Suprema in ruimten van operatoren

Jan van Waaij

Bachelorscriptie, 14 juni 2011

Scriptiebegeleider: dr. O.W. van Gaans

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Dankwoord

Met veel plezier heb ik deze scriptie geschreven. Ik ben Onno dankbaar voor de kans die hij mij gegeven heeft om aan nieuw onderzoek te werken en de begeleiding die hij mij gegeven heeft.

Jan van Waaij

Samenvatting

In deze bachelorscriptie wordt een karakterisering gegeven van reguliere operators op de eindige rijen, $c_{00}(\mathbb{I})$, naar een willekeurige gerichte geordende vectorruimte Y; de ruimte $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ blijkt orde-isomorf te zijn met de eenvoudige ruimte van functies van $\mathbb{I}$ naar Y, $Y^{\mathbb{I}}$. Als Y gericht en integraal gesloten is, dan blijkt $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y) \subset L_r(c_{00}, Y^{\delta})$ ordedicht en kan, als het supremum van twee operators bestaat, de formule van Riesz-Kantorovič worden toegepast. Ook blijkt $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ archimedisch, riesz of dedekind compleet te zijn dan en slechts dan als Y respectievelijk archimedisch, riesz of dedekind compleet is. Via een analoog bewijs blijkt de ruimte van continue reguliere operators $\mathcal{L}_r(\ell^1, X)$ van ℓ^1 naar een geordende banachruimte $(X, ||\cdot||)$ met een, nader te specificeren M-reguliere norm $||\cdot||$, orde-isomorf te zijn met $\ell^{\infty}(X)$. Wat nieuw schijnt te zijn, is een bewijs dat ordedichtheid transitief is, i.e. als $X \subset Y$ ordedicht en $Y \subset Z$ ordedicht, dan is $X \subset Z$ ordedicht. De scriptie begint met een beknopte inleiding in de theorie over (abstracte) geordende vectorruimten, met veel aandacht voor equivalente definities.

Inleiding

De klassieke stelling van Riesz-Kantorovič uit de theorie over rieszruimten zegt dat als X en Y archimedische rieszruimten zijn en Y dedekind compleet, dan is de ruimte van reguliere operators $L_r(X, Y)$ een dedekind complete rieszruimte en is er een formule (de formule van Riesz-Kantorovič) om het supremum van twee operators uit te rekenen. Als Y niet dedekind compleet is, dan hoeft $L_r(X, Y)$ geen rieszruimte te zijn. Toch kan in sommige gevallen het supremum van twee operators bestaan. In alle bekende gevallen geldt de formule van Riesz-Kantorovič. Deze bachelorscriptie gaat over de al dertig jaar openstaande vraag of de formule van Riesz-Kantorovič algemeen geldig is. Een algemeen antwoord wordt niet gegeven, maar voor een grote klasse van reguliere operators, $L_r(X, Y)$ met $X = c_{00}(\mathbb{I})$ en Y gericht en archimedisch, blijkt dat inderdaad het geval te zijn. We geven een karakterisering van de ruimten $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ en $\mathcal{L}_r(\ell^1, X)$ met X een geordende banachruimte met M-reguliere norm. Ordedichtheid speelt een grote rol in het beantwoorden van de onderzoeksvraag. In [5], lemma 9 bewijzen Van Gaans, Kalauch en Lemmens dat als $X \subset Y$ ordedicht ligt en $Y \subset Z$ normdicht, met eenheidsnorm[1] $|| \cdot ||_u$ dan ligt $X \subset Z$ ordedicht. Wij geven een algemener bewijs, het is voldoende dat $Y \subset Z$ ordedicht ligt en er is ook geen orde-eenheid nodig.

[1]Zie [5], pagina 2

1 Geordende vectorruimten

Veel vectorruimten die men tegenkomt in de theorie hebben een natuurlijke ordening, zoals $\mathbb{R}^n$, ruimten van functies, enzovoorts. Lineaire afbeeldingen tussen geordende vectorruimten geven aanleiding tot een natuurlijke ordening op de ruimte van lineaire afbeeldingen, dat is het onderwerp van het volgende hoofdstuk en het hoofdonderwerp van deze scriptie. Technieken om ruimten van operatoren te bestuderen worden hier ontwikkeld. De elementaire theorie over geordende vectorruimten en rieszruimten kan worden gevonden in [2, 3, 8, 9].

1.1 Vectorruimteordeningen

Definitie 1.1.1. Zij X een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Een kegel K is een deelverzameling van X zodat:

- $K \cap (-K) = \{0\}$.
- Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en voor alle $x \in K : \lambda x \in K$.
- Voor alle $x, y \in K : x + y \in K$.

Definitie 1.1.2. Zij X een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Een partiële ordening $\leq$ op X met aanvullende eisen:

1. voor alle $x, y \in X$ met $x \leq y$ geldt voor alle $z \in X : x + z \leq y + z$,
2. voor alle $x, y \in X$ met $x \leq y$ geldt voor alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \lambda x \leq \lambda y$,

heet een vectorruimteordening en $(X, \leq)$ is een (partiëel) geordende vectorruimte.

Opmerking 1.1.3.
1. Twee vectorruimteordeningen $\leq$ en $\preceq$ op X zijn gelijk als voor alle $x, y \in X : x \leq y \Leftrightarrow x \preceq y$.
2. Stel $A \subset X$ is een verzameling. Stel er bestaat een $l \in X$ ($h \in X$) zodat voor alle $a \in A : l \leq a$, (respectievelijk $a \leq h$) dan is A naar onder begrensd, (respectievelijk naar boven begrensd) notatie: $l \leq A$, (respectievelijk $A \leq h$.) We zeggen dat A begrensd is als A naar onder en boven begrensd is, notatie: $l \leq A \leq h$. Verder is l een ondergrens van A (respectievelijk h een bovengrens van A), de verzameling van alle ondergrenzen (respectievelijk bovengrenzen) geven we aan met A^l (respectievelijk A^u).

3. Stel $x \leq y$ dan schrijven we ook wel $y \geq x$. Als $x \neq y$, dan schrijven we ook wel $x < y$ of $y > x$.

4. Een element $x \in X$ heet positief als $0 \leq x$. De verzameling van alle positieve elementen is $X^+ : \{x \in X : 0 \leq x\}$.

De volgende definitie is eenieder wel bekend, omdat de definitie wat subtiel kan zijn is een herhaling niet overbodig.

Definitie 1.1.4. Stel X is een geordende vectorruimte en $A \subset X$ is een deelverzameling.

1. $s \in X$ is het supremum van A als $A \leq s$ en voor alle $h \in X : A \leq h \Rightarrow s \leq h$.

2. $i \in X$ is het infimum van A als $i \leq A$ en voor alle $l \in X : l \leq A \Rightarrow l \leq i$.

We schrijven $s = \sup_X A$ (of $s = \sup A$) en $i = \inf_X A$ (of $i = \inf A$). Als $A = \{x, y\}$ dan schrijven we $s = x \vee y$ en $i = x \wedge y$. Notabene, als we bijvoorbeeld schrijven $x = \sup A$ dan bedoelen we dat het supremum van A én bestaat én gelijk is aan x, hetzelfde geldt voor $\inf A$.

Merk dus op dat als $\sup A$ bestaat de verzameling bovengrenzen van A niet leeg is en s vergelijkbaar is met iedere bovengrens en analoog is als $\inf A$ bestaat, de verzameling ondergrenzen niet leeg en is i vergelijkbaar met iedere ondergrens.

De volgende propositie maakt duidelijk dat er een direct verband bestaat tussen de vectorruimteordening en de verzameling positieve elementen X^+.

