I. Verstraten

Reserveringssystemen

Bachelorscriptie, 26 juli 2013

Scriptiebegeleider: Dr. F.M. Spieksma

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Om zeker te weten dat je kan eten in een restaurant, reserveert bijna iedere Nederlander een tafeltje. Weinig mensen kiezen ervoor om zonder te reserveren naar een restaurant te gaan. Maar is dit wel beter? Is het niet veel beter om zonder te reserveren naar een restaurant te gaan en te gokken dat er een tafeltje vrij is? In dit verslag zullen we laten zien dan reserveren in sommige situaties beter is. Dus dat bij bepaalde voorwaarden geldt dat niet reserveren beter is en dat bij andere voorwaarden reserveren beter is.

Het hoofddoel van dit verslag is het bewijs dat reserveren beter is onder bepaalde voorwaarden.

Ook laat ik zien dat er een speciaal geval is dat het niet uitmaakt of je wel of niet reserveert.

2 Twee systemen

We willen twee systemen vergelijken. Een systeem zonder reservering en een systeem met reservering.

2.1 Zonder reservering

In het systeem zonder reservering beschouwen we de zogenaamde $M/G/c/c$-rij als basismodel.

M : de aankomsten van klanten zijn Markov en gemodelleerd als een Poisson proces
G : de bedieningstijden zijn willekeurig, maar onafhankelijk en identiek verdeeld met verwachtingswaarde $\frac{1}{\mu}$
c : het aantal tafeltjes
c : het maximale aantal klanten in het systeem

We zien hier dus dat in dit model de vorming van een wachtrij niet is toegestaan. Dit systeem wordt ook wel het *Erlang Verlies Model* genoemd.

Een cruciale eigenschap die in dit systeem geldt is de PASTA-eigenschap. PASTA staat voor ***P**oisson **A**rrivals **S**ee **T**ime **A**verages.* Dit betekent dat de klanten het systeem op dezelfde manier aantreffen als de waarnemer het ziet op een willekeurig tijdstip. Als de PASTA-eigenschap niet geldt, dan is de analyse van de wachtrij veel gecompliceerder.

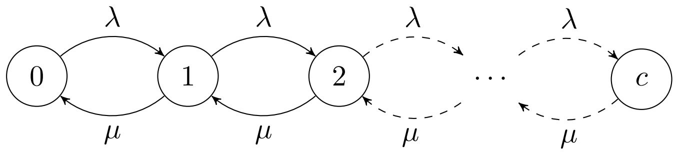
Een andere bijzondere eigenschap is de insensitiviteit voor de bedieningsduurverdeling. De stationaire verdeling van dit wachtrijsysteem bestaat en is gelijk aan die van de stationaire verdeling van de $M/M/c/c$-wachtrij. De verwachte bedieningsduur blijft dan $\frac{1}{\mu}$.

De stationaire verdeling van een $M/M/c/c$-wachtrij is gelijk aan

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_{leeg} & n \leq c \\ 0 & n > c, \end{cases} .$$

waarbij P_{leeg} de kans op een leeg systeem is en n het aantal klanten in het systeem.

Omdat geldt dat er geen wachtrij kan ontstaan, geldt dat voor $n > c$ de kans 0 is.

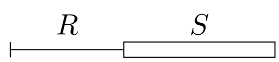


Figuur 1: Model van het aankomstproces en het bedieningsproces.

Klanten komen aan met parameter λ en worden bediend met parameter μ. Voor c tafeltjes ziet het transitiemodel er dan net zo uit als Figuur 1.

2.2 Met reservering

Klanten kunnen van tevoren bellen om aan te geven dat ze willen eten in een restaurant. Via internet reserveren is in deze tijd ook zeer gebruikelijk. Laat R_n de reserveringstijd van de n^e klant zijn. Dit is de tijd tussen het moment dat de klant belt en het moment dat de klant daadwerkelijk het tafeltje wil. Laat S_n de bedieningsduur van de n^e klant weergeven, voor $n = 1, \cdots, c$. $[R_n]_n$ en $[S_n]_n$ zijn ieder rijen met onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen. R_n is verdeeld als R en S_n is verdeeld als S voor alle n.



