omdat de kans op een gesloten circuit kleiner is dan de som van de kansen op een gegeven gesloten circuit, geldt het volgende

$$\begin{aligned} P_p(|C| = \infty) &= 1 - P_p(\exists \text{ gesloten circuit}) \\ &\geq 1 - \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ gesloten}) \\ &\geq \frac{1}{2}, \quad p > \pi. \end{aligned}$$

□

In hogere dimensies geldt dat $p_c(d) \leq p_c(2)$. Als de oorsprong in het twee-dimensionale rooster namelijk in een open cluster bevat is, dan zal het dat in hogere dimensies zeker ook zijn. Het bovenstaande bewijs dat $p_c(2) > 0$ is op analoge wijze uit te breiden naar dimensies hoger dan 2.

2.2. Uniek oneindig cluster. We hebben bewezen dat de percolatiefunctie een niet-triviaal kritiek punt heeft. De oorsprong heeft een bepaalde kans om in een open oneindig cluster te zijn. We kunnen ons afvragen hoeveel andere oneindige clusters er zijn. Voor elke waarde p waarvoor de kans op een open oneindig cluster strikt positief is, bestaat er bijna zeker precies één open oneindig cluster.

Stelling 2. *Als voor p geldt dat $\theta(p) > 0$ dan bestaat er met kans 1 één oneindig open cluster.* [1]

Bewijs. We beginnen dit bewijs met een reeks definities. Zij B een verzameling knopen van \mathbb{Z}^d . Zij

- N het aantal oneindige open clusters;
- $N_B(0)$ het aantal oneindige open clusters wanneer alle $e \in \mathbb{E}_B$ worden gesloten;
- $N_B(1)$ het aantal oneindige open clusters wanneer alle $e \in \mathbb{E}_B$ worden geopend;
- M_B het aantal oneindige open clusters dat een knoop met B gemeen heeft.

De Bernoulli-maat is ergodisch en translatie-invariant. Daarom hebben alle gebeurtenissen die invariant zijn onder translatie kans 0 of 1. De gebeurtenis $\{N = k\}$ is translatie invariant voor alle $k \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$. Voor elke $p \in [0, 1]$ bestaat er dus een $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ zodat

$$P_p(N = k) = 1.$$

Eerst zullen we aantonen dat $2 \leq k < \infty$ niet mogelijk is. Vervolgens zullen we laten zien dat ook $k = \infty$ onmogelijk is.

Zij B een verzameling knopen en k zodanig dat $P(N = k) = 1$. Dan geldt

$$P_p(N_B(0) = N_B(1) = k) = 1.$$

Wanneer $2 \leq k < \infty$, dan geldt de volgende equivalentie:

$$N_B(0) = N_B(1) \iff B \text{ raakt ten hoogste één oneindig cluster.}$$

Combineren we dit met de voorgaande gelijkheid, dan concluderen we

$$P_p(M_B \geq 2) = 0.$$

Merk op dat M_B niet-dalend is in B en dat $M_B \rightarrow N$ als $B \nearrow \mathbb{Z}^d$. Voor B kiezen we de 'ruit' $S(n) := \{x \in \mathbb{Z}^d \mid d(0, x) \leq n\}$. Voor $n \rightarrow \infty$ geldt dan

$$0 = P_p(M_{S(n)} \geq 2) \rightarrow P_p(N \geq 2).$$

Hieruit volgt dat $P_p(N \geq 2) = 0$. Dit is een tegenspraak met de aanname dat $2 \leq k < \infty$.

Nu moeten we nog de mogelijkheid uitsluiten dat er een oneindig aantal oneindige open clusters is. Ook hier zullen we een tegenspraak afleiden.

Definitie 1. We noemen een knoop x een trifurcatie als

- x in een oneindig cluster ligt;
- er precies drie open bindingen aan x grenzen;
- het sluiten van de drie open bindingen het oneindige cluster in precies drie disjuncte oneindige clusters en geen enkel eindig cluster uiteen laat vallen.

Met T_x duiden we de gebeurtenis aan dat de knoop x een trifurcatie is. Omdat de waarde $P_p(T_x)$ niet van x afhangt kunnen we schrijven

$$\frac{1}{|S(n)|} E_p \left[\sum_{x \in S(n)} I_{T_x} \right] = P_p(T_0), \quad (1)$$

waarbij I_{T_x} de indicatorfunctie is van de gebeurtenis T_x en T_0 aanduidt dat de oorsprong een trifurcatie is. We zullen later in het bewijs nodig hebben dat $P_p(T_0) > 0$. Zij $M_B(0)$ het aantal oneindige clusters dat B raakt wanneer alle $e \in \mathbb{E}_B$ worden gesloten. Omdat het sluiten van bindingen alleen tot gevolg kan hebben dat er meer oneindige open clusters bijkomen, geldt $M_B(0) \geq M_B$. Voor B kiezen we weer $S(n)$. Nu gebruiken we de aanname $k = \infty$ om te concluderen dat

$$P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq P_p(M_{S(n)} \geq 3) \rightarrow P_p(N \geq 3) = 1 \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Er bestaat dus een n' zodat

$$P_p(M_{S(n')}(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}$$

en vanaf nu zullen we de ruit $S(n')$ weer met B aanduiden. Merk het volgende op:

- De gebeurtenis $\{M_B(0) \geq 3\}$ is onafhankelijk van het open of dicht zijn van de bindingen van B .
- Als geldt dat $M_B(0) \geq 3$, dan liggen er knopen x, y, z op de rand van B in disjuncte oneindige open clusters.

