Rieszcompleteringen van ruimten van operatoren

Inleiding tot Rieszruimten met enkele nieuwe resultaten
gepresenteerd met vele voorbeelden en uitleg

Leiden, 6 juli 2015

Geschreven door

J.R.F. Deckers
begeleider: dr. O.W. van Gaans

Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

In het afgelopen decennium is er onderzoek gedaan naar het generaliseren van theorie van Rieszruimten naar algemene partieel geordende vectorruimten. Deze scriptie gaat hierop door en heeft als doel om een gegeven manier, die gebruik maakt van Dedekind completeringen van Rieszruimten, te bestuderen en na te gaan of deze manier om Rieszcompleteringen te maken van ruimten van operatoren werkt voor alle ruimten van operatoren. Voor algemene theorie over partieel geordende vectorruimte, zie bijvoorbeeld [3,4].
In deze scriptie gaan we eerst bestuderen wat partieel geordende vectorruimten zijn en wanneer deze ruimten Rieszruimten zijn. Vervolgens bestuderen we Rieszcompleteringen van partieel geordende vectorruimten. Tot slot beschouwen we de verzameling van lineaire, reguliere operatoren van twee Rieszruimten. We gaan in deze laatste sectie voor de hand liggende deelruimten bekijken van de ruimten van operatoren door Rieszruimten te kiezen. Voor deze deelruimten blijkt de manier te werken, echter zijn er voor de laatst gekozen deelruimte veel extra eisen toegepast zodat we een voor de hand liggend bewijs konden vinden. Het vermoeden is dat er een element is, dat niet voldoet aan deze extra eisen en waarvoor deze manier niet werkt.
Graag zou ik Onno van Gaans willen bedanken voor de intensieve en zeer gewaardeerde begeleiding.

1 Partieel geordende vectorruimten

Definitie 1.1. Zij X een verzameling. We noemen $\leqslant$ een *partiële ordening* op X als voor alle $x, y, z \in X$ geldt:
$x \leqslant x$,
$(x \leqslant y \cap y \leqslant x) \Rightarrow x = y$,
$(x \leqslant y \cap y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

Beschouw de volgende partiële ordening.

Voorbeeld 1.2. Beschouw de volgende vectorruimte over $\mathbb{R}$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$. Definiëer daar de volgende ongelijkheid op:
$x \leqslant y \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, x_2 \leqslant y_2, ..., x_n \leqslant y_n$
voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ en $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$.
Zij $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
Er geldt dat $x \leqslant x$, want $x = x$ omdat $x_1 = x_1, x_2 = x_2, ..., x_n = x_n$.
Ook geldt $(x \leqslant y \cap y \leqslant x) \Rightarrow x = y$, want als $x_1 \leqslant y_1$ en $y_1 \leqslant x_1$ dan geldt $x_1 = y_1$ en dit kun je uitschrijven voor alle scalairen in deze vectoren.
En er geldt $(x \leqslant y \cap y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$, want $x_1 \leqslant y_1 \leqslant z_1$ en dus $x_1 \leqslant z_1$ en dit kun je uitschrijven voor alle scalairen in deze vectoren.

Definitie 1.3. Zij X een vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $\leqslant$ een partiële ordening op X. We noemen $(X, \leqslant)$ een *partieel geordende vectorruimte* als voor alle $x, y, z \in X$ en voor alle $\lambda \in [0, \infty)$ geldt:
$x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$,
$x \leqslant y \Rightarrow \lambda x \leqslant \lambda y$.

Beschouw de volgende partieel geordende vectorruimte.

Voorbeeld 1.4. $(\mathbb{R}^n, \leqslant)$ zoals in voorbeeld 1.2 is een partieel geordende vectorruimte.
Zij $x, y, z \in X$ en $\lambda \in [0, \infty)$.
Er geldt dat $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$, want als $x_1 \leqslant y_1$ dan $x_1 + z_1 \leqslant y_1 + z_1$ en dezelfde redenering gaat op voor de andere coördinaten.
Ook geldt $x \leqslant y \Rightarrow \lambda x \leqslant \lambda y$ want als $x_1 \leqslant y_1$ dan $\lambda x_1 \leqslant \lambda y_1$ en dezelfde redenering gaat op voor andere coördinaten.

Het volgende voorbeeld geeft een wellicht onverwachte definitie voor de ordening.

Voorbeeld 1.5. Je kunt ook de volgende definitie als partiële ordening ($x \leqslant y \Leftrightarrow x = y$) nemen op een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Zij $x, y, x \in \mathbb{R}$.
Er geldt $x \leqslant x$ want $x = x$.
Ook geldt, als $x \leqslant y$ en $y \leqslant x$ dan $x = y$ en $y = x$ dus $x = y$.
Eveneens geldt, als $x \leqslant y$ en $y \leqslant z$ dan $x \leqslant z$ want $x = y$ en $y = z$ dus $x = z$.

De vectorruimte wordt hiermee ook een partieel geordende vectorruimte.
Immers, er geldt, als $x \leqslant y$ dan $x+z \leqslant y+z$, omdat als $x = y$ dan $x+z = y+z$.
En er geldt als $\lambda \geqslant 0$ en $x \leqslant y$ dan $\lambda x \leqslant \lambda y$ want als $x = y$ dan $\lambda x = \lambda y$.

Bovenstaande beschrijving van partiële ordeningen is een algebraïsche beschrijving, men zou het ook meetkundig kunnen beschouwen.

Definitie 1.6. Zij K de verzameling van alle positieve elementen (dat wil zeggen alle x met $x \geqslant 0$) in een partieel geordende vectorruimte X. We noemen K de *positieve kegel* van X.

Stel we hebben een positieve kegel in een geordende vectorruimte. Dan voldoet deze aan bepaalde geometrische voorwaarden die in de volgende definitie staan.

Definitie 1.7. Een deelverzameling K van een vectorruimte X over $\mathbb{R}$ heet een *kegel* als voor alle $x, y \in K$ en $\lambda \in [0, \infty)$ geldt:
$x + y \in K$,
$\lambda x \in K$,
$K \cap (-K) = \{0\}$ (met 0 het nulelement van X).

Merk op dat uit de volgende stelling volgt dat de zogenaamde positieve kegel inderdaad een kegel is.

Stelling 1.8. *Zij X een reële vectorruimte. Als $K \subseteq X$ en K een kegel is, dan definieert*
$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K$
een partiële ordening op X en $(X, \leqslant)$ is een partieel geordende vectorruimte.