Figuur 2: R: reserveringstijd, S: bedieningsduur

R kan deterministisch of willekeurig verdeeld zijn. Met deterministische reserveringstijden bedoelen we dat klanten een vaste tijd van tevoren bellen. We zullen zien dat als R deterministisch is het in het algemeen andere resultaten oplevert dan wanneer R willekeurig verdeeld is.

3 Welk systeem is beter?

Om te bepalen welke van de twee systemen beter is, bekijken we de blokkeringskansen. De blokkeringskans is de kans dat een klant het systeem vol aantreft, dus dat alle tafeltjes bezet zijn, en de klant moet vertrekken. We noteren de blokkeringskans in een systeem met reservering met P_M en in een systeem zonder reservering met P_Z. Hoe kleiner de blokkeringskans hoe beter het systeem.

Alle relaties tussen P_M en P_Z zijn mogelijk. We zullen ze alle drie apart bekijken.

De volgende drie relaties zullen we gaan bekijken:

1. $P_Z = P_M$
2. $P_Z \leq P_M$
3. $P_Z \geq P_M$

3.1 $P_Z = P_M$

Niet altijd geldt dat het ene systeem beter is dan de ander. Onder zekere voorwaarden geldt dat de systemen even goed zijn.

Stelling 1
Als R deterministisch is en S willekeurig verdeeld, dan geldt $P_Z = P_M$.

Bewijs
Het bewijs hiervoor is vrij eenvoudig. Het aankomstproces 'verschuift' over een vaste periode $R = \mathbb{E}[R]$ doordat de reserveringstijden deterministisch verdeeld zijn. Dus we kunnen dit zien als een $M/G/c/c$ rij. Hierdoor is het systeem met reservering gelijk aan het syteem zonder reservering. Dus er geldt $P_Z = P_M$.

3.2 $P_Z \leq P_M$

Als de blokkeringskans kleiner is in een systeem zonder reservering dan in een systeem met reservering wordt het systeem zonder reservering als beter beschouwd.

Stelling 2
Voor willekeurige verdeelde R en deterministische S geldt $P_Z \leq P_M$.

Bewijs
Het bewijs wordt hier niet gegeven.

3.3 $P_Z \geq P_M$

We willen nu laten zien dat reserveren beter is dan niet reserveren. Hier zitten wel wat voorwaardes aan vast.

We bekijken hiervoor een restaurant met één tafeltje, dat wil zeggen $c = 1$. We bekijken een systeem met R en S onafhankelijk en waarbij geldt

$$R = \begin{cases} 0 & \text{met kans } q \\ T & 1-q \end{cases} \qquad S = \begin{cases} 0 & \text{met kans } p \\ T & 1-p \end{cases} . \tag{1}$$

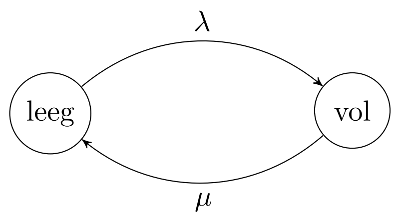
Stelling 3
Als geldt $\lambda T p > 1$ en $q < \frac{\lambda T p - 1}{\lambda T}$, dan geldt $P_Z \geq P_M$.

Bewijs

Het bewijzen dat $P_Z \geq P_M$ is hetzelfde als het bewijzen dat $1 - P_M \geq 1 - P_Z$. $1 - P_Z$ is de acceptatiekans in het systeem zonder reservering en die kunnen we expliciet uitrekenen. De acceptatiekans is dezelfde als de kans dat het tafeltje leeg is. De kans dat het tafeltje leeg is, noteren we met P_{leeg}. De kans dat het tafeltje bezet is, noteren we met P_{vol}, dus $P_M = P_{vol}$. Er geldt

$$\begin{aligned} P_{vol} + P_{leeg} &= 1 \\ P_{vol} &= \rho P_{leeg}, \end{aligned}$$

waarbij $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ de bezettingsgraad van het tafeltje is, λ de aankomstsnelheid en μ de bedieningsduur in minuten. Het transistiediagram staat hieronder.