Op de gebeurtenis $\omega \in \{M_B(0) \geq 3\}$, zij x, y, z knopen op de rand van B die in disjuncte oneindige open clusters zitten. Dan bestaan er paden van x, y en z naar de oorsprong die elkaar niet kruisen (met uitzondering van de oorsprong) en die geen andere knopen op de rand bezoeken. Zij $J_{x,y,z}$ de gebeurtenis dat deze paden open zijn en de andere bindingen gesloten. Dan geldt

$$P_p(J_{x,y,z} \mid M_B(0) \geq 3) \geq \min(p, 1-p)^R > 0,$$

waarbij met R het aantal bindingen in B aangeduidt wordt. Nu kunnen we eindelijk zien waarom $P_p(T_0)$ strict positief is, namelijk

$$\begin{aligned} P_p(T_0) &\geq P_p(J_{x,y,z} \mid M_B(0) \geq 3) P_p(M_B(0) \geq 3) \\ &\geq \min(p, 1-p)^R \cdot \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Definitie 2. Gegeven een verzameling Y , een 3-partitie op Y is een partitie in drie deelverzamelingen $\pi = \{P, Q, R\}$ van Y zodat geen van de deelverzamelingen leeg is.

Definitie 3. Twee 3-partities $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ en $\pi' = \{P'_1, P'_2, P'_3\}$ worden compatibel genoemd als er indices i, j, k zijn zodat geldt

$$P_i \supseteq P'_j \cup P'_k.$$

Een collectie \mathcal{P} van 3-partities wordt compatibel genoemd als elk paar 3-partities compatibel is.

Merk op dat deze relatie niet reflexief is, maar wel symmetrisch.

Lemma 1. *Zij \mathcal{P} een compatibele collectie van 3-partities op een verzameling Y . Dan geldt:*

$$|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2.$$

Bewijs. We bewijzen dit met inductie op $|Y|$. Merk op dat er slechts een enkele 3-partitie mogelijk is op een verzameling met drie elementen.

Stel nu dat voor een $N > 3$ geldt dat voor alle verzamelingen Z met $|Z| < N$ het gevraagde geldt en zij $|Y| = N$. Neem nu een element $z \in Y$ en zij $Z = Y \setminus \{z\}$. Zij \mathcal{P} een collectie 3-partities op Y . Elke 3-partitie in \mathcal{P} kan geschreven worden als $\{P \cup \{z\}, Q, R\}$. Zij \mathcal{P}' de familie van 3-partities $\{P, Q, R\}$ zodat geen van de drie verzamelingen leeg is. Ten slotte definiëren we $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$. Merk op dat de familie \mathcal{P}' een compatibele familie is op de verzameling Z . Met behulp van de inductiehypothese concluderen we

$$|\mathcal{P}'| \leq |Z| - 2 = |Y| - 3.$$

Nu hoeven we slechts te bewijzen dat $|\mathcal{P}''| \leq 1$. Veronderstel daartoe dat \mathcal{P}'' de volgende twee distincte 3-partities van Y bevat

$$\{\{y\}, A_2, A_3\} \text{ en } \{\{y\}, B_2, B_3\}.$$

Zij moeten compatibel zijn, want \mathcal{P} is dit ook. Er geldt echter voor $i, j = 2, 3$ met $i \neq j$

- (1) $A_i \supsetneq B_2 \cup B_3$, want A_j is niet leeg.
- (2) $A_i \supsetneq B_j \cup \{y\}$, want $y \notin A_i$.
- (3) Het singleton $\{y\}$ omvat geen enkele vereniging van twee verzamelingen uit $\{\{y\}, \{B_2\}, \{B_3\}\}$.

Dit geeft een tegenspraak. □

Zij K een open cluster in $S(n)$. Als een trifurcatie $x \in K$ niet op de rand van $S(n)$ ligt, dan leidt het sluiten van de bindingen incident aan x tot een 3-partitie van $K \cap \partial S(n)$. Het punt x correspondeert dus met een trifurcatie $\pi(x) = \{P_1, P_2, P_3\}$ van $K \cap \partial S(n)$ zodanig dat voor $i, i = 1, 2, 3$ met $i \neq j$

- (1) $P_i \neq \emptyset$;
- (2) P_i is bevat in een samenhangend open cluster van $S(n) \setminus \{x\}$;
- (3) P_i en P_j zijn niet door een open pad verbonden in $S(n) \setminus \{x\}$.