Bewijs. We bewijzen eerst dat we te maken hebben met een partiële ordening op X.
Er geldt voor alle $x, y, z \in X$ dat $x \leqslant x$ want $x - x = \{0\} \in K$.
Verder geldt $(x \leqslant y \cap y \leqslant x) \Rightarrow x = y$ want $y - x \in K$ en $x - y \in K$ geldt dan en slechts dan als $x = y$ omdat geldt $K \cap (-K) = \{0\}$.
Ook geldt $(x \leqslant y \cap y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$ want $y - x \in K$ en $z - y \in K$ geldt dan en slechts dan als $y \geqslant x$ en $z \geqslant y$ dus $z \geqslant x$ en dus $z - x \in K$.

Nu bewijzen we dat $(X, \leqslant)$ inderdaad een partieel geordende vectorruimte is.
Er geldt voor alle $x, y, z \in X$ en voor alle $\lambda \in [0, \infty)$ dat $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$ want als $y - x \in K$ dan ook $(y + z) - (x + z) = y - x \in K$.
Bovendien geldt $x \leqslant y \Rightarrow \lambda x \leqslant \lambda y$ want als $y - x \in K$ dan $\lambda y - \lambda x = \lambda(y - x) \in K$. Als $x \in X$, dan $x - x \in K$, dus $x \leqslant x$.

□

De volgende stelling en twee definities zijn belangrijk voor latere stellingen over Rieszcompleteringen.

Definitie 1.9. Zij X een reële vectorruimte en $\leqslant$ een partiële ordening. $(X, \leqslant)$ heet *gericht* als

$\forall x, y \in X \exists z \in X : (x \leqslant z) \cap (y \leqslant z)$.

Definitie 1.10. Een kegel K, deelverzameling van de reële vectorruimte X, heet *genererend* als
$\forall x \in X \exists x_1, x_2 \in K : x = x_1 - x_2$.

Stelling 1.11. *Zij X een reële vectorruimte en K een kegel in X. Beschouw de partiële ordening $\leqslant$ op X gegenereerd door K. Er geldt:*
$(X, \leqslant)$ is gericht dan en slechts dan als K genererend is.

Bewijs. Neem aan dat $(X, \leqslant)$ gericht is: voor alle $x, y \in X$ bestaat er een $z \in X$ zodanig dat $(x \leqslant z)$ en $(y \leqslant z)$. Dat betekent per definitie van de kegel dat er voor alle $x \in X$ een $x_1 \in K$ bestaat zodanig dat $x \leqslant x_1$. Neem $x_2 = x_1 - x$. Dan $x_2 \geqslant 0$ zodanig dat $x = x_1 - x_2$.
Neem aan dat K genererend is. Zij $x, y \in X$. Merk op: er bestaan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$ zodanig dat $x = x_1 - x_2$ en $y = y_1 - y_2$. Dan geldt (aangezien K een kegel is) $x_1 = x + x_2 \geqslant x$ en $y_1 = y + y_2 \geqslant y$. Neem nu $z := x_1 + y_1$. Dan geldt $z \geqslant x_1 \geqslant x$ en $z \geqslant y_1 \geqslant y$.

$\square$

We besluiten deze sectie met twee defnties die we later nodig hebben voor de verzameling van operatoren die we gaan bekijken.

Definitie 1.12. Zij $(X, \leqslant)$ en $(Y, \leqslant)$ twee partieel geordende vectorruimten over $\mathbb{R}$ en $T : X \to Y$ lineair. We noemen T *positief* als geldt
$0 \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant T(x)$ en *bipositief* als geldt $x \leqslant y \Leftrightarrow T(x) \leqslant T(y)$.

Definitie 1.13. Zij X een verzameling en $A \subseteq X$ een deelverzameling. A is een *Dedekindsnede* van X als geldt:
A is gelijk aan de verzameling van ondergrenzen van de bovengrenzen van A:
$A = \{x \in X : x \leqslant u$ voor alle $u \in X$ met $u \geqslant a$ voor alle $a \in A\}$.

Voorbeeld 1.14. Constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$. Zie [6].

2 Rieszruimten

Allereerst noemen we twee, wellicht bekende, noodzakelijke definities voor het begrip van Rieszruimten.

Definitie 2.1. Zij A een partieel geordende verzameling en zij $X \subset A$. $a \in A$ is een bovengrens van X als voor alle $x \in X$ geldt $a \geqslant x$. X heet *naar boven begrensd* als zo'n bovengrens a bestaat.

Definitie 2.2. Zij X een naar boven begrensde deelverzameling van een partieel geordende verzameling A. Zij $a \in A$ een bovengrens van X. a heet het (deze is uniek) *supremum* van X als voor alle bovengrenzen $x \in A$ van X geldt $a \leqslant x$.

We kunnen nu de klasse van Rieszruimten definiëren, een deelklasse van de partieel geordende vectorruimten.

Definitie 2.3. Zij $(X, \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte over $\mathbb{R}$. We noemen $(X, \leqslant)$ een *Rieszruimte* als
$\forall x, y \in X \exists z \in X : z = \sup\{x, y\} = x \vee y$.

Merk op dat het belangrijk is dat het supremum zoals genoemd in de voorgaande definitie betrekking heeft op de partiële ordening.

De volgende twee voorbeelden geven respectievelijk een Rieszruimte en geen Rieszruimte.

Voorbeeld 2.4. We nemen $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continu}\}$ als vectorruimte over $\mathbb{R}$. We nemen de volgende partiële ordening. Zij $f, g \in C[0,1]$,
$f \leqslant g \Leftrightarrow f(t) \leqslant g(t) \forall t \in [0,1]$.
Nu is $(C[0,1], \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte. Neem nu het puntsgewijs maximum van f en g, dit geeft weer een continue functie in het interval $[0,1] \in \mathbb{R}$. Deze functie is het supremum van $\{f, g\}$. Op deze manier is $C[0,1]$ een Rieszruimte.