Propositie 1.1.5. *Laat X een reële vectorruimte. Dan geldt als:*

1. *$\leq$ een vectorruimteordening op X is en $X^+ := \{x \in X : 0 \leq x\}$. Dan is X^+ een kegel,*

2. *$K \subset X$ een kegel is, dan is $\preceq$ gedefinieerd door $x \preceq y :\Leftrightarrow y - x \in K$ een vectorruimteordening op X,*

3. *in het bijzonder als $K = X^+$, dan definieëren $\leq$ en $\preceq$ dezelfde ordening op X.*

Bewijs. 1. Stel $x_1, x_2 \in X^+$. Dan is $0 \leq x_2$, dus $0 \leq x_1 \leq x_1 + x_2$ en voor $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is $0 = \lambda 0 \leq \lambda x_1$. Merk op dat $0 \in X^+ \cap (-X^+)$, andersom stel $x \in X^+ \cap (-X^+)$, dan is $0 \leq x$ en $0 \leq -x$, dus $x \leq 0$, dus $x = 0$. Dus X^+ is een kegel.

2. Merk op dat $\preceq$ reflexief en anti-symmetrisch is. Stel $x \preceq y, y \preceq z$, dan is $z - x = (z - y) + (y - x) \in K$, dus $x \preceq z$, dus $\preceq$ is transitief. Stel $x \preceq y$ dan is voor alle $z \in X : y - x = (y + z) - (x + z) \in K$, dus $x + z \preceq y + z$. Stel $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dan is $\lambda y - \lambda x = \lambda(y - x) \in K$, dus $\lambda x \preceq \lambda y$. Dus $\preceq$ is een vectorruimteordening.

3. Stel $K = X^+$. Stel $x \leq y$, dan is $y - x \in K$, dus $x \preceq y$. Stel $x \preceq y$, dan is $y - x \in K$, dus $0 \leq y - x$, dus $x \leq y$.

□

Opmerking 1.1.6. Een geordende vectorruimte $(X, \leq)$ met kegel $K = X^+$ wordt ook wel genoteerd met (X, K).

In de analyse maken we veel gebruik van een of andere vorm van convergentie, vaak is dit geformuleerd in termen van convergerende rijen. In de theorie over geordende vectorruimten is dit vaak gedefinieerd in termen van infimum en supremum, bijvoorbeeld als $0 \leq x$ dan willen we graag dat het infimum van $\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ nul is. Dit blijkt niet altijd het geval te zijn. Daarom beschouwen we speciale ruimten waar deze eigenschap of andere eigenschappen wel gelden.

Definitie 1.1.7. Zij X een geordende vectorruimte.

1. X heet archimedisch als voor alle $n \in \mathbb{Z}$ en voor alle $x, y \in X : nx \leq y \Rightarrow x = 0$.

2. X heet integraal gesloten als voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en voor alle $x, y \in X : nx \leq y \Rightarrow x \leq 0$.

3. X heet gericht als voor alle $x \in X$ er $y, z \in X^+$ bestaan zodat $x = y - z$.

4. X heet een rieszruimte als voor alle $x, y \in X$ het supremum van $\{x, y\}$ in X bestaat. We noteren $x^+ := x \vee 0, x^- := -x \vee 0$ en $|x| := -x \vee x$.

5. X heet een dedekind complete rieszruimte als voor alle begrensde verzamelingen $A \subset X$ het infimum en supremum van A binnen X bestaat.

Opmerking 1.1.8. In het volgende hoofdstuk zullen we ingaan op lineaire afbeeldingen tussen geordende vectorruimten. Het enige wat we in dit hoofdstuk gebruiken is orde-isomorfisme: een lineaire afbeelding $T : X \to Y$, die bijectief is en waarvoor geldt $0 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq Tx$.

Propositie 1.1.9. *Stel X is een rieszruimte en $x \in X$ dan geldt:*

1. $x = x^+ - x^-$,
2. $x^+ \wedge x^- = 0$.

Bewijs. Zie [2], stelling 1.3 □

In de literatuur komt men verschillende (equivalente) definities voor dezelfde begrippen tegen. Verder onderscheiden [4] en [6] integraal gesloten ruimten van archimedische ruimten, waar elders, bijvoorbeeld in [5], integraal gesloten ruimten archimedische ruimten worden genoemd. In wat volgt moet duidelijkheid in deze babylonische spraakverwarring scheppen.

Propositie 1.1.10. *Laat X een geordende vectorruimte. De volgende twee uitspraken zijn equivalent:*

1. *X is gericht.*
2. *Voor alle $x, y \in X$ bestaat een $h \in X$ zodat $x, y \leq h$.*[2]

Bewijs. Stel X is gericht. Zij $x, y \in X$. Dan zijn er $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X^+$ zodat $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$. Dus $0 \leq x_2$, dus $x_1 \leq x_1 + x_2$, dus $x = x_1 - x_2 \leq x_1$, idem $y \leq y_1$. Verder is $0 \leq x_1$, dus $0 \leq y_1 \leq x_1 + y_1$, idem $x_1 \leq x_1 + y_1$, dus $x \leq x_1 + y_1$ en $y \leq x_1 + y_1$.
Stel andersom dat voor alle $x, y \in X$ bestaat er een h zodat $x, y \leq h$. Zij $x \in X$. Dan is er een $h \in X$ zodat $x, -x \leq h$, dus $0 \leq h - x, h + x$. Merk op dat $x = \frac{1}{2}(x + h) - \frac{1}{2}(h - x)$ en $\frac{1}{2}(x + h), \frac{1}{2}(h - x) \in X^+$. Dus X is gericht.

□

Propositie 1.1.11. *Stel X is een geordende vectorruimte. Dan gelden de volgende uitspraken:*

1. *Stel X is integraal gesloten, dan is X archimedisch.*
2. *Stel X is een rieszruimte. Dan is X archimedisch dan en slechts dan als X integraal gesloten is.*

Bewijs. 1. Stel voor alle $n \in \mathbb{Z}$ geldt $nx \leq y$ dan geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $nx \leq y$, dus $x \leq 0$ en voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : n(-x) \leq y$, dus $-x \leq 0$, dus $0 \leq x$, dus $x = 0$. Dus X is archimedisch.

[2]Definitie van gericht in [4, 6]

2. Stel X is een archimedische rieszruimte. Stel voor $x, y \in X$ geldt $x \leq y$, dan is $x \vee 0 \leq y \vee 0$, dus $x^+ \leq y^+$. Stel $x, y \in X$ zo dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nx \leq y$, dan is $nx^+ \leq y^+$. Dus voor alle $n \in \mathbb{Z} : nx^+ \leq y^+$, dus $x^+ = 0$, dus $x \leq 0$. Dus X is integraal gesloten.

□

De omkering van de eerste uitspraak is niet waar, zoals het volgende voorbeeld ontleend aan [6], voorbeeld 1.5 aantoont.

Voorbeeld 1.1.12. *Geordende vectorruimte die archimedisch, doch niet integraal gesloten is.*

Stel $X = \mathbb{R}^2$ met de volgende vectorruimteordening:

$$(a, b) \leq (c, d) :\Leftrightarrow (a < c \text{ en } b < d) \text{ of } (a, b) = (c, d). \tag{1.1.1}$$

Dan is $(X, \leq)$ archimedisch, maar niet integraal gesloten. Stel $(a, b), (c, d) \in X$ zodat voor alle $n \in \mathbb{Z} : n(a, b) = (na, nb) \leq (c, d)$. Dan zijn $c, d \geq 0$, en voor alle $n \in \mathbb{Z} : na \leq c$ en $nb \leq d$, dus volgt $a = 0$ en $b = 0$, dus $(a, b) = (0, 0)$, dus X is archimedisch.
Merk op dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : n(-1, 0) = (-n, 0) \leq (1, 1)$, maar $(-1, 0) \not\leq (0, 0)$. Dus X is niet integraal gesloten.