Voor verschillende trifurcaties x, x' in de binnenkant $S(n-1)$ van de ruit $S(n)$ geldt bovendien dat de 3-partities $\pi(x)$ en $\pi(x')$ verschillend en compatibel zijn. Voor het aantal trifurcaties $\tau(K)$ op $K \cap S(n-1)$ geldt dus

$$\tau(K) \leq |K \cap \partial S(n)| - 2.$$

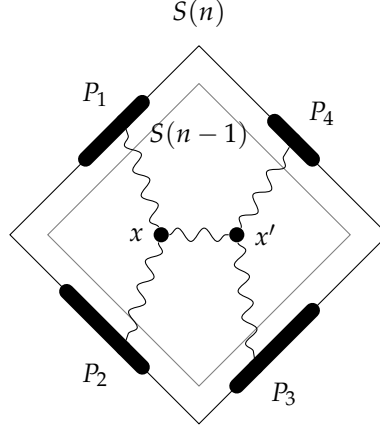
Als we sommeren over alle open clusters K in $S(n)$ krijgen we

$$\sum_{x \in S(n-1)} I_{T_x} \leq |\partial S(n-2)|.$$

Als we aan beide kanten de verwachting nemen en gebruik maken van vergelijking (1) vinden we

$$P_p(T_0) |S(n-1)| \leq |\partial S(n-2)|.$$

De linker- en rechterkant hebben een asymptotische groei voor $n \rightarrow \infty$ van respectievelijk n^d en n^{d-1} . Voor grote n zal deze vergelijking dus niet opgaan. □



FIGUUR 4. Twee trifurcaties x, x' met corresponderende 3-partities $\pi(x) = \{P_1, P_2, P_3 \cup P_4\}$ en $\pi(x') = \{P_1 \cup P_2, P_3, P_4\}$.

2.3. Continuïteit van de percolatiefunctie.

Lemma 2. *De percolatiefunctie $\theta(p)$ is rechtscontinu op het gehele interval $[0, 1]$.*

Bewijs. Zij

$$\theta_n(p) := P_p(0 \leftrightarrow \partial S(n)),$$

oftewel de kans dat er vanaf de oorsprong een open pad naar de rand van de ruit met length n bestaat. Voor elke n is deze functie continu. Bovendien geldt dat als n toeneemt, de waarde van $\theta_n(p)$ afneemt. Omdat $\{0 \leftrightarrow \infty\} = \bigcup_n \{0 \leftrightarrow \partial S(n)\}$ geldt zelfs

$$\theta = \inf_n \theta_n$$

en dus volgt de bewering uit het volgende lemma. \square

Lemma 3. *Zij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een dalend rijtje continue, niet-dalende en reële functies en $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ een monotoon stijgende functie. Dan is f rechts-continu.*

Bewijs. We zullen eerst aantonen dat f half-continu van boven is. Elke f_n is half continu van boven. Er geldt derhalve

$$\limsup_{\pi \rightarrow p} f_n(\pi) \leq f_n(p).$$

Nemen we het infimum van beide kanten van de ongelijkheid dan vinden we

$$\inf_n \left[\limsup_{\pi \rightarrow p} f_n(\pi) \right] \leq f(p). \quad (2)$$

Omdat $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een dalend rijtje functies is, geldt voor alle k dat

$$\limsup_{\pi \rightarrow p} \left[\inf_n f_n(\pi) \right] \leq \limsup_{\pi \rightarrow p} f_k(\pi).$$

We kunnen aan de rechterkant het infimum over k nemen, zodat

$$\limsup_{\pi \rightarrow p} f(\pi) \leq \inf_k \left[\limsup_{\pi \rightarrow p} f_k(\pi) \right].$$

Combineren we dit met vergelijking (2), dan krijgen we

$$\limsup_{\pi \rightarrow p} f(\pi) \leq f(p),$$

oftewel f is halfcontinu van boven.

Omdat f een niet-dalende functie is, geldt

$$\lim_{\pi \downarrow p} f(\pi) \geq f(p).$$

Combineren we dit met de half-continuïteit van boven, dan volgt dat gelijkheid geldt. \square

Lemma 4. *De percolatiefunctie is links-continu op het interval $(p_c, 1]$. [5]*

Bewijs. We nemen $\pi \uparrow p$ voor een $p \in (0, 1]$. Omdat de gebeurtenis $\{|C(\pi)| = \infty\}$ niet-dalend in π is, geldt

$$\lim_{\pi \uparrow p} \theta(\pi) = \lim_{\pi \uparrow p} P(|C(\pi)| = \infty) = P\left(\lim_{\pi \uparrow p} |C(\pi)| = \infty\right) = P(\exists \pi < p : |C(\pi)| = \infty).$$

Omdat $\theta(p) = P(|C(p)| = \infty)$, willen we het volgende bewijzen voor $p > p_c$:

$$P(|C(p)| = \infty) = P(\exists \pi < p : |C(\pi)| = \infty).$$

De volgende kans moet dus gelijk zijn aan nul:

$$P(|C_p| = \infty, \forall \pi < p : |C(\pi)| < \infty) = 0. \quad (3)$$

Zij $p > p_c$ en stel dat $|C(p)| = \infty$. Zij α zodanig dat $p_c < \alpha < p$. Dan bestaat er met kans één een uniek oneindig open cluster I_α bij percolatieparameter α dat niet noodzakelijk de oorsprong omvat. Dit cluster is een deelverzameling van $C(p)$ (anders zouden er meerdere oneindige clusters zijn). Vanuit de oorsprong kunnen we een eindig pad construeren naar de rand van I_α zodat elke binding in dit pad een gewicht heeft kleiner dan p (omdat we dit pad binnen het cluster $C(p)$ kunnen construeren). Laat π het maximum zijn van de bindingsgewichten op dit pad. We hebben dan $\pi < p$. Het cluster $C(\pi)$ bevat I_α en is derhalve oneindig. Derhalve geldt vergelijking (3). \square