Voorbeeld 2.5. We nemen $C'[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ differentieerbaar}\}$ als vectorruimte over $\mathbb{R}$. We nemen dezelfde partiële ordening als in het voorgaande voorbeeld en daarmee is $(C'[0,1], \leqslant)$ ook een partieel geordende vectorruimte. Echter is $(C'[0,1], \leqslant)$ geen Rieszruimte. Zij $f, g \in C'[0,1]$ met als grafieken twee rechte lijnen, f van $(0,0)$ tot en met $(1,1)$ en g van $(1,0)$ tot en met $(0,1)$. Beschouw het snijpunt $(0.5, 0.5)$. We kunnen de rechte lijnen van f en g volgen om een supremum te maken, nu moet dit supremum ook differentieerbaar zijn in dit snijpunt. Dit is niet waar als je exact dezelfde functie neemt, je moet hem hier dus 'glad' maken, dus de functie iets boven het snijpunt nemen. Nu kun je voor elke functie in $C'[0,1]$ die daar aan voldoet een functie vinden die nog net iets lager is bij dat punt.

Rieszruimten blijken een veel rijkere structuur te hebben dan partieel geordende vectorruimten. Zo bestaan er in Rieszruimten ook het infimum van twee elementen, een positief en negatief deel van een element en de absolute waarde van een element. Dit kan allemaal worden afgeleid met behulp van de supremum-eigenschap. Nu zouden we graag deze rijkere structuur willen gebruiken voor partieel geordende vectorruimten. We gaan naar partieel geordende vectorruimten kijken als deelverzameling van Rieszruimten.

3 Rieszcompleteringen

In deze sectie bespreken we het begrip Rieszcompletering van een partieel geordende vectorruimte.

Definitie 3.1. Zij X een reële vectorruimte en $D \subseteq X$ een deelverzameling. We noemen D een *lineaire deeluimte* van X als geldt:
$\{0\} \in D$,
als $d_1, d_2 \in D$, dan geldt $d_1 + d_2 \in D$,
als $\lambda \in \mathbb{R}$ en $d \in D$, dan geldt $\lambda d \in D$.

Stelling 3.2. *Zij $(X, \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $D \subseteq X$ een lineaire deelruimte. Neem nu dezelfde partiële ordening op D als op X. Dan geldt $(D, \leqslant)$ is een partieel geordende vectorruimte.*

Bewijs. Zij $(X, \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $D \subseteq X$ een lineaire deelruimte. Er geldt $(\leqslant)$ is een partiële ordening op D aangezien de partiële ordening op X voor alle elementen in X moet gelden en daarmee ook voor alle elementen in D. Ditzelfde geldt voor de partieel geordende vectorruimte $(D, \leqslant)$.

□

Het geldt niet voor Rieszruimten dat lineaire deelruimten Rieszruimten zijn.

Voorbeeld 3.3. Zij $(X, \leqslant)$ met $X = C[0, 1]$ en $\leqslant$ zoals in Voorbeeld 2.4. Dit is een Rieszruimte. We nemen nu $D = C'[0, 1]$ en nemen dezelfde partiële ordening $\leqslant$, dan is D een lineaire deelruimte van X want alle elementen van D zitten in X, de nulfunctie zit in D, de som van twee differentieerbare functies is differentieerbaar en een differentieerbare functie vermenigvuldigt met een scalar geeft een differentieerbare functie. Echter hebben we in Voorbeeld 2.5 al laten zien dat $(D, \leqslant)$ geen Rieszuimte is. Stelling 3.2 geldt hier, maar dus niet een vergelijkbaar resultant voor Rieszdeelruimten.

Definitie 3.4. Zij $(X, \leqslant)$ een Rieszruimte en D een lineaire deelruimte van X. We noemen $(D, \leqslant)$ een *Rieszdeelruimte* van $(X, \leqslant)$ als
$\forall x, y \in D : x \vee y \in D$.
Een Rieszdeelruimte is zelf een Rieszruimte.

Voorbeeld 3.5. Zij $(X, \leqslant)$ met $X = C[0, 1]$ de Rieszruimte zoals in Voorbeeld 2.4. Neem nu de lineaire deelruimte $D = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$ van X. $(D, \leqslant)$ is wegens Stelling 3.2 zelf ook een partieel geordende vectorruimte. D is ook een Rieszdeelruimte want elk supremum van twee elementen $f, g \in D$ zit weer in D (tenslotte geldt dat het maximum in het punt 0 ook weer 0 is).

Echter is het gevaarlijk om aan de hand van de definitie voor de Rieszdeelruimte te controleren of een partieel geordende vectorruimte $(D, \leqslant)$ (met D een lineaire deelruimte van X en $(X, \leqslant)$ een Rieszruimte) een Rieszruimte is. Het kan namelijk zo zijn dat een supremum van twee elementen met betrekking tot de partiële ordening in D in X kan zitten maar niet in D omdat D minder elementen kan bevatten dan X. Echter kan D voor dezelfde partiële ordening wel degelijk een Rieszruimte zijn.

Voorbeeld 3.6. Zij X en $\leqslant$ zoals in het voorgaande voorbeeld. Neem nu $D = \text{Aff}[0,1] = \{t \mapsto at + b : a, b \in \mathbb{R}\}$. Neem nu dezelfde twee elementen f en g als in voorbeeld 2.5, deze zijn twee elementen van D. Het supremum voor deze twee elementen die in X zitten, zit niet in D en daarmee is $(D, \leqslant)$ geen Rieszdeelruimte van $(X, \leqslant)$. Echter is D wel een Rieszruimte met een andere partiële ordening. Neem bijvoorbeeld $f \leqslant g \Leftrightarrow (f(0) \leqslant g(0) \cap f(1) \leqslant g(1)) \Leftrightarrow f(t) \leqslant g(t) \forall t \in [0,1]$. Nu geldt $(D, \leqslant)$ is een Rieszruimte, het is namelijk een partieel geordende vectorruimte en je kunt nu het supremum zodanig nemen dat je het maximum van het begin- en eindpunt neemt en daar een rechte lijn tussen definieert.

De volgende definitie is een noodzakelijke voorwaarde voor het zijn van een Rieszcompletering.

Definitie 3.7. Zij $(X, \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte en D een lineaire deelruimte van X. We noemen D *orde dicht* in X als geldt
$\forall x \in X : x = \inf\{d \in D : d \geqslant x\}$.

In bovenstaande definitie is x het infimum en daarmee de grootste ondergrens van $\{d \in D : d \geqslant x\}$.

Merk ook weer hier op dat het van groot belang is dat dit met betrekking tot de partiële ordening van X is.