Het is handiger om alleen met het infimum of supremum te werken.

Propositie 1.1.13. *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. *X is een dedekind complete rieszruimte,*
2. *voor alle naar boven begrensde verzamelingen $A \subset X$ bestaat* $\sup A$,
3. *voor alle naar onder begrensde verzamelingen $A \subset X$ bestaat* $\inf A$.

Bewijs. (1)⇒(2): Stel X is dedekind compleet. Stel $A \subset X$ is naar boven begrensd. Zij $l \in A$ en laat $A' = \{x \in A : l \leq x\}$. Dan is A begrensd. Merk op dat $\sup A'$ bestaat en een bovengrens is van A. Stel $h \geq A$, dan is $h \geq A'$, dus $h \geq \sup A'$. Dus het supremum van A bestaat en is gelijk aan $\sup A'$.
(2)⇒(1): Stel $A \subset X$ is begrensd. Dan zijn A en $-A$ naar boven begrensd, dus $\sup A$ en $\inf A = -\sup(-A)$ bestaan. Dus X is dedekind compleet.
(2)⇔(3): Merk op dat $A \subset X$ is naar boven begrensd dan en slechts dan als $-A$ naar onder begrensd is. Bovendien is $\sup A = -\inf(-A)$.

□

Propositie 1.1.14. *Zij X een geordende vectorruimte. Dan zijn equivalent:*

1. *X is integraal gesloten.*
2. *$\forall x \in X^+ : 0 = \inf\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$.*[3]

Bewijs. Stel X is integraal gesloten. Laat $x \in X^+$. Dan is 0 een ondergrens van $\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Stel $h \leq \{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Dan is voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : h \leq \frac{x}{n}$, dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nh \leq x$, dus $h \leq 0$. Dus $0 = \inf\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$.
Stel X heeft de eigenschap dat voor alle $x \in X^+ : 0 = \inf\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Stel $x, y \in X$ zo dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nx \leq y$. Dan is $y \in X^+$ en geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : x \leq \frac{y}{n}$. Stel $x \nleq 0$, dan is 0 niet het infimum van $\{\frac{y}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Tegenspraak.

□

Propositie 1.1.15. *Stel X is een dedekind complete rieszruimte, dan is X integraal gesloten.*

Bewijs. Zij $x \in X^+$. Merk op dat $0 \leq \{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Vanwege het feit dat X dedekind compleet is bestaat $i := \inf\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Stel $i = 0$, dan zijn we klaar vanwege propositie 1.1.14. Stel $i \neq 0$, dan is $0 < i$. Dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : i \leq \frac{x}{n}$, dus $ni \leq x$. Dus $\{ni : n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \leq x$. X is dedekind compleet dus $s := \sup\{ni : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ bestaat. Dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : ni \leq s$, dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : (n+1)i \leq s$, dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : ni \leq s - i$. s is het supremum van $\{ni : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$, dus $s \leq s - i$, dus $i \leq 0$. Tegenspraak.

□

We zagen reeds dat een vectorruimteordening op een reële ruimte X geheel vast ligt door de keuze van de kegel K. Alle informatie ligt dus verborgen in de kegel. Het volgende pareltje verteld ons of (X, K) integraal gesloten is aan de hand van de meetkundige eigenschappen van K.

Stelling 1.1.16. *Zij X een geordende vectorruimte. Dan is X integraal gesloten dan en slechts dan als iedere doorsnijding van X^+ met een tweedimensionale deelruimte $W \subset X$ gesloten is.*

Bewijs. Stel X is niet integraal gesloten. Dus er zijn $x, y \in X$ zodat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nx \leq y$, maar $x \nleq 0$. Voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ is dus $y - nx \in X^+$, dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ is $\frac{y}{n} - x \in X^+$. Dus $(\frac{y}{n} - x)_{n=1}^{\infty}$ is een rij in $X^+ \cap \mathrm{span}\{x, y\}$

[3] Als X een rieszruimte is, dan is dit de definitie van een archimedische rieszruimte in [2].

die convergeert naar $-x$. Echter $-x \notin X^+ \cap \operatorname{span}\{x, y\}$, want stel wel, dan is $0 \leq -x$, dus $x \leq 0$, tegenspraak. Dus $X^+ \cap \operatorname{span}\{x, y\}$ is niet gesloten.
Stel er is een 2-dimensionale deelruimte $W \subset X$ zodat $K := W \cap X^+$ niet gesloten is. Dus er is een $x_1 \in \operatorname{int} K$. Laat $x_2 \in \overline{K} \backslash K$. We claimen dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : x_1 + nx_2 = x_1 - n(-x_2) \in K$. Dus $x_1 - n(-x_2) \geq 0$. Dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : n(-x_2) \leq x_1$. Stel $-x_2 \leq 0$, dan is $0 \leq x_2$. Tegenspraak. Dus X is niet integraal gesloten.
Bewijs claim: Merk op dat K een tweedimensionale kegel is. Merk op dat $R := \overline{K} \backslash K$ uit 1 of 2 lijnstukken bestaat. Merk op dat het lijnstuk $\{x_1 + rx_2 : r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ parallel loopt aan het lijnstuk uit R dat x_2 bevat. K is convex, dus $\{x_1 + rx_2 : r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset K$. Dit bewijst de claim. □

1.2 Ordedichtheid

In de theorie van banachruimten blijkt de notie van 'dichtheid' of 'normdichtheid', ontzettend handig te zijn. Het idee is dat je ieder element van X kan benaderen via een rij in een kleinere en dus eenvoudiger deelruimte $D \subset X$. In de theorie van geordende vectorruimten hebben we een vergelijkbaar begrip -ordedichtheid- wat een grote rol gaat spelen in deze scriptie. Het is welbekend dat als $X \subset Y$ normdicht en $Y \subset Z$ normdicht, dan is $X \subset Z$ normdicht. Voor ordedichtheid was tot nu toe geen bewijs bekend, die wordt hier gegeven.

Definitie 1.2.1. Stel X is een geordende vectorruimte en $D \subset X$ een deelruimte. Dan ligt D ordedicht in X als voor alle $x \in X : x = \inf_X\{d \in D : x \leq d\}$ en $x = \sup_X\{d \in D : d \leq x\}$.[4]

De volgende propositie zegt dat het voldoende is om alleen het infimum of supremum te controleren.

Propositie 1.2.2. *Laat $D \subset X$ een deelruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. *$D \subset X$ ligt ordedicht,*
2. *voor alle $x \in X : x = \inf_X\{d \in D : x \leq d\}$,*
3. *voor alle $x \in X : x = \sup_X\{d \in D : d \leq x\}$.*

[4]Deze definitie van ordedicht is niet equivalent met de definitie die gegeven wordt in [2], pagina 29

Bewijs. (1)⇒(2) en (1)⇒(3) volgen direct uit de definitie.
(2)⇒(1): Stel voor alle $x \in X : x = \inf_X\{d \in D : x \leq d\}$. Zij $x \in X$. Stel $d \in \{d \in D : d \leq x\}$, dan is $d \leq x$, dus $-x \leq -d$. Dus $-d \in \{d \in D : -x \leq d\}$. Stel $d \in \{d \in D : -x \leq d\}$, dan is $-x \leq d$, dus $-d \leq x$, dus $-d \in \{d \in D : d \leq x\}$. Dus $\{d \in D : d \leq x\} = -\{d \in D : -x \leq d\}$. Dus $\sup_X\{d \in D : d \leq x\} = -\inf_X\{d \in D : -x \leq d\} = - - x = x$. Dus $D \subset X$ ordedicht.
(3)⇒(1) Stel voor alle $x \in X : x = \sup_X\{d \in D : d \leq x\}$. Zij $x \in X$. Er geldt $\inf_X\{d \in D : x \leq d\} = -\sup_X\{d \in D : d \leq -x\} = - - x = x$. Dus $D \subset X$ ordedicht.