3. VERTAKKINGSPROCESSEN

In het midden van de negentiende eeuw bestudeerden Galton en Watson het uitsterven van familienamen met behulp van kansrekening. Het wiskundig model dat zij formuleerden staat nu bekend als het Galton-Watson proces en is een uitstekende basis om percolatie op boomstructuren mee te bestuderen.[3]

We beschouwen opeenvolgende generaties individuen — in het geval van Galton en Watson familieleden — en bekijken hoeveel individuen elke generatie telt. Zij de stochast X_n het aantal individuen in de n -de generatie. Voor het gemak stellen we $X_0 = 1$. We beginnen dus altijd met een enkel individu. Vervolgens bekijken we hoe de familie zich kan voortplanten. Het i -de individu van generatie n heeft Z_i^n kinderen. Deze Z_i^n is een stochast met de volgende eigenschappen:

- Z_i^n is onafhankelijk van wat er gebeurd is in voorgaande generaties;
- Z_i^n is onafhankelijk van wat andere leden van dezelfde generatie aan nageslacht produceren;
- Z_i^n heeft dezelfde kansverdeling als de overige Z_j^n 's.

Omdat alle Z_i^n in dezelfde generatie onafhankelijk en hetzelfde verdeeld zijn noteren we met Z^n de verdeling van de stochasten in de n -de generatie. We hebben nu het volgende model:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1, \\ X_n &= Z_1^{n-1} + Z_2^{n-1} + \dots + Z_{X_{n-1}}^{n-1}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.1.

We beschouwen een binaire boom. Elke binding is met kans p open en met kans $q = 1 - p$ gesloten. Elke knoop heeft twee takken naar knopen die op een grotere afstand van de wortel liggen. Deze knopen beschouwen we als 'kinderen' van de knoop. Alle individuen, in dit geval knopen van de boom, hebben een gelijke kansverdeling voor kinderen:

$$P(Z_i^n = 0) = q^2 \quad \text{De kans dat allebei de bindingen gesloten zijn.}$$

$$P(Z_i^n = 1) = 2pq \quad \text{De kans dat precies een van beide bindingen open is.}$$

$$P(Z_i^n = 2) = p^2 \quad \text{De kans dat beide bindingen open zijn.}$$

Het cluster van de oorsprong (wortel van de boom) is oneindig dan en slechts dan als de familie niet 'uitsterft'. Dit inzicht is de verbinding tussen percolatie en vertakkingsprocessen.

3.1. Verwachte generatiegrootte. We zullen toewerken naar een beschrijving van de uitstervingskans van een vertakkingsproces. Aan de hand hiervan kunnen we eenvoudig de kritieke waarde bepalen voor percolatie op boomachtige structuren. Om dit te bewerkstelligen zullen we eerst een aantal resultaten bewijzen die betrekking hebben op het verwachte aantal elementen van een generatie.

Definitie 4. We noteren met

$$f_{X_n}(s) = E[s^{X_n}] = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = i) s^i$$

de kansgenererende functie van X_n en met $f_n(s) = E[s^{Z^n}]$ de kansgenererende functie van Z^n .

De kansgenererende functie heeft een belangrijke connectie met de verwachting. Voor een stochast X geldt namelijk voor de verwachting:

$$E[X] = f'_X(1) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) i 1^{i-1}.$$

Lemma 5. Zij X_n het aantal elementen in de n -de generatie van een vertakkingsproces zoals hierboven beschreven. Er geldt:

$$f_{X_n}(s) = (f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{n-1})(s) \quad (n \geq 1).$$

Bewijs. Het bewijs volgt via inductie op n . In het geval $n = 1$ geldt:

$$f_{X_1}(s) = f_0(s).$$

Zij N zodanig dat

$$f_{X_N}(s) = (f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{N-1})(s).$$

Voor de volgende generatie geldt:

$$f_{X_{N+1}}(s) = E[s^{X_{N+1}}] = E[E[s^{X_{N+1}} | X_N]].$$

Voor de voorwaardelijke verwachting vinden we

$$\begin{aligned} E[s^{X_{N+1}} | X_N = k] &= E[s^{Z_1^N + Z_2^N + \dots + Z_k^N}] \\ &= E[s^{Z_1^N} s^{Z_2^N} \dots s^{Z_k^N}] \\ &= E[s^{Z_1^N}] E[s^{Z_2^N}] \dots E[s^{Z_k^N}] \quad (Z_i^N \text{ zijn onafhankelijk}) \\ &= f_N(s)^k. \end{aligned}$$

We vullen dit in:

$$\begin{aligned} f_{X_{N+1}}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) f_N(s)^k \\ &= f_{X_N}(f_N(s)) && \text{(inductiehypothese invullen)} \\ &= (f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{N-1} \circ f_N)(s). \end{aligned}$$

De bewering is dus ook waar voor $n = N + 1$. \square

Het volgende lemma is een analoog resultaat voor de verwachting. Het leunt sterk op het voorgaande lemma.