Voorbeeld 3.8. Zij $(X = C[0,1], \leqslant)$ de partieel geordende vectorruimte van Voorbeeld 2.4 en $D = C'[0,1]$. We nemen $x \in X$ willekeurig. Neem nu een $z \in X$ zodanig dat z een ondergrens is van $\{d \in D : d \geqslant x\}$ dan geldt $z \leqslant x$ en dus is x de grootste ondergrens van $\{d \in D : d \geqslant x\}$. D licht dus orde dicht in X.
Beschouw ook Voorbeeld 2.5 waarbij we geen supremum konden vinden van $f, g \in X$ dat in D zit. Maar we kunnen wel een functie in D die boven f en g ligt de hele tijd nog een stukje lager maken zo dat hij boven f en g blijft en zonder dat hij zijn differentieebaarheid in het punt boven het snijpunt verliest. Als we dus het snijpunt naar boven halen of glad maken dan zitten er een aantal $d \in D$ niet meer in $\{d \in D : d \geqslant x\}$ en daarmee is de nieuwe functie die in X zit niet meer een ondergrens. (Voor de stukken rechte lijnen kan het sowieso niet omdat deze al differentieerbaar zijn.)

Voorbeeld 3.9. Zij $(X = C[0,1], \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte en $D = \text{Aff}[0,1]$ een lineaire deelruimte van X.
Neem de twee functies zoals in het Voorbeeld 2.5 maar dan zo dat je aan beide kanten van het snijpunt de puntsgewijs grotere functie neemt, dit is ook een functie in X. We kunnen nu rechte lijnen gaan maken boven deze functie zodanig dat die in ieder punt van ons domein groter is. Echter niet voor alle $x \in X$ is onze geconstrueerde functie f de grootste ondergrens van $\{d \in D : d \geqslant f\}$

want neem bijvoobeeld een rechte lijn $g = 0.7$, duidelijk is dat geldt $g \in X$ en ook $g \not\leqslant f$. Ook geldt dat g voor de verzameling $\{d \in D : d \geqslant f\}$ een ondergrens is, dus f is niet de grootste ondergrens.

Voorbeeld 3.10. Beschouw de verzameling van alle continue functies over $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$ met $f \leqslant g$ gedefinieerd door $f(t) \leqslant g(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. $(C(\mathbb{R}), \leqslant)$. We nemen als eerste deelverzameling van $C(\mathbb{R})$ $X = P_2(\mathbb{R})$, dit is de verzameling van alle polynomen van graad ten hoogste 2 over $\mathbb{R}$. We zien dat $(X, \leqslant)$ een partieel geordende vectorruimte is en dat X gericht is (voor elke twee elementen in X bestaat er een bovengrens, met betrekking tot $\leqslant$, die ook een element van X is). Beschouw nu de volgende deelverzameling van $C(\mathbb{R})$, $V = \{v \in C(\mathbb{R}) : \text{er is een } p \in X \text{ zodanig dat } \mid v(t) \mid \leqslant p(t) \text{ (voor alle } t \in \mathbb{R})\}$. We kunnen nu een $v \in V$ en $p \in X$ nemen zo dat $\mid v(t) \mid < p(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Neem nu een vast punt $t_0 \in \mathbb{R}$ en $\epsilon > 0$ zo dat $v(t_0) + \epsilon < p(t_0)$. We zoeken nu een polynoom p_ϵ zodanig dat $\mid p_\epsilon(t_0) - v(t_0) \mid \leqslant \epsilon$ en $p_\epsilon(t) \geqslant v(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dan kunnen we dit generaliseren en concluderen dat X orde dicht ligt in V. We weten dat v continu is en dat betekent dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ geldt $v(t) \leqslant v(t_0) + \epsilon$. Maak nu een polynoom p_ϵ zodanig dat geldt $p_\epsilon(t_0) = v(t_0) + \epsilon$ en $p_\epsilon(t_0 - \delta) = p_\epsilon(t_0 + \delta) = \max\{p(t_0 - \delta), p(t_0 + \delta)\}$. Nu geldt: $p_\epsilon(t) \leqslant v(t)$ voor alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, het polynoom ligt nu vast door de toekenning van drie punten. Verder geldt dat p_ϵ sneller stijgt dan p en daarmee geldt $p_\epsilon(t) \geqslant p(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R} \setminus (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Zie ook [2, Example 4.4].

Stelling 3.11. *Zij $(X, \leqslant)$ een Rieszruimte over $\mathbb{R}$ en D een orde dichte deelruimte van X zodat $(D, \leqslant)$ een Rieszruimte is. Dan is $(D, \leqslant)$ een Rieszdeelruimte van $(X, \leqslant)$. (Dat wil zeggen als twee elementen in D zitten dan bevat D ook het supremum voor die twee elementen, met betrekking tot de ordening in X.) Er geldt dan ook: zij x en y twee elementen van D dan is het supremum van die twee elementen niet alleen het supremum voor D van die twee elementen, maar datzelfde supremum is ook het supremum voor X van die twee elementen.*

We willen graag partieel geordende vectorruimten over $\mathbb{R}$ beschouwen als orde dichte deelruimte (als dit kan) van een (grotere) Rieszruimte. Maar voor welke partieel geordende vectorruimtes over $\mathbb{R}$ kan dit? Dit antwoord is gegeven door M. van Haandel [1] en geldt voor partieel geordende vectorruimten die ook pre-Riesz zijn.

Definitie 3.12. Een partieel geordende vectorruimte X over $\mathbb{R}$ noemen we *pre-Riesz* als
$\forall x, y, z \in X : \{x + y, x + z\}^u \subseteq \{y, z\}^u \Rightarrow x \geqslant 0$.
(Hier is $A^u = \{u \in X : \forall a \in A : u \geqslant a\}$ de verzameling van bovengrenzen van A.)

Dit is een enigszins technische voorwaarde, maar hij geldt wel voor veel voor de hand liggende partieel geordende vectorruimten. Een verzameling van bovengrenzen van twee elementen zal meestal (en onder de meest voor de hand liggende ordeningen) een grotere verzameling zijn dan de verzameling van bovengrenzen van twee kleinere elementen. Bijvoorbeeld met functies uit $C[0, 1]$

(of gewoon $\mathbb{R}^2$) met als partiële ordening $x \leqslant y \Leftrightarrow x = y$, dan is de verzameling van bovengrenzen van twee elementen leeg, maar zij zijn dan wel deelverzamelingen van elkaar, ze zijn namelijk hetzelfde. Neem nu zoals in de definitie van pre-Rieszruimte drie elementen $y, z, x \in X$ met $x \ngeqslant 0$ (met onze ordening dus $x \neq 0$). Nu geldt dat $x, y, z \in X$ zodanig dat $\{x+y, x+z\}^u \subseteq \{y, z\}^u$ maar we hadden $x \ngeqslant 0$, dus X is inderdaad geen pre-Rieszruimte.