Figuur 3: Model van een systeem waarbij geldt $c = 1$

Er komen dus λ klanten per minuut aan die vervolgens met kans q kiezen om 0 minuten te blijven zitten en met kans $1 - q$ om T minuten te blijven zitten. De verwachte bedieningsduur is dan gelijk aan

$$\mathbb{E}[S] = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot T = (1 - p)T.$$

De bedieningsduur heeft dezelfde verwachtingswaarde als die van de exponentiële verdeling. Met $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\mu}$ geldt $\mu = \frac{1}{(1-p)T}$.

Nu geldt dus:

$$\begin{aligned} P_{vol} &= \rho P_{leeg} \\ &= \lambda(1 - p)TP_{leeg}. \end{aligned}$$

Dit invullen in $P_{vol} + P_{leeg} = 1$ geeft

$$\begin{aligned} \lambda(1 - p)TP_{leeg} + P_{leeg} &= 1 \\ P_{leeg} &= \frac{1}{1 + \lambda(1 - p)T} \\ &= 1 - P_Z. \end{aligned}$$

We gaan het in het vervolg hebben over $R = 0$ en $R = T$ klanten. Met $R = 0$ klanten de klanten die 0 reserveringstijd hebben en waarvan de bedieningsduur nog niet bekend is. Voor $R = T$ klanten geldt hetzelfde, maar zij hebben T reserveringstijd.

We willen nu $1 - P_M$ bepalen. Alleen gaat dit niet expliciet. Het kan voorkomen dat er een $R = 0$ klant langskomt die T minuten bediening wil.

Maar op dat moment kan er al een $R = T$ klant zijn langsgekomen die ten opzichte van de $R = 0, S = T$ klant over minder dan T minuten bediening wil. Daarop wordt de $R = 0, S = T$ klant geblokkeerd. De acceptatiekans daarvan is dan lastig te bepalen.

Het blijkt voldoende te zijn om een ondergrens voor $1 - P_M$ te bepalen.

$$\begin{aligned}
1 - P_M &= (1-q)\cdot \text{ acceptatiekans van een } R = T \text{ klant} \\
&\quad + q \cdot \text{ acceptatiekans van een } R = 0 \text{ klant} \\
&= (1-q)\cdot \text{ acceptatiekans van een } R = T \text{ klant} \\
&\quad + q(1-p)\cdot \text{ acceptatiekans } R = 0, S = T \text{ klant} \\
&\quad + qp \cdot \text{ acceptatiekans } R = 0, S = 0 \text{ klant} \\
&\geq (1-q)\cdot \text{ acceptatiekans van een } R = T \text{ klant} \\
&\quad + qp \cdot \text{ acceptatiekans } R = 0, S = 0 \text{ klant.}
\end{aligned}$$

We willen dus de acceptatiekans bepalen van een $R = T$ klant en een $R = 0, S = 0$ klant. Dit doen we door twee modellen te gaan bekijken.

- Het oorspronkelijke model. Met kans q komen klanten aan met $R = 0$ en met kans $1 - q$ met $R = T$. Vervolgens kiezen ze met kans p voor bedieningsduur $S = 0$ en met kans $1 - p$ voor bedieningsduur $S = T$.
- Het onafhankelijke model. Waarbij $R = T$ en $R = 0$ als twee aparte en onafhankelijke virtuele rijen worden gezien. De $R = T$ rij wordt dus een verschoven $M/G/1/1$ rij.

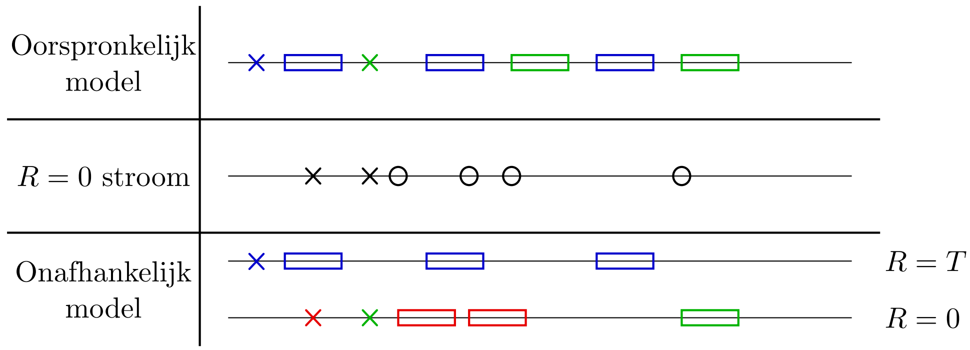
We willen nu de acceptatiekans van een $R = T$ en van een $R = 0, S = 0$ klant bepalen in het onafhankelijke model.