Lemma 6.

$$E[X_n] = \prod_{i=0}^{n-1} E[Z^i] \quad (n \geq 1)$$

Bewijs. Opnieuw gaan we met inductie te werk. Voor het geval $n = 1$ geldt:

$$E[X_1] = E[Z^0].$$

Stel dat de bewering waar is voor $n \leq N$. Dan geldt

$$E[X_N] = \prod_{i=0}^{N-1} E[Z^i].$$

We vinden met behulp van de kettingregel dat

$$E[X_{N+1}] = f'_{X_{N+1}}(1) = (f_{X_N} \circ f_N)'(1) = f'_{X_N}(f_N(1)) \cdot f'_N(1).$$

We weten:

- $f_N(1) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z^N = i) 1^i = 1$. Dit is een gevolg van de wet van de totale kans.
- $f'_{X_N}(1) = E[X_n] = \prod_{i=0}^{N-1} E[Z^i]$. Dit volgt uit de inductiehypothese.
- $f'_N(1) = E[Z^N]$.

Als we dit invullen dan krijgen we het gewenste resultaat voor $n = N + 1$:

$$E[X_{N+1}] = \prod_{i=0}^{N-1} E[Z^i] \cdot E[Z^N] = \prod_{i=0}^N E[Z^i].$$

\square

Gevolg 1. Als de kansverdeling Z op het aantal kinderen voor elke generatie gelijk is met verwachting μ , dan geldt

$$E[X_n] = \mu^n \quad (n \geq 0).$$

3.2. **Uitstervingskans.** Het volgende lemma zullen we veelvuldig gebruiken om de kritieke waarde te bepalen.

Lemma 7. Zij Z de kansverdeling op het aantal kinderen voor elke generatie met verwachting μ . Dan geldt het volgende:

- (1) $\mu < 1 \implies P(X_n > 0 \text{ voor alle } n \geq 0) = 0$.
- (2) $\mu > 1 \implies P(X_n > 0) > 0 \text{ voor alle } n \geq 0$.

Bewijs.

- (1) We merken ten eerste op dat de verwachte grootte van een generatie altijd groter is dan de kans dat die generatie nog leeft:

$$E[X_n] = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = i)i \geq \sum_{i=1}^{\infty} P(X_n = i) = P(X_n > 0).$$

De gebeurtenis $\{X_n > 0\}$ is niet-stijgend in n : als een generatie leeft, dan leven alle voorgaande generaties ook nog. Er geldt dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 0) = P(X_n > 0 \text{ voor alle } n \geq 0).$$

Omdat $\mu < 1$, hebben we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = 0.$$

Echter

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 0) \\ &= P(X_n > 0 \text{ voor alle } n \geq 0). \end{aligned}$$

- (2) We merken op dat er een positieve kans is dat een generatie nog leeft als de verwachte grootte van de generatie positief is. Er geldt namelijk voor elke n dat

$$0 < E[X_n] = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = i)i \implies P(X_n = i) > 0 \quad \text{voor ten minste één } i > 0.$$

Omdat $\mu > 1$ geldt dat $E[X_n] = \mu^n \geq 1 > 0$ voor alle n .

□

Met behulp van de volgende stelling kunnen we de kans op uitsterven berekenen. Merk op dat wanneer de kans op uitsterven bekend is, daarmee de kans op een oneindig cluster ook bekend is, namelijk $\theta(p) = 1 - \text{uitstervingskans}$.

Stelling 3. De kans op uitsterven π is de kleinste niet-negatieve oplossing van de vergelijking

$$x = f_Z(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z = i)x^i.$$

[4]

Bewijs. We zullen eerst aantonen dat $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$ daadwerkelijk een oplossing is van deze vergelijking. Vervolgens zal blijken waarom π de kleinste oplossing van deze vergelijking is. Schrijf

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = 0 \mid X_1 = i)P(X_1 = i) \right] \end{aligned}$$

De volgorde van limiet en som kan omgewisseld worden dankzij de stelling van de gedomineerde convergentie:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_1 = i) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0 \mid X_1 = i) \right]$$

Stel $X_1 = i$. Dan hangen er i onafhankelijke bomen aan de knopen uit generatie i . De kans dat deze allemaal uitsterven is gelijk aan π^i . Derhalve geldt

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_1 = i)\pi^i = f_Z(\pi).$$

We hebben dus bewezen dat π een oplossing is van de vergelijking. Nu zullen we laten zien dat voor elke niet-negatieve oplossing ζ geldt $\zeta \geq \pi$. Daaruit volgt dat π het minimum is van alle niet-negatieve oplossingen.

We zullen aantonen dat voor alle n geldt

$$P(X_n = 0) \leq \zeta.$$

Hieruit volgt dat $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) \leq \zeta$. Het bewijs gaat met behulp van inductie. Voor $n = 0$ geldt

$$P(X_0 = 0) = 0 \leq \zeta, \text{ want } X_0 = 1.$$

Stel nu dat de ongelijkheid geldt voor alle $n \leq N$. Dan

$$\begin{aligned} P(X_{N+1} = 0) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{N+1} = 0 \mid X_1 = i)P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_N = 0)^i P(X_1 = i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^i P(X_1 = i) = f(\zeta) = \zeta \end{aligned}$$

en dus geldt de ongelijkheid ook voor $n = N + 1$. \square

4. PERCOLATIE OP BOMEN

4.1. Binaire boom. We keren terug naar voorbeeld 3.1 om de theorie te demonstreren. Voor percolatie op een binaire boom zullen we de kritieke waarde bepalen en een exacte formule voor $\theta(p)$ opstellen.