Definitie 3.13. Zij X een partieel geordende vectorruimte. We noemen X *Archimedisch* als
$\forall x, y \in X : \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}\ nx \leqslant y \Rightarrow x \leqslant 0.$

Voorbeeld 3.14. Neem $X = C[0,1]$ als partieel geordende vectorruimte, met als partiële ordening $x \leqslant y \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t)$ voor alle $t \in [0,1]$. Uit de Archimedische eigenschap van $\mathbb{R}$ volgt dat X Archimedisch is.

Stelling 3.15. *Iedere gerichte, Archimedische partieel geordende vectorruimte is pre-Riesz.*

Stelling 3.15 wordt later met behulp van Lemma 3.20 bewezen.

Stelling 3.16. *Iedere pre-Riesz ruimte is gericht.*

Bewijs. Stel we hebben een partieel geordende vectorruimte X over $\mathbb{R}$ die pre-Riesz is. Stel nu dat X niet gericht is. Dan bestaan er $z, y \in X$ zodanig dat er geen element $x \in X$ bestaat met $(z \leqslant x) \cap (y \leqslant x)$. Neem deze elementen $z, y \in X$ dan geldt $\{z, y\}^u = \emptyset$, maar ook geldt voor alle $x \in X$, $\{x+y, x+z\}^u = \emptyset$. Enkel als X alleen bestaat uit het nulelement geldt dan dat $x \geqslant 0$, namelijk $x = 0$ en voor andere X geldt dat er ook $x \in X$ zijn met $x \ngeqslant 0$.

□

Stelling 3.17. *Een deelruimte van een Archimedische partieel geordende vectorruimte is zelf ook Archimedisch.*

Bewijs. Zij X een Archimedische partieel geordende vectorruimte over $\mathbb{R}$ en Y een deelruimte van X. Als voor alle $x, y \in X$ geldt $nx \leqslant y$ voor alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ impliceert dat $x \leqslant 0$, dan geldt dit ook voor alle $x, y \in Y$.

□

Voorbeeld 3.18. Beschouw Voorbeeld 3.14 met de als eerste genoemde ordening. Een deelruimte van $C[0,1]$ is ook Archimedisch.

Stelling 3.19 volgt uit [1, Theorems 3.5, 3.7, 4.9, 4.10, 4.11 en 4.10 en Remark 3.2].

Stelling 3.19. *Zij X pre-Riesz. Dan bestaat er een Rieszruimte Y zodanig dat*
(1) X een orde dichte deelruimte is van Y,
(2) er geen strikte Rieszdeelruimte van Y is die X bevat.
Bovendien zijn al zulke Y isomorf als Rieszruimte.

We bewijzen het onderstaande Lemma 3.20 en daarmee is Stelling 3.15 bewezen.

Lemma 3.20. *De volgende uitspraken zijn equivalent met elkaar:*
(i) G is Archimedisch.
(ii) Voor alle $x \in G$ en alle aftelbare niet-lege deelverzamelingen A van G die van boven begrensd zijn geldt: als $(x+A)^u \subset A^u$, dan $x \geqslant 0$.
(iii) Voor alle $x \in G$ en alle niet-lege deelverzamelingen A van G die van boven begrensd zijn geldt: als $(x+A)^u \subset A^u$, dan $x \geqslant 0$.

Bewijs. Als (iii) geldt, geldt automatisch (ii) aangezien (ii) een extra eis heeft in verband met A en (iii) niet.
Neem aan dat (i) geldt. Neem $x \in G$ en $A \in \mathcal{P} \setminus \emptyset$ zodanig dat $A^u \neq \emptyset$ en $(x+A)^u \subset A^u$. Er geldt nu $(2x+A)^u = x + (x+A)^u \subset x + A^u \subset A^u$, dit werken we uit: neem $u \in (2x+A)^u$ dan geldt $u \geqslant (2x+a)$ voor alle $a \in A$ dan $u-x \geqslant x+a$ dus $u-x \in (x+A)^u$ dus $u-x \in A^u$ dus $u-x \geqslant a$ voor alle $a \in A$ dus $u \geqslant x+a$ dus $u \in (x+A)^u \geqslant A^u$. We kunnen analoog laten zien dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $(nx+A)^u \geqslant A^u$ dan geldt ook $A^u \geqslant -nx + A^u$. Neem nu aan $(nx+A)^u \geqslant A^u$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, neem nu $a \in A$ en $u \in A^u$, dan geldt voor alle $y \in A$, $u \geqslant y$, dus $u + nx \geqslant y + nx$ dus $u + nx \in (nx+A)^u$ dus $u + nx \in A^u$ dus $u + nx \geqslant a$ dus $-nx \leqslant u - a$ dus $n(-x) \leqslant u - a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dus $x \leqslant 0$.
Neem aan dat (ii) geldt. Neem $f, g \in G$ zodanig dat $\forall n \in \mathbb{N}$ waarvoor geldt $nf \leqslant g$. Definieer nu $A = \{nf : n \in \mathbb{N}\}$. Dan geldt A is een aftelbare deelverzameling van G, en $A^u \neq \emptyset$ omdat geldt $g \in A^u$ (zo hebben we n gekozen en daarmee A gedefinieerd). Omdat geldt $A \subset -f + A$ (aangezien $\mathbb{N}$ niet naar boven is begrensd maar we naar beneden), krijgen we $(-f+A)^u \subset A^u$, dus geldt $f \leqslant 0$ (want (ii) geldt). Dus geldt dat G Archimedisch is.

□

4 Ruimten van operatoren

Definitie 4.1. Zij E en F twee Rieszruimten. We definiëren de volgende ruimte van lineaire, reguliere operatoren:
$L^r(E,F) = \{T : E \to F : T \text{ lineair en } \exists T_1, T_2 \text{ positief zo dat } T = T_1 - T_2\}$

We nemen de volgende ordening.
Zij $T, S \in L^r(E,F)$,
$T \leqslant S \Leftrightarrow \forall x \in E, x \geqslant 0 : (S-T)x \geqslant 0.$

Merk op dat we hier te maken hebben met drie ordeningen die kunnen verschillen.
Er geldt $T \leqslant S$ gebruikt de ordening op $L^r(E,F)$.
Ook geldt $x \geqslant 0$ gebruikt de ordening op E.
En er geldt $(S-T)x \geqslant 0$ gebruikt de ordening op F.