Allereerst bepalen we de acceptatiekans van een $R = T$ klant. Een $R = T$ klant wordt nooit geblokkeerd door een $R = 0$ klant. Daarom kunnen we alle klanten met $R = T$ als een aparte rij beschouwen. We bepalen nu de acceptatiekans van een $R = T$ klant in de virtuele $R = T$ rij. Deze kans kunnen we uitrekenen op dezelfde wijze als bij $1 - P_Z$, zie Stelling 1.

Klanten komen aan met parameter $(1 - q)\lambda$ en kiezen vervolgens of ze 0 of T bedieningsduur willen. De verwachte bedieningsduur is dan dus weer $(1 - p)T$. Hieruit volgt dat de acceptatiekans gelijk is aan

$$\frac{1}{1 + (1-p)(1-q)\lambda T}.$$

Vervolgens willen we laten zien dat de acceptatiekans van een $R = 0, S = 0$ klant kleiner is in het onafhankelijke model dan in het oorspronkelijke model.



Figuur 4: Vergelijking tussen de twee modellen.

Hier geldt

$$\begin{aligned} \text{blauw kruisje}: &\quad R = T, S = 0 \text{ klant} \\ \text{blauwe rechthoek}: &\quad R = T, S = T \text{ klant} \\ \text{rood of groen kruisje}: &\quad R = 0, S = 0 \text{ klant} \\ \text{rode of groene rechthoek}: &\quad R = 0, S = T \text{ klant.} \end{aligned}$$

In de $R = 0$ stroom geldt

$$\begin{aligned} \text{kruisje}: &\quad R = 0, S = 0 \text{ klant} \\ \text{rondje}: &\quad R = 0, S = T \text{ klant.} \end{aligned}$$

In onze virtuele $R = 0$ rij hebben we een virtueel tafeltje dat we rood kleuren. Het 'echte' tafeltje kleuren we groen. In het oorspronkelijke model kleuren we dus de geaccepteerde $R = 0$ klanten ook groen, zoals te zien is in Figuur 4. Als er een $R = 0$ klant binnenkomt, bekijk je eerst of er in de $R = 0$ rij het rode tafeltje vrij is. Als dit niet zo is, moet de klant het systeem verlaten. Zodra het rode tafeltje wel vrij is, geef je de klant dat tafeltje. Vervolgens bekijk je of het groene tafeltje vrij is. Zo nee, dan houd je het tafeltje rood. Zo ja, dan kleur je het tafeltje groen.

Wat goed te zien is in Figuur 4 is dat er in het oorspronkelijke model meer tafeltjes groen gekleurd zijn dan in het onafhankelijke model.

De kans dat een $R = 0$ klant wordt geaccepteerd aan het groene tafeltje in het onafhankelijke systeem is kleiner, omdat er ook een positieve kans is dat de klant al geblokkeerd wordt door het rode tafeltje.

We kijken alleen naar de $R = 0, S = 0$ klanten, de groene kruisjes. De kans op een groen kruisje is kleiner in het onafhankelijke model en dat is precies de kans dat beide rijen leeg zijn, wat ook volgt uit Figuur 4.

Hieruit volgt dus

$$\begin{aligned}
1 - P_M &\geq (1-q)\cdot \text{ acceptatiekans van een } R = T \text{ klant} \\
&\quad + qp \cdot \text{ acceptatiekans in het oorspronkelijke model van een} \\
&\quad R = 0, S = 0 \text{ klant.} \\
&\geq (1-q)\cdot \text{ acceptatiekans van een } R = T \text{ klant} \\
&\quad + qp \cdot \text{ acceptatiekans in het onafhankelijke model van een} \\
&\quad R = 0, S = 0 \text{ klant.}
\end{aligned}$$

De kans dat beide rijen leeg zijn, dus dat een $R = 0, S = 0$ klant geaccepteerd wordt, is gelijk aan

$$\text{acceptatiekans in virtuele } R = T \text{ rij} \cdot \text{acceptatiekans in virtuele } R = 0 \text{ rij.}$$

De acceptatiekans in de $R = T$ rij hadden we al bepaald en was gelijk aan

$$\frac{1}{1 + (1-p)(1-q)\lambda T}.$$

De acceptatiekans in de $R = 0$ rij berekenen we op dezelfde wijze als die in de $R = T$ rij.