De verwachting van het aantal deelbomen verbonden aan een knoop is op twee manieren te bepalen: of als een som van twee Bernoulli stochasten met parameter p , of als de afgeleide van de kansgenererende functie in het punt 1. In beide gevallen krijgen we

$$\mu = 0q^2 + 2pq + 2p^2 = 2p(p + q) = 2p.$$

Als $\mu = 1$ dan hebben we de kritieke percolatiewaarde bereikt, zoals we in Lemma 7 hebben bewezen. Er geldt dus

$$p_c = \frac{1}{2}.$$

Dit is dezelfde kritieke waarde als die van het twee-dimensionale Euclidische rooster, maar dat heeft geen diepere reden. De waarde van $1 - \theta(p)$ is gelijk aan de kleinste oplossing van de vergelijking

$$x = q^2 x^0 + 2pqx + p^2 x^2 \quad (\text{Stelling 3}).$$

We vinden twee oplossingen

$$x = 1, x = \frac{q^2}{p^2} = \frac{(1-p)^2}{p^2} \quad (4)$$

en vullen dit in om te controleren:

$$\begin{aligned} f_Z(1) &= q^2 + 2pq + p^2 = (p + q)^2 = 1 \\ f_Z\left(\frac{q^2}{p^2}\right) &= q^2 + 2\frac{q^3}{p} + \frac{q^4}{p^2} = \frac{q^2}{p^2} (p^2 + 2pq + q^2) = \frac{q^2}{p^2} (p + q)^2 = \frac{q^2}{p^2}. \end{aligned}$$

De oplossing

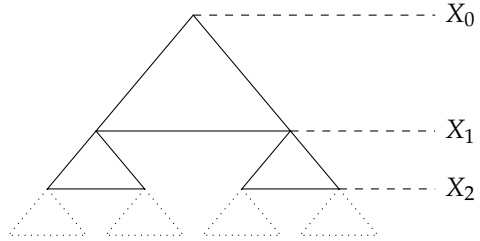
$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & , p \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{(1-p)^2}{p^2} & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

hebben we in figuur 2 in grafiekvorm voorbij zien komen. Dit is een van de weinige structuren waarvoor $\theta(p)$ handmatig is op te lossen. Daarom ook is

dit voorbeeld gekozen. Over de kritieke waarde kunnen we echter wel in meer gevallen uitspraken doen. Zo is in een boom met vertakingsgraad n de kritieke waarde gelijk aan $\frac{1}{n}$. Voor de verwachting van Z^n van een boom met vertakingsgraad n geldt namelijk

$$\mu_n = np.$$

4.2. Binaire driehoeksboom. We onderzoeken de structuur in de figuur hiernaast. Deze bevat in tegenstelling tot de binaire boom wel cycli. Merk op dat er nog wel een hiërarchische indeling van de knopen is. Dit stelt ons in staat om de knopen op te delen in generaties, zoals bij de binaire boom. We kunnen daarom op dezelfde manier de verdeling van Z^n bepalen. We noemen van elke driehoek de bovenste diagonale bindingen de ‘poten’ en de horizontale binding de ‘brug’.



FIGUUR 5. Een binaire driehoeksboom.

- $P(Z^n = 0) = q^2$ Beide poten zijn gesloten.
- $P(Z^n = 1) = 2pq^2$ Precies een poot is open en de brug is gesloten.
- $P(Z^n = 2) = 3p^2q + p^3 = 3p^2$ Elke configuratie van twee of drie open bindingen levert twee kinderen op.

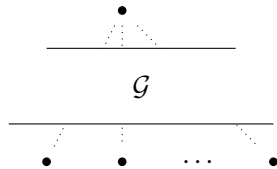
Voor de verwachting geldt

$$\mu = 0q^2 + 2pq^2 + 2 \cdot 3p^2 = 2p(q^2 + 3p) = 2p(1 + p + p^2).$$

Stellen we deze gelijk 1, dan vinden we een kleinere kritieke waarde dan bij de binaire boom:

$$p_c \approx 0.343.$$

Dit is te verwachten. Door de ‘brug’ is er een grotere kans dat een oneindig cluster ontstaat. We zien wel dat p_c net iets groter is dan bij de ternaire boom, waarvoor $p_c = \frac{1}{3}$.



FIGUUR 6. Schema van een mogelijke deelstructuur. Zolang de graaf \mathcal{G} samenhangend is, kan met deze deelstructuur gerekend worden.

Zolang een structuur in generaties op te delen valt zoals in figuur 6, zal er een kansverdeling Z^n bij horen. Hierbij maakt het niet uit hoe exotisch de deelstructuren zijn, zolang de deelstructuur maar een enkele wortel en meerdere kinderen heeft, zoals in figuur 6.