Van de laatste twee weten we dat deze partiële ordeningen zijn. We gaan na of de eerste ook een partiële ordening is.
Reflexief: inderdaad $T \leqslant T$ want $(T-T)x = 0$ voor alle $x \in E, x \geqslant 0$.
Transitief: neem aan $S \leqslant T$ en $T \leqslant U$ dan geldt $(U-S)x \geqslant 0$ en dus $S \leqslant U$.
Anti symmetrisch: dit kan misgaan, neem de volgende ordening op E $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x = 0$, onder die voorwaarde geldt dan $T \geqslant 0$ voor alle $T \in L^r(E,F)$ dus $T \geqslant 0$ en $-T \geqslant 0$.

We moeten hier het volgende eisen voor E:
$\forall x \in E \; \exists \; x_1, x_2 \in E, x_1, x_2 \geqslant 0 : x = x_1 - x_2.$

Stelling 4.2. *$(L^r(E,F), \leqslant)$ is een partieel geordende vectorruimte als* $\forall x \in E \exists x_1, x_2 \in E, x_1, x_2 \geqslant 0 : x = x_1 - x_2$.

Definitie 4.3. Zij F een Rieszruimte. We noemen F^δ de *Dedekind completering* van F.

Onderstaande propositie volgt uit [3, section 31].

Propositie 4.4. *Zij F een Archimedische Rieszruimte. De Dedekind completering van F is een Dedeking volledige Rieszruimte en F ligt orde dicht in F^δ.*

Dus er geldt F ligt orde dicht in F^δ.
Ook geldt F^δ is Dedekind volledig.
En er geldt $L^r(E,F) \subseteq L^r(E,F^\delta)$ als lineaire deelruimte.

We willen nu weten of $L^r(E,F)$ orde dicht ligt in $L^r(E,F^\delta)$?
Zo ja dan weten we dat de Rieszcompletering van $L^r(E,F)$ een deelruimte is van $L^r(E,F^\delta)$ voortgebracht door $L^r(E,F)$. In de onderstaande proposities schrijven we $X \cong Y$ als X en Y isomorf zijn als partieel geordende vectorruimten.

Propositie 4.5. $L^r(\mathbb{R}^n, F) \cong F^n$ *(en $L^r(\mathbb{R}^n, F^\delta) \cong (F^n)^\delta$).*

Bewijs. Definieer de volgende afbeelding:
$j : F^n \to L^r(\mathbb{R}^n, F)$ zo dat $j(x) := (t \mapsto t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n)$.
We gaan na of j lineair is (zij $\alpha \in \mathbb{R}$).

Er geldt $j(x^1 + x^2) = (t_1, t_2, ..., t_n) \begin{pmatrix} x_1^1 + x_1^2 \\ x_2^1 + x_2^2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n^1 + x_n^2 \end{pmatrix} = t_1(x_1^1 + x_1^2) + t_2(x_2^1 + x_2^2) + ... + t_n(x_n^1 + x_n^2) = t_1x_1^1 + t_2x_2^1 + ... + t_nx_n^1 + t_1x_1^2 + t_2x_2^2 + ... + t_nx_n^2 = (t_1, t_2, ..., t_n) \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n^1 \end{pmatrix} + (t_1, t_2, ..., t_n) \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n^2 \end{pmatrix} = j(x^1) + j(x^2)$.

Ook geldt $j(\alpha x) = (t_1, t_2, ..., t_n) \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} = t_1\alpha x_1 + t_2\alpha x_2 + ... + t_n\alpha x_n = \alpha(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) = \alpha tx = \alpha j(x)$.
We gaan na of j bipositief is.
Zij $x \in F^n, x \geqslant 0$ (dat wilt zeggen $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, ..., x_n \geqslant 0$) dan geldt voor alle $t \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat $t \geqslant 0$, dat $tx \geqslant 0$.
Zij $(t \mapsto tx) \in L^r(\mathbb{R}^n, F)$ een postieve operator. Dan geldt per definitie voor alle $t \geqslant 0$, dan $tx \geqslant 0$ en dan geldt $x \geqslant 0$.
We gaan na of j een bijectie is.
Zij $x \neq y$ $(x, y \in F^n, \exists i \in \{1, ..., n\} : x_i = y_i)$. Kies nu $t_i = 1$ en $t_j = 0$ voor $j \neq i$, dan geldt $j(x) = t_1x_1 + ... + t_nx_n \neq t_1y_1 + ...t_ny_n$ aangezien $t_ix_i = x_i \neq y_i = t_iy_i$ en de rest is 0.

Zij $T \in L^r(\mathbb{R}^n, F)$, $T = (t \mapsto tx)$. Neem nu $x^1 = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ..., x^n = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$.

Er geldt nu voor $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ . \\ . \\ t_n \end{pmatrix}$ dat $j(x)(t) = t_1x^1 + ... + t_nx^n = t_1T \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ .0 \end{pmatrix} + ... + t_nT \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ . \\ . \\ t_n \end{pmatrix}$.

□

Definitie 4.6. $c_{00} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists N : \forall n \geqslant N : x_N = 0\}$.

Het is eenvoudig na te gaan dat c_{00} een Rieszruimte is voor de volgende ordening $x \leqslant y \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, x_2 \leqslant y_2, ...$ met $x, y \in c_{00}$ en x_1, x_2 respectievelijk het eerste en tweede getal in de rij x.
We nemen nu $E = c_{00}$ en $F' = \{x : \mathbb{N} \to F\}$.