Klanten komen nu aan met parameter $q\lambda$ en kiezen daarna of ze 0 of T bedieningstijd willen. Dus de verwachte bedieningsduur is weer $(1-p)T$. De acceptatiekans is dus gelijk aan

$$\frac{1}{1 + (1-p)q\lambda T}$$

De acceptatiekans dat een $R = 0, S = 0$ klant geaccepteerd wordt in het onafhankelijke model is dus gelijk aan

$$\frac{1}{1 + (1-p)(1-q)\lambda T} \cdot \frac{1}{1 + (1-p)q\lambda T}.$$

Nu hebben we dus een ondergrens L_M verkregen voor $1 - P_M$.

$$L_M = \frac{1-q}{1 + (1-p)(1-q)\lambda T} + \frac{pq}{(1 + (1-p)(1-q)\lambda T)(1 + (1-p)q\lambda T)}.$$

We gaan vervolgens L_M beschouwen als een functie van q. Alle andere parameters liggen vast.

Met behulp van analyse kunnen we nu oplossen dat onder bepaalde voorwaarden geldt $1 - P_Z \leq 1 - P_M$. Eerst bepalen we zien voor welke waardes van q geldt $1 - P_Z = L_M$.

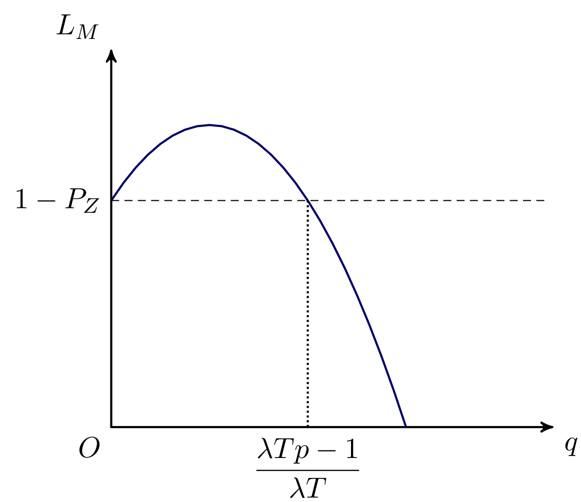
$$\begin{aligned} 1 - P_Z &= L_M \\ \frac{1}{1 + (1-p)\lambda T} &= \frac{1-q}{1 + (1-p)(1-q)\lambda T} + \frac{pq}{(1 + (1-p)(1-q)\lambda T)(1 + (1-p)q\lambda T)}. \end{aligned}$$

Oplossen van deze vergelijking geeft $q = 0$ en $q = \frac{\lambda T p - 1}{\lambda T}$.

Ook geldt voor $q = 1$

$$\begin{aligned} L_M &= p(1 - P_Z) \\ &< 1 - P_Z. \end{aligned}$$

Wat we nu willen laten zien is dat de functie L_M tussen $q = 0$ en $q = \frac{\lambda T p - 1}{\lambda T}$ groter is dan $1 - P_Z$.



Figuur 5: Wanneer geldt $1 - P_Z \leq L_M$?

Het is voldoende om te laten zien dat de functie in $q = 0$ stijgt.

Er geldt

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{(1-p)[\lambda T(p - 2q) - \lambda^2 T^2 q^2 (1-p)^2 - 1]}{[1 + \lambda T(1-p)(1-q)]^2 [1 + \lambda T q (1-p)]^2}.$$

Vervolgens vullen we in de afgeleide $q = 0$ in en krijgen we

$$\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q=0} = \frac{(1-p)(\lambda T p - 1)}{[1 + \lambda T(1-p)]^2}.$$

Onder de voorwaarde $\lambda T p > 1$, geldt nu $\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q=0} > 0$. De functie L_M stijgt dus in $q = 0$. Hieruit volgt dat voor $q \in (0, \frac{\lambda T p - 1}{\lambda T})$ geldt $1 - P_Z < L_M \leq 1 - P_M$. Hiermee hebben we de stelling bewezen.