4.3. **Periodieke bomen.** Nu we gezien hebben hoe we de kritieke waarde van andere substructuren kunnen bepalen, zullen we periodieke structuren bekijken. We zullen een boomstructuur bekijken waarbij binaire en ternaire vertakkingen zich afwisselen. Er zijn twee manieren om generaties te onderscheiden. Voor de eerste, X'_0, X'_1, X'_2, \dots , is eenvoudig de verwachting en de kansgenererende functie te bepalen. Voor de tweede, die hiernaast met X_i wordt aangeduid, ontstaat een grotere deelstructuur. Elke knoop kan tussen de nul en zes 'kinderen' krijgen. Het is bewerkelijk om op eenzelfde manier als voor de driehoeksboom de kansverdeling te bepalen. Met Lemma 5 kunnen we ons dat werk echter besparen. Zij $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de kansgenererende functie van de binaire boom en $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die van de ternaire boom. Dan geldt

$$f_{X_1}(s) = f_{X'_2}(s) = (h \circ g)(s).$$

De verwachtingen $\mu_2 = 2p$ en $\mu_3 = 3p$ van de binaire en ternaire boom zijn bekend. Voor X_1 geldt derhalve (Lemma 6)

$$E[X_1] = \mu_2 \mu_3 = 6p^2.$$

Stellen we dit gelijk aan 1, dan vinden we de kritieke waarde

$$p_c = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

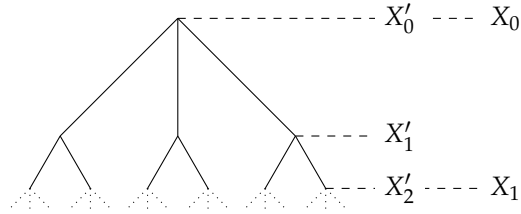
Deze methode is eenvoudig toe te passen op complexere periodieke structuren. Het valt daarbij op dat de volgorde van de deelstructuren binnen een periode geen invloed heeft op de kritieke waarde. Zouden we in het voorbeeld hierboven bijvoorbeeld de volgorde van de binaire en ternaire vertakkingen omdraaien zodat de binaire vertakking aan de wortel staat, dan vinden we nog steeds dat de verwachting gelijk is aan $E[X_1] = 6p^2$. We verwachten echter dat als we beginnen met de ternaire vertakking, er een grotere kans is op een oneindig cluster. We zullen daartoe eerst de kansgenererende functies voor beide gevallen bepalen en vervolgens bekijken welke invloed dit heeft op $\theta(p)$. Namelijk

$$\begin{aligned} f_{2 \rightarrow 3}(x) &= (g \circ h)(x) = (q + pq^3 + 3p^2q^2x + 3p^3qx^2 + p^4x^3)^2, \\ f_{3 \rightarrow 2}(x) &= (h \circ g)(x) = (q + pq^2 + 2p^2qx + p^3x^2)^3, \text{ waarbij} \\ g(x) &= q^2x^0 + 2pqx + p^2x^2, \\ h(x) &= q^3x^0 + 3pq^2x + 3p^2qx^2 + p^3x^3. \end{aligned}$$

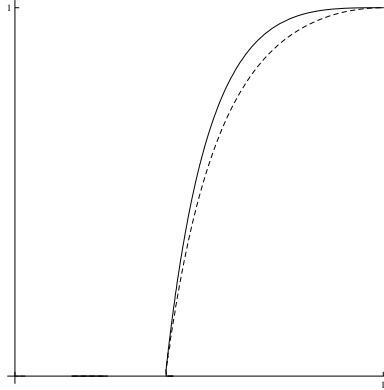
We weten dat $\theta(p)$ gelijk is aan de kleinste positieve oplossing van

$$1 - x = f(1 - x).$$

In figuur 8 zien we een plot van de oplossing. Dit is een numerieke benadering. Zoals verwacht heeft de structuur beginnend met de ternaire vertakking een grotere kans op een oneindig cluster zodra $p > p_c$.



FIGUUR 7. Een periodieke boom. Hier heeft elke generatie afwisselend 2 of 3 poten.



FIGUUR 8. $\theta(p)$ voor $2 \rightarrow 3$ en $3 \rightarrow 2$. De gebroken lijn stelt de boom beginnend met 2 vertakkingen voor en de ongebroken lijn die met 3. Zoals verwacht heeft de structuur beginnend met de drie vertakkingen een grotere kans op een oneindig cluster.

4.4. **Toevallige bomen.** Tot nu toe hebben we slechts deterministische structuren behandeld. Dat wil zeggen, de bindingsgewichten zijn weliswaar stochastisch, maar de bomen zelf hebben een vaststaande structuur. We hebben net de boom bekeken waarin niveau's van binaire en ternaire vertakkingen elkaar afwisselen. Nu zullen we eenzelfde boom bestuderen waarin elk niveau willekeurig binair, danwel ternair is. De volgende stelling stelt ons in staat om hier uitspraken over te doen.