Propositie 4.7. *$L^r(c_{00}, F) \cong F'$ (en $L^r(c_{00}, F^\delta) \cong F'^\delta$).*

Bewijs. Definieer de volgende afbeelding:
$j : F' \to L^r(c_{00}, F)$ zo dat $j(x) := (t \mapsto t_1x_1 + t_2x_2 + ...)$.
We gaan na of j lineair is. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x^1, x^2 \in F'$.
Er geldt $j(x^1 + x^2) = t_1(x_1^1 + x_1^2) + t_2(x_2^1 + x_2^2) + ... = t_1x_1^1 + t_2x_2^1 + ... + t_1x_1^2 + t_2x_2^2 + ... = j(x^1) + j(x^2)$.
Ook geldt $j(\alpha x) = t_1\alpha x_1 + t_2\alpha x_2 + ... = \alpha t_1x_1 + \alpha t_2x_2 + ... = \alpha(t_1x_1 + t_2x_2 + ...) = \alpha j(x)$.
We gaan na of j bipositief is.
Zij $x \in F', x \geqslant 0$ (dat wil zeggen $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, ...$). Dan geldt voor alle $t \in c_{00}$ met $t \geqslant 0$ dat $tx \geqslant 0$.
Zij $(t \mapsto tx) \in L^r(c_{00}, F)$ een positieve operator. Dan geldt per definitie voor alle $t \geqslant 0$ dat $tx \geqslant 0$ dat kan alleen als $x \geqslant 0$.
We gaan na of j een bijectie is.
Zij $x \neq y$ ($x, y \in F'$ met er bestaat een $i \in \{1, ..., n\}$ zodanig dat $x_i \neq y_i$). Kies $t_i = 1$ en $t_j = 0$ voor $j \neq i$, dan geldt $j(x) = t_1x_1 + t_2x_2 + ... \neq t_1y_1 + t_2y_2 + ...$ aangezien $t_ix_i = x_i \neq y_i = t_iy_i$ en de rest is 0.
Zij $T \in L^r(c_{00}, F), T = (t \mapsto tx)$. Neem nu $x^1 = T(1, 0, 0, ...), x^2 = T(0, 1, 0, ...), ...$.
Er geldt nu voor $t = t_1, t_2, ... \in c_{00}$ dat $j(x)(t) = t_1x^1 + ... = t_1T(1, 0, ...) + ... = T(t_1, ...)$. □

We weten nu dat zowel $L^r(c_{00}, F)$ als $L^r(\mathbb{R}^n, F)$ Rieszruimten zijn en daarmee is de vraag voor de Rieszcompletering van deze twee verzamelingen beantwoord, namelijk de verzamelingen zelf. We weten ook dat $L^r(c_{00}, F)$ als $L^r(\mathbb{R}^n, F)$ orde dicht liggen in $L^r(c_{00}, F^\delta)$ als $L^r(\mathbb{R}^n, F^\delta)$.

We bekijken nu de Rieszruimte van uiteindelijke constante rijtjes.
$E = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N}$ en $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \geqslant N : x_N = c\}$.
We gebruiken dezelfde ordeningstructuur als bij c_{00}.

Propositie 4.8. *E^δ van E is de Rieszruimte van begrensde rijtjes: $E^\delta = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant c\}$.*

Bewijs. De ruimte van begrensde rijtjes is Dedekind volledig, dus het is voldoende te bewijzen dat E orde dicht ligt in deze ruimte. Neem $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zodanig dat $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : y_n \leqslant c$. Neem nu voor iedere $m \in \mathbb{N}$ x^m zodanig dat $x^m(k) = c$ als $k \neq m$ en $x^m(k) = y(k)$ als $k = m$. Er geldt nu voor alle m, $x^m \in E$ en $x^m \geqslant y$. Dus we hebben nu dat geldt $y \leqslant \inf\{x \in E : x \geqslant y\} \leqslant \inf\{x^m : m \in \mathbb{N}\} = y$. Dus E ligt orde dicht in de ruimte van begrensde rijtjes.

□

Merk op dat bovenstaand bewijs redelijk analoog gaat aan het Voorbeeld 3.10.

De verzameling van operatoren $L^r(E,E)$ is een partieel geordende vectorruimte en geen Rieszruimte, zie [7, 257-274]. We kunnen nu dan ook geen ismorfisme bedenken zoals we hiervoor hebben gedaan. We gaan nu deelverzamelingen van $L^r(E,E)$ beschouwen.

We bekijken eerst de operatoren van $L^r(E,E)$ die te schrijven zijn als $T(x) = \phi(x)y$ met een vaste $y \in E$ en met $\phi : E \to \mathbb{R}$ één vaste positieve en lineaire potentiaal, noem deze verzameling X. Zo doen we dit ook met $L^r(E,E^\delta)$ beschouw de operatoren die te schrijven zijn als $F(x) = \phi(x)z$ met een vaste $z \in E^\delta$, noem deze verzameling Y.
Merk op dat X en Y nu geen vectorruimten zijn. Echter kunnen verzamelingen in het algemeen ook orde dicht in elkaar liggen en daardoor is onderstaande propositie wel zinvol.

Propositie 4.9. *Voor bovenstaande verzamelingen geldt dat X ligt orde dicht ligt in Y.*

Bewijs. Merk op dat het voldoende is om aan te tonen dat de volgende equivalentie geldt: $\forall x \in E, x \geqslant 0, T_y(x) \geqslant F_z(x) \Leftrightarrow y \geqslant z$ aangezien E orde dicht ligt in E^δ.
$\Rightarrow$ Neem aan dat geldt $\forall x \in E, x \geqslant 0, T_y \geqslant T_z$. Er geldt $\phi(x)y \geqslant \phi(x)z$ en aangezien $\phi(x) \geqslant 0$ geldt krijgen we $y \geqslant z$.
$\Leftarrow$ Neem aan dat geldt $y \geqslant z$. Er geldt dan voor alle $x \in E$ met $x \geqslant 0$ dat $\phi(x)y \geqslant \phi(x)z$ en dus $T_y(x) \geqslant F_z(x)$. □

Nu gaan we X en Y generaliseren naar eindige rang n. We nemen de operatoren uit $L^r(E,E)$ die te schrijven zijn als $T_{y_1,y_2,\ldots,y_n}(x) = \phi_1(x)y_1 + \phi_2(x)y_2 + \ldots + \phi_n(x)y_n$ met $y_1, y_2, \ldots, y_n \in E$ en vaste positieve functionale $\phi_1, \ldots, \phi_n : E \to \mathbb{R}$, noem deze verzameling X' en de operatoren uit $L^r(E,E^\delta)$ die te schrijven zijn als $F_{z_1,z_2,\ldots,z_n}(x) = \phi_1(x)z_1 + \phi_2(x)z_2 + \ldots + \phi_n(x)z_n$ met $z_1, z_2, \ldots, z_n \in E^\delta$, noem deze verzameling Y'. Voor beide verzamelingen stellen we de extra eis dat voor alle $x \in E$, met $x \geqslant 0$, er $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ bestaan, met $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, zodanig dat $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ en $\phi_1(x_2) = 0, \ldots, \phi_1(x_n) = 0, \phi_2(x_1) = 0, \phi_2(x_3) = 0, \ldots, \phi_2(x_n) = 0, \ldots, \phi_n(x_1) = 0, \ldots, \phi_n(x_{n-1}) = 0$.
Merk hierbij hetzelfde op als voor X en Y, namelijk X' en Y' zijn geen vectorruimten.