□

Lemma 1.2.3. *Stel $D \subset X$ ordedicht. Dan gelden de volgende uitspraken:*

1. *als X integraal gesloten is, dan is D integraal gesloten.*
2. *als X archimedisch is, dan is D archimedisch.*
3. *als X gericht is dan is D gericht.*

Bewijs. Merk voor de eerste 2 beweringen op dat $D \subset X$. Stel X is gericht en $x, y \in D$, dan is er een $h \in X$ met $x \leq h$ en $y \leq h$. Omdat $D \subset X$ ordedicht, is $\{d \in D : h \leq d\} \neq \emptyset$. Laat $h_0 \in \{d \in D : h \leq d\}$. Dan is $x \leq h_0$ en $y \leq h_0$. Dus D is gericht.

□

We gaan nu bewijzen dat als $X \subset Y$ ordedicht en $Y \subset Z$ ordedicht, dan ligt $X \subset Z$ ordedicht. Voor we dat doen moeten we eerst drie lemma's bewijzen:

Lemma 1.2.4. *Stel $D \subset X$ ordedicht en $x, x' \in X$ zodat $x' \not\leq x$. Dan is er een $d \in D$ met $x \leq d$ en $x' \not\leq d$.*

Bewijs. Stel er is geen $d \in D$ met $x \leq d$ en $x' \not\leq d$. Dus voor alle $d \in D$ met $x \leq d$ is $x' \leq d$, dus $\{d \in D : x \leq d\} \subset \{d \in D : x' \leq d\}$. Vanwege het feit dat $D \subset X$ ordedicht is $x' = \inf_X\{d \in D : x' \leq d\} \leq \inf_X\{d \in D : x \leq d\} = x$. Tegenspraak.

□

Lemma 1.2.5. *Stel $D \subset X$ ordedicht en $S \subset D$ is een deelverzameling. Stel s is het infimum van S in D. Dan bestaat het infimum van S in X en is gelijk aan s.*

Bewijs. Merk op dat $s \leq S$. Stel $t \leq X$ en $t \leq S$. Stel $d \in D : d \leq S$, dan is $d \leq s$. Dus als $d \in D, d \leq t$, dan is $d \leq S$, dus $d \leq s$. Dus vanwege het feit dat $D \subset X$ ordedicht ligt, is $t = \sup_X\{d \in D : d \leq t\} \leq \sup_X\{d \in D : d \leq s\} = s$. Dus $s = \inf_X S$.

□

Lemma 1.2.6. *Stel $X \subset Y$ ordedicht en $Y \subset Z$ ordedicht, dan is er voor elke $z \in Z$ een $x \in X$ zodat $z \leq x$.*

Bewijs. Zij $z \in Z$.
Vanwege het feit dat $Y \subset Z$ ordedicht, is $z = \inf_Z\{y \in Y : z \leq y\}$. Dus in het bijzonder is $\{y \in Y : z \leq y\} \neq \emptyset$. Zij $y_0 \in \{y \in Y : z \leq y\}$. Analoog is er een $x_0 \in \{x \in X : y_0 \leq x\}$, dus $z \leq y_0 \leq x_0$.

□

Stelling 1.2.7. *Stel $X \subset Y$ ordedicht en $Y \subset Z$ ordedicht, dan $X \subset Z$ ordedicht.*

Bewijs. Stel $X \subset Z$ niet ordedicht. Dan is er een $z \in Z$ zodat z niet het infimum is van $\{x \in X : z \leq x\}$. Vanwege lemma 1.2.6 is $\{x \in X : z \leq x\} \neq \emptyset$. Merk op dat $z \leq \{x \in X : z \leq x\}$, dus er is een $z' \in Z$ met $z' \leq \{x \in X : z \leq x\}$, maar $z' \not\leq z$. Vanwege lemma 1.2.4 bestaat er een $y \in Y$ zodat $z \leq y$ en $z' \not\leq y$. Vanwege het feit dat $X \subset Y$ ordedicht, $Y \subset Z$ ordedicht en lemma 1.2.5 geldt $y = \inf_Y\{x \in X : y \leq x\} = \inf_Z\{x \in X : y \leq x\}$. Stel $x \in X, x \geq y$ dan is $x \geq z$, dus $x \geq z'$. Dus $y \geq z'$. Tegenspraak.

□

1.3 Dedekind completering

Veel geordende vectorruimten, die men tegenkomt in de literatuur zijn archimedische rieszruimten, maar de meeste daarvan zijn niet dedekind compleet. Om toch een supremum van 2 operators te hebben kan het soms handig zijn om de ruimte dedekind compleet te 'maken', zodat de stelling van Riesz-Kantorovič (stelling 2.1.5) kan worden toegepast.

Definitie 1.3.1. Zij X een geordende vectorruimte, dan is X dedekind-completeerbaar als er een dedekind complete rieszruimte X^δ bestaat en een bipositieve lineaire afbeelding $\iota : X \to X^\delta$ bestaat zodat $\iota(X)$ ordedicht in X^δ ligt. We zeggen dat (X^δ, ι) een dedekind completering van X is.

Dedekind completeringen blijken in een bepaalde zin uniek te zijn.

Stelling 1.3.2. *Zij X een geordende vectorruimte. De dedekindcompletering van X bestaat dan en slechts dan als X integraal gesloten en gericht is. Twee dedekindcompleteringen zijn orde-isomorf.*

Bewijs. Stel een dedekindcompletering (Y, ι) van X bestaat. Merk op dat Y integraal gesloten en gericht is, dus vanwege lemma 1.2.3 is $\iota(X)$, en dus ook X integraal gesloten en gericht.
Andersom, stel X is integraal gesloten en gericht[5]. Laat (X^δ, φ_X) zoals in Van Haandel [6], paragraaf 4.1, pagina 16, dan is vanwege [6], lemma 4.3 X^δ een geordende vectorruimte en vanwege [6], opmerking 4.2 ligt $\varphi_X(X)$ ordedicht in X^δ. Vanwege [6], opmerking 4.2 is X^δ dedekind compleet, verder is φ_X een bipositieve lineaire afbeelding, vanwege een opmerking gemaakt in het bewijs van [6], stelling 4.5, pagina 21. Dus (X^δ, φ_X) is een dedekind completering van X. Stel (Y, ι) is een andere dedekind completering van X. Dan is Y^δ orde-isomorf met Y, want φ_Y is dan surjectief, want stel $A \in Y^\delta$ dan is $\sup A \in A$ en $\varphi_Y(\sup A) = A$. Vanwege [6], stelling 4.14 zijn X^δ en Y^δ orde-isomorf, via het aldaar gedefinieerde orde-isomorfisme $\tau : X^\delta \to Y^\delta, \tau(A) \mapsto \iota^{-1}(A)$. Dus Y en X^δ zijn orde-isomorf, via het orde-isomorfisme $\phi_Y^{-1} \circ \tau : X^\delta \to Y$.

□

Opmerking 1.3.3.

1. Lemma 1.3.2 rechtvaardigt het om te spreken over *de* dedekind completering.
2. Meestal wordt X via de inbedding ι als een deelverzameling van X^δ beschouwd. Wij zullen dat in het vervolg ook doen.