4 Meerdere tafeltjes

In Stelling 3 is bewezen dat reserveren beter is dan niet reserveren, maar daarbij gelden wel wat voorwaarden. Eén van die voorwaarden is dat er één tafeltje was. We gaan nu een restaurant bekijken met c tafeltjes, maar nog wel met de R en S die we eerder bepaald hebben, zie (1).

Eerst gaan we bekijken wat dit geeft voor een systeem zonder reservering.

De stationaire verdeling van het $M/M/c/c$ model weten we, die is gelijk aan

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_{leeg} & n \leq c \\ 0 & n > c \end{cases}$$

De verwachte bedieningsduur blijft gelijk en er geldt dus $\frac{1}{\mu} = (1-p)T$. Dit invullen geeft in de stationaire verdeling geeft $P_n = \frac{(\lambda(1-p)T)^n}{n!} P_0$.
Waarbij P_0 gelijk is aan P_{leeg}.

Een klant wordt nu geaccepteerd zodra er $1, \cdots, c-1$ tafeltjes vrij zijn. De acceptatiekans is dan dus lastig te bepalen. We kunnen nu dus beter naar de blokkeringskans kijken. Er geldt:

$$\text{acceptatiekans} = 1 - \text{blokkeringskans}.$$

Dus we gaan net zoals in het bewijs van Stelling 3 laten zien dat geldt $1 - P_M \geq 1 - P_Z$.

Eerst bepalen we de acceptatiekans in het systeem zonder reservering.

Een klant wordt geblokkeerd als alle tafeltjes bezet zijn. Dus als er al c klanten een tafeltje hebben. De kans dat er c klanten in het systeem zitten, is

$$P_c = \frac{(\lambda(1-p)T)^c}{c!} \cdot P_0.$$

P_0 kunnen we expliciet berekenen.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-p)T)^i}{i!}}.$$

De blokkeringskans in een systeem zonder reservering is dus gelijk aan

$$P_Z = \frac{(\lambda(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-p)T)^i}{i!}}.$$

Dit betekent dat de acceptatiekans gelijk is aan

$$1 - P_Z = 1 - \frac{(\lambda(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-p)T)^i}{i!}}.$$

We willen nu de blokkeringskans in het systeem met reservering bepalen.

Dit doen we door weer naar de twee modellen te gaan kijken,

- het oorspronkelijke model;
- het onafhankelijke model.

Dit mag, omdat de $R = T$ klanten nog steeds niet geblokkeerd worden door $R = 0$ klanten.

Er geldt nu dus

$$\begin{aligned} 1 - P_M \quad \geq \quad & (1-q) \cdot (1 - \text{blokkeringskans van een } R = T \text{ klant}) \\ & + qp \cdot (1 - \text{blokkeringskans van een } R = 0 \text{ klant in} \\ & \text{het onafhankelijke model}) \,. \end{aligned}$$

Net zoals in het bewijs van Stelling 3 gaan we een ondergrens L_M bepalen van $1 - P_M$.

Allereerst bepalen we de blokkeringskans van een $R = T$ klant. Er geldt weer volgens Stelling 1 dat die op dezelfde wijze uit te rekenen is als P_Z. Klanten komen aan met parameter $(1-q)\lambda$ in plaats van met λ. De blokkeringskans is dus

$$\frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}.$$

De acceptatiekans van een $R = 0$ klant in de $R = T$ rij is dus

$$1 - \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}.$$

Vervolgens bepalen we de acceptatiekans van een $R = 0$ klant in de virtuele $R = 0$ rij.