Propositie 4.10. *Voor bovenstaande verzamelingen geldt dat X' ligt orde dicht ligt in Y'.*

Bewijs. We willen de volgende claim bewijzen:
$F_{z_1,z_2,\ldots,z_n} = \inf\{T_{y_1,y_2,\ldots,y_n} : y_1 \geqslant z_1, y_2 \geqslant z_2, \ldots, y_n \geqslant z_n\}$.
Dan is het voldoende om te bewijzen dat als $F \leqslant T_{y_1,y_2,\ldots,y_n}$ voor alle $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ met $y_1 \geqslant z_1, y_2 \geqslant z_2, \ldots, y_n \geqslant z_n$ geldt, dan geldt $F \leqslant F_{z_1,z_2,\ldots,z_n}$ (met $F \in L^r(E,E^\delta)$).
We nemen nu een willekeurige $x \in X$, met $x \geqslant 0$, en kiezen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,

met $x_1, x_2, ..., x_n \geqslant 0$, zodanig dat geldt $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ en $\phi_1(x_2) = 0, ..., \phi_1(x_n) = 0, \phi_2(x_1) = 0, \phi_2(x_3) = 0, ..., \phi_2(x_n) = 0, ..., \phi_n(x_1) = 0, ..., \phi_n(x_{n-1}) = 0$. Dan geldt $F_{z_1,z_2,...,z_n}(x) = \phi_1(x)z_1 + \phi_2(x)z_2 + ... + \phi_n(x)z_n = \phi_1(x_1)z_1 + \phi_2(x_2)z_2 + ... + \phi_n(x_n)z_n$ en $F(x) = F(x_1) + F(x_2) + ... + F(x_n)$. Zij $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$ met $y_1 \geqslant z_1, y_2 \geqslant z_2, ..., y_n \geqslant z_n$. Dus aangezien $\phi_1(x_1)y_1 = T_{y_1,y_2,...,y_n}(x_1) \geqslant F(x_1), \phi_2(x_2)_2y_2 \geqslant F(x_2), ..., \phi_n(x_n)y_n \geqslant F(x_n)$ geldt, krijgen we $\phi_1(x_1)z_1 \geqslant F(x_1), \phi_2(x_2)z_2 \geqslant F(x_2), ..., \phi_n(x_n)z_n \geqslant F(x_n)$. Dus $F_{z_1,z_2,...,z_n}(x) = \phi_1(x)z_1 + \phi_2(x)z_2 + ... + \phi_n(x)z_n = \phi_1(x_1)z_1 + \phi_2(x_2)z_2 + ... + \phi_n(x_n)z_n \geqslant F(x) = F(x_1) + F(x_2) + ... + F(x_n) = F(x)$.

□

Voorbeeld 4.11. Als $E = c_{00}$ en $\phi_1, ..., \phi_n : E \to \mathbb{R}$ zijn zo dat $\phi_i(x_1, x_2, ...) = x_i$ voor iedere $(x_1, x_2, ...) \in E$, dan bestaan er voor iedere $x = (x_1, x_2, ...) \in E$, $x \geqslant 0$ elementen $x^1, ..., x^n \in E$ met $x^1 \geqslant 0, ..., x^n \geqslant 0$, $x = x^1 + ... + x^n$ en $\phi_i(x^1) = 0$ voor $i \neq j$, namelijk $x^1 = (x_1, 0, 0, ...), x^2 = (0, x_2, 0, ...), ..., x^n = (0, ..., 0, x_n, x_{n+1}, ...)$.

Opmerking 4.12. Zonder deze extra eis op het bestaan van een geschikte decompositie voor iedere positieve $x \in E$ is het niet duidelijk of X' orde dicht ligt in Y'. Wellicht is er een element in X' dat niet voldoet aan deze eis en een tegenvoorbeeld geeft.

Conclusie

Deze scriptie heeft een manier voor het maken van Rieszcompleteringen van ruimten van operatoren onderzocht. De manier bekijkt Rieszruimten E en F en is gebaseerd op de vraag of de ruimte van operatoren $L^r(E, F)$ orde dicht ligt in $L^r(E, F^\delta)$. Door verschillende verzamelingen voor E en F te kiezen, hebben we gezien dat deze manier niet alleen voor eindig dimensionale Rieszruimten werkt, maar ook voor oneindig dimensionale. Echter hebben we ook gezien dat als we de uiteindelijke constante rijtjes voor E en F nemen, we steeds specifiekere deelverzamelingen van $L^r(E, F)$ zijn gaan bekijken. Dit hebben we gedaan zodat we op een voor de hand liggende manier konden bewijzen dat, deze deelverzamelingen van $L^r(E, F)$ inderdaad orde dicht liggen in de corresponderende deelverzamelingen van $L^r(E, F^\delta)$. Het doel voor een vervolgonderzoek zou nu kunnen zijn, om deze (en wellicht meer) deelverzamelingen uit te sluiten, en op zoek te gaan naar een element van $L^r(E, F)$ dat niet het infimum is van zijn bovengrezen in $L^r(E, F^\delta)$. Het vermoeden is dan ook dat er inderdaad zo'n element aanwezig is en dus deze manier van Rieszcompleteringen van ruimten van operatoren niet werkt voor alle ruimten van het type $L^r(E, F)$.

Referenties

[1] M. van Haandel, *Completions in Riesz space theory*, wibro dissertatiedrukkerij, Helmond, 1993.

[2] O. van Gaans en A. Kalauch, *Ideals and bands*, positivity **12** (2008), no. 4.

[3] W.A.J. Luxemburg en A.C. Zaanen, *Riesz Spaces Volume I*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1971.

[4] A.L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper and Row Publishers, New York-Evenston-London, 1967.

[5] C.D. Aliprantis en R. Tourky, *Cones and Duality Volume 4*, American Mathematical Society, Providence-Rhode Island, 2007.

[6] R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, The Open Court Publishing Company, Chicago, 2007.

[7] Y.A. Abramovich en A.W. Wickstead, *Regular operators from and into a small Riesz space*, Indag. Mathem., N.S. 2 (3) (1991).