Stelling 1.3.4. *Stel $D \subset X$ ordedicht en X is integraal gesloten en gericht, en (X^δ, ι) de dedekind completering van X, dan is $(X^\delta, \iota|_D)$ de dedekind completering van D.*

Bewijs. Merk op dat $\iota(D) \subset \iota(X)$ ordedicht en $\iota(X) \subset X^\delta$ ordedicht, dus vanwege stelling 1.2.7 ligt $\iota(D) \subset X^\delta$ ordedicht. Dus $(X^\delta, \iota|_D)$ is de dedekind completering van D.

□

Voorbeeld 1.3.5. Beschouw c, de ruimte van convergerende reële rijen. Laat $(x_n)_{n=1}^\infty$ een rij in c met

$$x_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{als } m \text{ oneven en } m \le n, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases} \tag{1.3.1}$$

[5] Een voldoende voorwaarde, volgens [6], stelling 1.7 om 'pre-riesz' te zijn.

Merk op dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : x_n \leq (1) \in c$. Stel $x_0 = \sup_c\{x_n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ bestaat. Dan is voor alle oneven $m : x_{0,m} \geq 1$ en voor alle even $m : x_{0,m} \geq 0$. Stel voor zekere oneven $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ is $x_{0,m} = 1 + \epsilon, \epsilon > 0$ dan is y gedefinieerd door $y_k = x_{0,k}$, als $k \neq m$ en $y_m = 1$ ook een convergerende rij, dus $y \in c$ en geldt $\{x_n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \leq y < x_0$. Tegenspraak. Net zo is voor iedere even $m : x_{0,m} = 0$. Dus x_0 convergeert niet. Tegenspraak. Dus c is niet dedekind compleet.
Beschouw nu ℓ^∞. Stel $A \subset \ell^\infty$ is naar boven begrensd door g. Laat voor $n \in \mathbb{Z}_{>0} : A_n = \{a_n : (a_i)_{i=1}^\infty \in A\}$. Dan is $A_n \subset \mathbb{R}$ naar boven begrensd door g_n, dus $\sup A_n$ bestaat, want $\mathbb{R}$ is dedekind compleet. Dus $(\sup A_i)_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$ is een bovengrens van A en stel $A \leq h$ dan is $\sup A_n \leq h_n$, dus $(\sup A_i)_{i=1}^\infty$ is het supremum van A. Dus ℓ^∞ is dedekind compleet. Stel $x \in \ell^\infty$. Dan is er per definitie een $N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zodat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : |x_n| \leq N$. Laat voor $n \in \mathbb{Z}_{>0} : d_n \in c$ gedefinieerd zijn door

$$d_{n,m} = \begin{cases} x_{n,m}, & \text{als } m \leq n, \\ -N, & \text{als } m > n. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Dan is voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : d_n \leq d_{n+1} \leq x$ en $\sup_{\ell^\infty}\{d_n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = x$. Dus $c \subset \ell^\infty$ ordedicht. Dus ℓ^∞ is de dedekind completering van c.

1.4 Productruimten

In deze sectie behandelen we productruimten van geordende vectorruimten. De structuur van de productruimte wordt eenduidig vastgelegd door de vectorruimten waar de productruimte het product van is. Op deze manier kan een grote ruimte gesplitst worden in eenvoudiger ruimten en kan op die manier de eigenschappen van de grote ruimte bepaald worden.

Propositie 1.4.1. *Stel $\mathbb{I}$ is een niet-lege indexverzameling en voor alle $i \in \mathbb{I}$ is X_i een geordende vectorruimte. Dan is $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ een geordende vectorruimte met de standaardordening $(x_i, i \in \mathbb{I}) \leq (y_i, i \in \mathbb{I})$ dan en slechts dan als voor alle $i \in \mathbb{I} : x_i \leq y_i$.*

Bewijs. Merk op dat $\left(\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i^+\right)$ een kegel is.

$\square$

Lemma 1.4.2. *Stel $\mathbb{I}$ is een niet-lege indexverzameling en voor alle $i \in \mathbb{I}$ is X_i een geordende vectorruimte. Stel voor alle $i \in \mathbb{I}$ is D_i een ordedichte deelruimte van X_i. Dan ligt $\prod_{i\in\mathbb{I}} D_i$ ordedicht in $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$.*

Bewijs. Zij $x = (x_i : i \in \mathbb{I}) \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$. Laat $B_i = \{d \in D_i : x_i \leq d\}$. Dan is $\{d \in \prod_{i\in\mathbb{I}} D_i : x \leq d\} = \prod_{i\in\mathbb{I}} B_i$. Voor $y \leq \prod_{i\in\mathbb{I}} B_i$ geldt voor alle $i \in \mathbb{I} : y_i \leq x_i$. Dus $x = \inf \prod_{i\in\mathbb{I}} B_i$.

□

Stelling 1.4.3. *Laat $\mathbb{I}$ een niet-lege indexverzameling zijn en voor alle $i \in \mathbb{I}$: X_i een geordende vectorruimte. Dan is*

1. *$\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ integraal gesloten dan en slechts dan als voor alle $i \in \mathbb{I}$: X_i integraal gesloten is,*
2. *$\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ een rieszruimte dan en slechts dan als voor alle $i \in \mathbb{I}$: X_i een rieszruimte is,*
3. *$\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ een dedekind complete rieszruimte dan en slechts dan als voor alle $i \in \mathbb{I}$: X_i dedekind compleet is.*

Bewijs.

1. Stel voor alle $i \in \mathbb{I}$ is X_i integraal gesloten. Stel $x, y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ zodat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nx \leq y$. Dan is voor alle $i \in \mathbb{I}$ en voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nx_i \leq y_i$, dus $x_i \leq 0$, dus $x \leq 0$. Dus $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ is integraal gesloten.
   Stel andersom dat $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ integraal gesloten is. Zij $j \in \mathbb{I}$. Stel $x, y \in X_j$ zodat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : nx \leq y$. Laat $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ gedefinieerd zijn door
   $$\begin{cases} \widetilde{x}_i = \widetilde{y}_i = 0 & \text{als } i \neq j, \\ \widetilde{x}_i = x \text{ respectievelijk } \widetilde{y}_i = y & \text{als } i = j. \end{cases} \tag{1.4.1}$$
   Dan is voor alle $n \in \mathbb{Z} : n\widetilde{x} \leq \widetilde{y}$, dus $\widetilde{x} \leq 0$, dus $x \leq 0$, dus X_j is archimedisch.
2. Stel voor alle $i \in \mathbb{I}$ is X_i een rieszruimte. Stel $x, y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$. Laat $s = (x_i \vee y_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Dan is $s \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ en $x, y \leq s$. Stel $h \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ zodat $x, y \leq h$. Dan is voor alle $i \in \mathbb{I} : x_i \vee y_i \leq s_i \leq h_i$, dus $s \leq h$. Dus $s = \sup\{x, y\}$, dus $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ is een rieszruimte. Stel andersom dat $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ een rieszruimte is. Zij $j \in \mathbb{I}$. Stel $x, y \in X_j$. Definieer $\widetilde{x}$ en $\widetilde{y}$ zoals in vergelijking 1.4.1 en laat $s = \sup\{\widetilde{x}, \widetilde{y}\}$. Dan is s_j een bovengrens van x en y. Stel $h \in X_j$ zo dat $x, y \leq h$, dan is $\widetilde{h}$ analoog gedefinieerd als in (1.4.1) een bovengrens van $\widetilde{x}$ en $\widetilde{y}$. Dus $s_j \leq h$. Dus $s_j = \sup\{x, y\}$, dus X_j is een rieszruimte.