De kans dat alle rode tafeltjes bezet zijn, wat betekent dat er al c $R = 0$ klanten een rood tafeltje hebben, kunnen we berekenen. $R = 0$ klanten komen aan met parameter $q\lambda$ in plaats van met λ. De blokkeringskans wordt dan dus

$$\frac{(\lambda q(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda q(1-p)T)^i}{i!}}.$$

De acceptatiekans van een $R = 0$ klant in de $R = 0$ rij in het onafhankelijke systeem is dus gelijk aan

$$1 - \frac{(\lambda q(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda q(1-p)T)^i}{i!}}.$$

Hieruit volgt dat de acceptatiekans van een $R = 0$ klant in het gelijk is aan

$$\left(1 - \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}\right) \cdot \left(1 - \frac{(\lambda q(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda q(1-p)T)^i}{i!}}\right).$$

De ondergrens van $1 - P_M$ is nu dus

$$\begin{aligned} L_M &= (1-q) \cdot \left(1 - \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}\right) \\ &\quad + qp \cdot \left(1 - \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{(\lambda q(1-p)T)^c}{c!} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{c} \frac{(\lambda q(1-p)T)^i}{i!}}\right). \end{aligned}$$

We hebben nu een algemene uitdrukking gevonden voor c tafeltjes. In het onafhankelijke model hebben we ook c tafeltjes voor beide rijen genomen. Maar waar in de $R = T$ rij c tafeltjes staan, is het niet nodig om ook c tafeltjes te hebben in de $R = 0$ rij. Het is ook mogelijk om één tafeltje te hebben. Dan wordt de blokkeringskans wel groter en krijg je een lagere ondergrens van de acceptatiekans dan bij c tafeltjes.

De algemene uitdrukking is erg lastig te implementeren in computerprogramma's. Daarom bekijken we het algemene model voor $c = 2$. In de virtuele $R = 0$ rij staat één tafeltje. De ondergrens is dan

$$L_M = (1-q) \cdot \left(1 - \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{2} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}\right)$$

$$+ \, qp \cdot \left(1 - \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{2} \frac{(\lambda(1-q)(1-p)T)^i}{i!}}\right) \cdot \frac{1}{1 + (1-p)q\lambda T}$$

We willen nu net zoals in het bewijs met één tafeltje de waardes van q vinden waarvoor geldt $L_M = 1 - P_Z$. Dit doen we met behulp van het programma Sage. Zie de bijlage 1 voor het antwoord.

Ook hebben we de afgeleide van L_M bepaald in Sage. Zie bijlage 2.

We willen nu laten zien dat geldt $L_M \geq 1 - P_Z$ voor $q \in (x, y)$ met $x, y \in [0, 1]$ en $x < y$. In Matlab hebben we 100 waardes voor q genomen. Voor $\lambda(1-p)T = 85.255$ geldt dat voor $q \in [0, 0.99]$ de afgeleide van L_M groter is dan 0 en dus $L_M \geq 1 - P_Z$.

Voor meerdere tafeltjes kan je op dezelfde wijze bepalen dat $L_M \geq 1 - P_Z$.

Hieruit volgt dat geldt $1 - P_Z \leq L_M \leq 1 - P_M$.

5 Discussie

Reserveren was beter dan niet reserveren onder bepaalde voorwaarden. Wat niet realistisch in dat bewijs is, is dat klanten 0 of T bedieningsduur kiezen. Klanten die alleen een drankje willen drinken worden dus nog niet verwerkt in het model. Ook reserveren klanten niet willekeurig.

Om het model zo realistisch mogelijk te maken willen we dus dat de reserveringstijden R willekeurig is en dat de bedieningsduur S ook willekeurig is. Maar Stelling 3 was lastig te bewijzen dus het bewijzen of reserveren beter is dan niet reserveren in een realistisch model zal erg lastig zijn.