Stelling 4. *Zijn Y_1, Y_2 twee verschillende discrete stochasten. Zij $(w_i)_{\mathbb{N}}$ een rijtje met $w_i \in \{1, 2\}$ zodat*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{i \mid w_i = 1, 1 \leq i \leq n\}| = r \in [0, 1].$$

Zij de stochast Z^i van een vertakkingsproces verdeeld als

$$Z^i \sim Y_{w_i}.$$

Dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]^{1/n} = E[Y_1]^r \cdot E[Y_2]^{(1-r)},$$

waarbij E staat voor de verwachting over zowel het vertakkingsproces als de structuur van de boom.

Bewijs. We hebben

$$E[X_n] = \prod_{i=1}^n E[Z^i] = \exp \left[\sum_{i=1}^n \log E[Z^i] \right]$$

Met behulp van de wet van grote aantallen vinden we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log E[Z^i] = r \log E[Y_1] + (1-r) \log E[Y_2].$$

Invullen levert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]^{1/n} &= \exp [r \log E[Y_1] + (1-r) \log E[Y_2]] \\ &= E[Y_1]^r \cdot E[Y_2]^{(1-r)}. \end{aligned}$$

□

De rol van $\mu = E[Y]$ in het bepalen van de kritieke waarde voor gewone vertakkingsprocessen wordt overgenomen door het convexgemiddelde $E[Y_1]^r E[Y_2]^{1-r}$. Naar analogie van Lemma 7 zullen we dit bewijzen.

Lemma 8. *Zij X_n het aantal objecten in de n -de generatie en zij $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]^{1/n}$. Dan geldt*

- (1) $\mu < 1 \implies P(X_n > 0 \text{ voor alle } n \geq 0) = 0$.
 (2) $\mu > 1 \implies P(X_n > 0) > 0 \text{ voor alle } n \geq 0$.

Bewijs. Alvorens een van beide beweringen te bewijzen, merken we (nogmaals) het volgende op. De gebeurtenis $\{X_n > 0\}$ is niet-stijgend in n : als een generatie leeft, dan leven alle voorgaande generaties ook nog. Er geldt dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 0) = P(X_n > 0 \text{ voor alle } n \geq 0).$$

(1) Voor alle $a, a > 0$, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$. Zij $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$. Dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]^{1/n} < 1.$$

Derhalve geldt

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0.$$

Voor alle n geldt $P(X_n > 0) \leq E[X_n]$. We hebben dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0.$$

(2) Als $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]^{1/n} > 1$ dan is $E[X_n] > 0$ voor alle $n > 0$. Als $E[X_n] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_n = i)i > 0$ dan moet gelden $P(X_n = i) > 0$ voor een $i > 0$. Derhalve geldt voor alle n

$$P(X_n > 0) > 0.$$

□

Voorbeeld 4.1.

Zij Y_1, Y_2 stochasten van respectievelijk de binaire en de ternaire vertakking. Zij $w_i, i = 1, 2, \dots$, een Bernoulli-verdeelde stochast. We verkrijgen de ratio

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{i \mid w_i = 1, 1 \leq i \leq n\}| = \frac{1}{2}.$$

Hiermee hebben we een toevallige boom geconstrueerd waar elk niveau afhankelijk van een muntworp binair of ternair vertakt is. We bepalen het convexgemiddelde

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]^{1/n} = E[Y_1]^{1/2} E[Y_2]^{1/2} = \sqrt{2p \cdot 3p}.$$

Zoals we in Lemma 8 hebben bewezen, is p kritiek als $\mu = 1$ geldt. We kunnen dus eenvoudig oplossen

$$p_c = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Het is niet verwonderlijk dat dit precies dezelfde waarde is als we eerder gevonden hebben voor de periodieke boom. De volgorde van binaire en ternaire vertakkingen is namelijk niet van belang voor de kritieke percolatiewaarde.

We hebben percolatie op bomen bestudeerd. We zijn begonnen met de eenvoudige binaire boom. Hiervan is zowel de kritieke percolatiewaarde als de percolatiefunctie eenvoudig te bepalen. Vervolgens hebben we complexere structuren onderzocht, zoals de binaire driehoeksboom, waarbij vooral het bepalen van de kritieke waarde de aandacht heeft gekregen. Hierbij hebben we opgemerkt dat deze aanpak gebruikt kan worden met elke samenhangende graaf als deelstructuur. Vervolgens hebben we laten zien dat een periodieke structuur

van zulke samenhangende grafen gebruikt kan worden om het bepalen van de kritieke waarde te vereenvoudigen. Hierbij valt op dat de kritieke waarde niet afhangt van de volgorde van de periodieke structuren. Wel verandert de percolatiefunctie. Ten slotte hebben we onderzocht wat er gebeurt als de boom op non-deterministische of stochastische wijze wordt opgebouwd. Zoals verwacht blijkt de kritieke waarde alleen af te hangen van de ratio tussen de verschillende structuren.

REFERENTIES

- [1] Robert M Burton and Michael Keane. Density and uniqueness in percolation. *Communications in mathematical physics*, 121(3):501–505, 1989.
- [2] Geoffrey Grimmett. *What is Percolation?* Springer, 1999.
- [3] Theodore E Harris. *The theory of branching processes*. Courier Dover Publications, 2002.
- [4] C. Kraaijkamp. Markov chains: an introduction. *Lecture Notes*, 2011.
- [5] J Van den Berg and M Keane. On the continuity of the percolation probability function. *Contemp. Math*, 26:61–65, 1984.