3. Stel voor alle $i \in \mathbb{I}$ is X_i een dedekind complete rieszruimte. Zij $A \subset \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ een begrensde verzameling. Dus er zijn $f, g \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ zodat $f \le A \le g$. Laat voor $i \in \mathbb{I} : A_i := \{x_i : (x_j)_{j\in\mathbb{I}} \in A\}$. Dan is voor alle $i \in \mathbb{I} : f_i \le A_i \le g_i$. Omdat X_i dedekind compleet is, bestaat $\inf A_i$ en $\sup A_i$. Laat $I = (\inf A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ en $S = (\sup A_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Dan is $I \le A \le S$. Stel $a, b \in X$ zodat $a \le A \le b$, dan is voor alle $i \in \mathbb{I} : a_i \le \inf A_i$ en $\sup B_i \le b$, dus $a \le I$ en $S \le b$. Dus I is het infimum van A en S is het supremum van A. Dus $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ is dedekind compleet.
   Stel andersom dat $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ dedekind compleet is. Zij $j \in \mathbb{I}$. Stel $A \subset X_j$ begrensd, dus er zijn $f, g \in X_j$ zodat $f \le A \le g$. Laat voor $a \in A$, f en g respectievelijk $\widetilde{a}, \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ gedefinieerd zijn analoog zoals in vergelijking 1.4.1. Laat $\widetilde{A} = \{\widetilde{a} : a \in A\}$. Dan is $\widetilde{A}$ begrensd, $\widetilde{f} \le \widetilde{A} \le \widetilde{g}$. Omdat $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ dedekind compleet is, bestaat $I = \inf \widetilde{A}$ en $S = \sup \widetilde{A}$. Laat $i = I_j$ en $s = S_j$. Dan is i een ondergrens voor A en s een bovengrens voor A. Stel $a, b \in X$ zodat $l \le A \le h$. Laat $\widetilde{l}, \widetilde{h} \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ analoog als in (1.4.1), dan is $\widetilde{a} \le \widetilde{A} \le \widetilde{b}$, dus $a_j \le S_j = s$ en $I_j = i \le b$, dus $i = \inf A$ en $s = \sup A$. Dus X_j is dedekind compleet.

$\square$

Gevolg 1.4.4. *Stel $\mathbb{I}$ is een niet-lege indexverzameling en voor alle $i \in \mathbb{I}$ is X_i integraal gesloten en gericht. Dan is $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i^\delta$ de dedekind completering van $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$.*

Voorbeeld 1.4.5. Laat $X^{\mathbb{I}}$ de ruimte van functies van $\mathbb{I}$ naar X. Merk op dat $\psi : \prod_{i\in\mathbb{I}} X \to X^{\mathbb{I}}$ gedefinieerd door $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \mapsto (i \mapsto x_i)$ een orde-isomorfisme is. Verder is $\mathbb{R}$ een dedekind complete rieszruimte. Dus vanwege stelling 1.4.3 geldt voor iedere niet-lege verzameling S : $\mathbb{R}^S$, de ruimte van reëelwaardige functies op S, is een dedekind complete rieszruimte.

2 Ruimten van operatoren

Zoals in de inleiding reeds gezegd is geldt in alle bekende gevallen voor $S, T \in L_r(X, Y)$, waarvoor $S \vee T$ bestaat, de formule van Riesz-Kantorovič. Het is echter niet bewezen dat deze formule algemeen geldig is. In dit hoofdstuk wordt een voldoende, doch niet gemakkelijk te bepalen, voorwaarde voor $L_r(X, Y)$ gegeven zodat de formule van Riesz-Kantorovič geldt voor deze ruimte. Voor een specifieke klasse van geordende vectorruimten, $X = c_{00}(\mathbb{I})$ en Y gericht en integraal gesloten, wordt deze voorwaarde bewezen. Tevens wordt een karakterisering van deze ruimte gegeven.

2.1 Positieve operators

In deze sectie behandelen we lineaire afbeeldingen en ruimten van lineaire afbeeldingen tussen geordende vectorruimten en enkele klassieke voorbeelden.

Definitie 2.1.1. Zij X, Y geordende vectorruimten.

1. Een lineaire afbeelding $T : X \to Y$ heet positief als $T(X^+) \subset Y^+$, notatie $0 \leq T$ of $T \geq 0$.
2. Een lineaire afbeelding $R : X \to Y$ heet regulier als er positieve lineaire afbeeldingen $S, T : X \to Y$ bestaan zodat $R = S - T$. Laat $L_r(X, Y)$ de verzameling van alle reguliere lineaire afbeeldingen zijn.
3. Een lineaire afbeelding $T : X \to Y$ heet bipositief als $x \in X^+$ equivalent is met $Tx \in Y^+$.
4. Een bipositieve lineaire afbeelding $T : X \to Y$ heet een orde-isomorfisme als T surjectief is.

Propositie 2.1.2. *Een bipositieve lineaire afbeelding $T : X \to Y$ is injectief.*

Bewijs. Merk op dat $\ker T \subset X^+$. Merk op dat $-\ker T = \ker T$, dus $\ker T \subset X^+ \cap (-X^+) = \{0\}$. Dus T is injectief.

□

Propositie 2.1.3. *Stel X, Y zijn geordende vectorruimten. Dan is $L_r(X, Y)$ een vectorruimte. Als bovendien X gericht is, dan is $L_r(X, Y)$ een geordende vectorruimte met $S \leq T$ als $T - S$ positief is en kegel $K = \{T \in L_r(X, Y) : 0 \leq T\}$.*

Bewijs. Merk op dat $L_r(X,Y) \subset L(X,Y)$. Stel $R_1, R_2 \in L_r(X,Y)$. Dan zijn er positieve operators S_1, S_2, T_1, T_2 zodat $R_1 = S_1 - T_1$ en $R_2 = S_2 - T_2$. Dus $R_1 + R_2 = (S_1 + S_2) - (T_1 + T_2)$. Dus $R_1 + R_2 \in L_r(X,Y)$. Stel $\lambda \geq 0$. Dan is $\lambda R_1 = \lambda S_1 - \lambda T_1$. Dus $\lambda R_1 \in L_r(X,Y)$. Stel $\lambda < 0$. Dan is $\lambda R_1 = -\lambda T_1 + \lambda S_1$, dus $\lambda R_1 \in L_r(X,Y)$. Dus $L_r(X,Y)$ is een vectorruimte.
Veronderstel nu dat X gericht is. Beschouw $K := \{T \in L_r(X,Y) : 0 \leq T\}$. Merk op dat K gesloten is onder optelling en vermenigvuldiging met een niet-negatieve scalair. Merk op dat $0 \in K \cap (-K)$. Stel $T \in K \cap (-K)$. Dan geldt voor alle $x \in X^+ : Tx \geq 0$ en $-Tx \geq 0$. Dus $Tx = 0$. Stel $x \in X$, dan zijn er $y, z \in X^+$ zodat $x = y - z$, dus $Tx = Ty - Tz = 0$. Dus $T = 0$. Dus K is een kegel en definieert een ordening op $L_r(X,Y)$ door $S \leq T$ dan en slecht dan als $T - S$ positief is.

□

Het voorbeeld van Lotz [2], voorbeeld 1.11 maakt duidelijk dat zelfs als X en Y archimedische rieszruimten zijn, dan hoeft de ruimte van alle lineaire afbeeldingen van X naar Y, $L(X,Y)$ niet gericht te zijn. Omdat dergelijke ruimten niet interessant zijn voor een analyse, beschouwen we enkel de deelruimte voortgebracht door de positieve kegel, en maken de ruimte dus regulier. Maar ook dan kan de analyse lastig zijn, omdat $L_r(X,Y)$ in het algemeen minder mooi is dan de ruimten X en Y. Het volgende voorbeeld van Kaplan, ontleend aan Aliprantis & Burkinshaw [2], voorbeeld 1.12, maakt dat duidelijk.