6 Bijlagen

6.1 Bijlage 1

De vergelijking die in Sage is ingevuld is vereenvoudigd. Ook geldt
$s = \lambda(1 - p)T$.

```
p, q, s, i = var('p,q,s,i')
eqn = q*2*(p/(1+s*q)-1)-(1-q)^3*s^2/sum((s*(1-q))^i/factorial(i),i,0,2)
-q*p*(s*(1-q))^2/((1+s*q)*sum((s*(1-q))^i/factorial(i),i,0,2))
+s^2/sum(s^i/factorial(i),i,0,2)
eqn.solve(q)


[q == 1/2*((p + 1)*s^2 + (2*p + 3)*s + 2*p - sqrt((p^2 - 2*p + 1)*s^4 +
2*(2*p^2 - 5*p + 5)*s^3 + (8*p^2 - 24*p + 33)*s^2 + 4*(2*p^2 - 7*p +
10)*s + 4*p^2 - 16*p + 16))/(s^2 + 2*s),

 q == 1/2*((p + 1)*s^2 + (2*p +
3)*s + 2*p + sqrt((p^2 - 2*p + 1)*s^4 + 2*(2*p^2 - 5*p + 5)*s^3 + (8*p^2
- 24*p + 33)*s^2 + 4*(2*p^2 - 7*p + 10)*s + 4*p^2 - 16*p + 16))/(s^2 +
2*s),

 q == 0]
```

6.2 Bijlage 2

```
p, q, s, i = var('p,q,s,i')
l = (1-(s*(1-q))^2/(2*sum((s*(1-q))^i/factorial(i),i,0,2)))*(1-q+q*p/(1+s*q))
l.diff(q)

(s^2/(s^2 - 2*(-s+2) - 1)- p + 1) + 2*(p*q/(q*s + 1) - q + 1)
*((q - 1)^2*((q - 1)*s^2 - s)*s^2/((q^2 - 2*q + 1)*s^2
- 2*(q - 1)*s + 2)^2 - (q - 1)*s^2/((q^2 - 2*q + 1)*s^2 - 2*(q - 1)*s + 2))
```

6.3 Bijlage 3

```
q=[0:1/100:1];
s = 85.2550

>> (((q-1)*s).^2./((q.^2-2*q+1)*s^2-2*(q-1)*s+2)-1).
*(p*q*s./((q*s+1).^2)-p./(q*s+1)+1)
+2*(p*q./(q*s+1)-q+1).*((q-1).^2./((q-1)*s^2-s).
*(s^2./((q.^2-2*q+1)*s^2-2*(q-1)*s+2).^2)
-((q-1)*s^2./((q.^2-2*q+1)*s^2-2*(q-1)+2)))

ans =

Columns 1 through 11

    1.9873 1.9843 1.9844 1.9846 1.9848 1.9849 1.9849 1.9849 1.9849 1.9848 1.9848

Columns 12 through 22

    1.9847 1.9846 1.9845 1.9844 1.9842 1.9841 1.9839 1.9838 1.9836 1.9834 1.9833

Columns 23 through 33

    1.9831 1.9829 1.9827 1.9825 1.9822 1.9820 1.9818 1.9815 1.9813 1.9810 1.9807

Columns 34 through 44

    1.9805 1.9802 1.9799 1.9796 1.9792 1.9789 1.9786 1.9782 1.9778 1.9775 1.9771

Columns 45 through 55

    1.9766 1.9762 1.9758 1.9753 1.9748 1.9743 1.9738 1.9732 1.9727 1.9721 1.9714

Columns 56 through 66

    1.9708 1.9701 1.9694 1.9686 1.9678 1.9670 1.9661 1.9651 1.9642 1.9631 1.9620

Columns 67 through 77
```

```
    1.9608 1.9596 1.9582 1.9568 1.9552 1.9536 1.9518 1.9499 1.9478 1.9456 1.9431

Columns 78 through 88

    1.9404 1.9374 1.9341 1.9305 1.9264 1.9219 1.9167 1.9108 1.9040 1.8962 1.8869

Columns 89 through 99

    1.8759 1.8625 1.8460 1.8251 1.7980 1.7615 1.7102 1.6338 1.5110 1.2938 0.8655

Columns 100 through 101

    0.0000 -0.9999
```

7 Bibliografie

Dictaat

- Besliskunde 2 Najaar 2012, L.C.M. Kallenberg, bewerkt door F.M. Spieksma

Artikelen

- Maartje van de Vrugt, Nelly Litvak, Richard J. Boucherie, "Blocking probabilities in Erlang loss queues with advance reservation"

Sites

- http://nl.wikipedia.org/wiki/PASTA-eigenschap
- http://en.wikipedia.org/wiki/M/G/1_queue
- http://nl.wikipedia.org/wiki/Erlang-verdeling