Voorbeeld 2.1.4 (Kaplan)**.** *Geordende vectorruimten X en Y zodat X en Y rieszruimten zijn, maar $L_r(X,Y)$ niet.*

Laat c de rieszruimte van alle convergerende reële rijen. Beschouw de volgende positieve lineaire afbeeldingen $S, T : c \to c$ gedefinieerd door

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, \ldots)$$

en

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_1, x_3, x_3, \ldots)$$

en laat $R := S - T$, een reguliere operator, $R(x_1, x_2, \ldots) = (x_2 - x_1, 0, x_4 - x_3, 0, x_6 - x_5, \ldots)$. We claimen dat de modulus van $R : |R| = R \vee -R$ niet bestaat. Stel namelijk dat die wel bestaat. Definieer de projectie $P_n : c \to c$ door $P(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}, \ldots)$. Merk op dat $P_n \geq 0$, $\pm R = \pm R P_{2n}$ en $|R| P_{2n} \leq |R|$. Dus $\pm R \leq |R| P_{2n} \leq |R|$. Dus $|R| = |R| P_{2n}$. Dus voor iedere $x \in c$ is ieder even component van $|R|x$ gelijk aan 0. Laat $e = (1, 1, \ldots)$ de constante rij 1 zijn, en n oneven, dan volgt uit de volgende ongelijkheden: $e_n = -Re_n \leq |R|e_n \leq |R|e$ dat de oneven componenten van $|R|e$ groter dan 1 zijn. Dus $|R|e$ convergeert niet. Tegenspraak.

De volgende beroemde en klassieke stelling van F. Riesz werd in 1928 gepubliceerd voor het geval $Y = \mathbb{R}$ en is eind jaren '30 van de 20^e eeuw door L.V. Kantorovič uitgebreid voor het geval dat Y dedekind compleet is.[6]

Stelling 2.1.5 (Riesz-Kantorovič)**.** *Stel X is een archimedische rieszruimte, en Y is een dedekind complete rieszruimte. Dan is $L_r(X, Y)$ een dedekind complete rieszruimte en voor alle $S, T \in L_r(X, Y)$ en voor alle $x \in X^+$ geldt:*

$$(S \vee T)(x) = \sup\{Sy + Tz : y, z \in X^+, x = y + z\}, \tag{2.1.1}$$
$$(S \wedge T)(x) = \inf\{Sy + Tz : y, z \in X^+, x = y + z\}. \tag{2.1.2}$$

Bewijs. Zie Aliprantis & Burkinshaw [2], stelling 1.13.

□

Opmerking 2.1.6. Vergelijking 2.1.1 wordt de formule van
Riesz-Kantorovič genoemd.

2.2 Niet-gerichte codomeinen

In deze sectie behandelen we codomeinen die niet noodzakelijkerwijs gericht zijn.

Lemma 2.2.1. *Stel X en Y zijn geordende vectorruimten en X gericht. Stel $T : X^+ \to Y^+$ heeft de volgende eigenschappen:*

1. $\forall x, y \in X : T(x + y) = Tx + Ty$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall x \in X : T(\lambda x) = \lambda Tx$.

Dan is T uniek uit te breiden tot een positieve lineaire afbeelding $T : X \to Y$ en $T(X) \subset spanY^+$.

Bewijs. Stel $S : X \to Y$ is een uitbreiding van T. Dan is S positief. Voor alle $x \in X$ zijn er $y, z \in X^+$ zodat $x = y - z$, dus $Sx = Sy - Sz = Ty - Tz$, dus als de uitbreiding bestaat dan is zij uniek en geldt er $T(X) \subset \text{span}Y^+$. Merk op dat voor $x \in X$ met $x = a - b = c - d$ met $a, b, c, d \in X^+$ dat

[6] Voor meer historische details over de theorie van rieszruimten zie [2], Historical Foreword en [1], Foreword

$a + d = b + c$ dus $Ta + Td = Tb + Tc$, dus $Ta - Tb = Tc - Td$. Dus T gedefinieerd door $Tx = Ta - Tb$ is welgedefinieerd.
Stel $x, y \in X$ en $x = a - b, y = c - d$ en $a, b, c, d \in X^+$ dan is $T(x + y) = T(a-b+c-d) = T(a+c)-T(b+d) = Ta+Tc-Tb-Td = Ta-Tb+Tc-Td = Tx + Ty$.
Stel $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ dan is $T(\lambda x) = T(\lambda a - \lambda b) = T(\lambda a) - T(\lambda b) = \lambda Ta - \lambda Tb = \lambda(Ta - Tb) = \lambda Tx$.
Stel $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ dan is $T(\lambda x) = T(|\lambda|b - |\lambda|a) = T(|\lambda|b) - T(|\lambda|a) = |\lambda|Tb - |\lambda|Ta = |\lambda|(Tb - Ta) = |\lambda| \cdot -Tx = \lambda Tx$. Dus T is lineair. Dus er bestaat een uitbreiding.

□

Stelling 2.2.2. *Stel X is een gerichte geordende vectorruimte en stel $K \subset Y \subset Z$ waarbij Y en Z geordende vectorruimten zijn en $K = Y^+ = Z^+$. Dan is $L_r(X, Y) = L_r(X, Z)$.*

Bewijs. Vanwege lemma 2.2.1 is $L_r(X, Y)^+ = L_r(X, Z)^+$. Dus $L_r(X, Y) = L_r(X, Z)$.

□

Voorbeeld 2.2.3. Laat X een willekeurige gerichte geordende vectorruimtezijn en P_2 en P_3 de ruimte van tweede- respectievelijk derdegraads polynomen zijn, met $p \leq q \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : p(x) \leq q(x)$. Dan is $P_2^+ = P_3^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{ax^2 + bx + c : b^2 - 4ac \leq 0, c \geq 0\}$. Dus vanwege stelling 2.2.2 is $L_r(X, P_2) = L_r(X, P_3)$.

2.3 De formule van Riesz-Kantorovič

In deze sectie geven we een voldoende voorwaarde op $L_r(X, Y)$, zodat de formule van Riesz-Kantorovič voor $L_r(X, Y)$ geldt. Het blijkt voldoende dat $L_r(X, Y) \subset L_r(X, Y^\delta)$ ordedicht ligt.

Opmerking 2.3.1. Stel Z is een geordende vectorruimte, $Y \subset Z$ een deelruimte en $T : X \to Y$ een lineaire afbeelding, dan zullen wij in het vervolg T identificeren met de lineaire afbeelding $S : X \to Z$ gedefinieerd door $Sx = Tx$. Dus $L_r(X, Y) \subset L_r(X, Z)$.

Stelling 2.3.2. *Stel X en Y zijn integraal gesloten geordende vectorruimten, zodanig dat X een rieszruimte is en Y gericht. Stel $R_1, R_2 \in L_r(X, Y)$. Stel $S \in L_r(X, Y^\delta)$ is het supremum van R_1 en R_2 binnen $L_r(X, Y^\delta)$ en $S \in L_r(X, Y)$, i.e. $S(X) \subset Y$ dan is S het supremum van R_1 en R_2 binnen*

$L_r(X,Y)$. In het bijzonder geldt voor alle $x \in X^+$ de formule van Riesz-Kantorovič:

$$Sx = \sup\{R_1 y + R_2 z : y, z \in X^+, x = y + z\}. \tag{2.3.1}$$

Bewijs. Merk op dat

$$\{T \in L_r(X,Y) : R_1 \leq T, R_2 \leq T\} \subset \{T \in L_r(X,Y^\delta) : R_1 \leq T, R_2 \leq T\}.$$

□

Het volgende lemma hebben we in de vorige sectie algemener bewezen, maar voor het gemak herhalen we het nog een keer.

Lemma 2.3.3. *Stel X is een geordende vectorruimte en $D \subset X$ een deelruimte die ordedicht ligt in X. Stel $x, y \in D$ en s is het supremum van x en y binnen D. Dan hebben x en y binnen X ook een supremum, namelijk s.*

Bewijs. Neem $S = \{x, y\}$ in lemma 1.2.5.

□

Een onmiddelijk gevolg van lemma 2.3.3 en stelling 2.1.5 is de volgende stelling:

Stelling 2.3.4. *Stel X en Y zijn integraal gesloten geordende vectorruimten, zodanig dat X een rieszruimte is en Y gericht. Stel bovendien dat $L_r(X,Y)$ ordedicht ligt in $L_r(X,Y^\delta)$. Stel $R_1, R_2 \in L_r(X,Y)$ en S is het supremum van R_1 en R_2 binnen $L_r(X,Y)$. Dan geldt voor alle $x \in X^+$ de formule van Riesz-Kantorovič:*

$$Sx = \inf\{R_1 y + R_2 z : y, z \in X^+, x = y + z\}. \tag{2.3.2}$$

2.4 De ruimte $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$

In deze sectie karakteriseren we de ruimte $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ met Y gericht. Als Y bovendien integraal gesloten is, dan blijkt $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y) \subset L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y^\delta)$ ordedicht en geldt de formule van Riesz-Kantorovič voor $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$.

Notatie 2.4.1. Merk op dat een lineaire afbeelding vastgelegd wordt door zijn waarden op een basis $\{b_i : i \in \mathbb{I}\}$. Een lineaire afbeelding kan dus genoteerd worden met $T = (b_i \mapsto Tb_i : i \in \mathbb{I})$.

Iedere gerichte ruimte wordt per definitie voortgebracht door zijn positieve kegel. Sommige gerichte ruimten, zoals $\mathbb{R}^n$ hebben de bijzondere eigenschap dat zij een basis bestaande uit positieve elementen hebben en ieder positief element te schrijven is als een positieve som van basiselementen. Deze ruimten gaan we nu bestuderen.

Laat $\mathbb{I}$ een indexverzameling en $c_{00}(\mathbb{I})$ de geordende vectorruimtevan rijen (of functies) $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \subset \mathbb{R}$ zijn zodat voor *eindig* veel $i \in \mathbb{I} : x_i \neq 0$ en $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \leq (y_i)_{i\in\mathbb{I}} :\Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{I} : x_i \leq y_i)$. Laat voor $i \in \mathbb{I} : e_i \in c_{00}(\mathbb{I})$ het rijtje zijn met een 1 op de i^e plaats, en verder enkel nullen. Dan is $\{e_i : i \in I\}$ een basis voor $c_{00}(\mathbb{I})$ met de eigenschap dat $c_{00}(\mathbb{I})^+ = \{\sum_{i\in\mathbb{I}} a_i e_i : a_i \geq 0 \text{ en eindig veel } a_i \neq 0\}$.

Lemma 2.4.2. $c_{00}(\mathbb{I})$ *is een dedekind complete rieszruimte.*

Bewijs. Stel $A \subset c_{00}(\mathbb{I})$ is een begrensde verzameling, dus er zijn $f, g \in c_{00}(\mathbb{I})$ zodat $f \leq A \leq g$. Voor slechts eindig veel $\{i_1, \ldots, i_n\}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is $f_{i_j} \neq 0$ of $g_{i_j} \neq 0$. Definieer voor $i \in \mathbb{I} : A_i = \{x_i : (x_j)_{j\in\mathbb{I}} \in A\}$. Voor $i \in \mathbb{I}\backslash\{i_1, \ldots, i_n\}$ is $A_i = \{x_i : (x_j)_{j\in\mathbb{I}} \in A\} = \{0\}$. Laat $I_i = \inf A_i$ en $S_i = \sup A_i$. Dan is $I = (I_i)_{i\in\mathbb{I}} \in c_{00}(\mathbb{I})$ een ondergrens van A en $S = (S_i)_{i\in\mathbb{I}} \in c_{00}(\mathbb{I})$ een bovengrens van A. Stel $a \leq A$, dan is voor alle $i \in \mathbb{I} : a_i \leq \inf A_i$, dus $a \leq I$, stel $A \leq b$, dan is voor alle $i \in \mathbb{I} : \sup A_i \leq b_i$, dus $S \leq b$. Dus $I = \inf A$ en $S = \sup A$ bestaan. Dus $c_{00}(\mathbb{I})$ is dedekind compleet.

□

We zagen reeds dat $L(X, Y)$ in het algemeen niet gericht is, in dit bijzondere geval is voor iedere gerichte $Y : L(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ gericht en dus gelijk aan $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$.

Stelling 2.4.3. *Laat* $\mathbb{I}$ *een indexverzameling. Laat* Y *gericht zijn. Dan is* $L(c_{00}(\mathbb{I}), Y) = L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$.

Bewijs. Merk op dat $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y) \subset L(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$. Stel $T \in L(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$. Dan ligt T vast door zijn waarden op $(e_i : i \in \mathbb{I})$. Omdat Y gericht is bestaan er $x_i, y_i \in Y^+, i \in \mathbb{I}$ zodat $Te_i = x_i - y_i$. Definieer $U = (e_i \mapsto x_i : i \in \mathbb{I})$ en $V = (e_i \mapsto y_i : i \in \mathbb{I})$. Dan zijn U, V positief en $T = (e_i \mapsto Te_i : i \in \mathbb{I}) = (e_i \mapsto x_i : i \in \mathbb{I}) - (e_i \mapsto y_i : i \in \mathbb{I}) = U - V$ is regulier. Dus $L(c_{00}(\mathbb{I}), Y) = L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$.

□

De volgende stelling geeft een karakterisering van $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$.

Stelling 2.4.4. *Laat $\mathbb{I}$ een indexverzameling en laat Y gericht zijn. Dan is*

$$\phi_Y : L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y) \rightarrow \prod_{i\in\mathbb{I}} Y, \tag{2.4.1}$$

$$R \mapsto (Re_n)_{n=1}^{\infty} \tag{2.4.2}$$

een orde-isomorfisme. Dus $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ en $\prod_{i\in\mathbb{I}} Y$ zijn orde-isomorf.

Bewijs. Definieer $\phi_Y : L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y) \rightarrow \prod_{i\in\mathbb{I}} Y$ door $R \mapsto (Re_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Dan is ϕ_Y lineair en bipositief. Laat $(x_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \prod_{i\in\mathbb{I}} Y$. Vanwege stelling 2.4.3 is $R = (e_i \mapsto x_i)$ regulier en $\phi_Y(R) = (x_i)_{i\in\mathbb{I}}$. Dus ϕ_Y is surjectief. Dus ϕ_Y is een orde-isomorfisme.

□

Opmerking 2.4.5. Merk op dat $\prod_{i\in\mathbb{I}} Y$, via het orde-isomorfisme $(y_i)_{i\in\mathbb{I}} \mapsto (i \mapsto y_i)$ orde-isomorf is met $Y^{\mathbb{I}}$, de ruimte van functies van $\mathbb{I}$ naar Y. Dus $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y) \cong Y^{\mathbb{I}}$.

Stelling 2.4.6. *Laat $\mathbb{I}$ een indexverzameling zijn en Y gericht. Dan gelden de volgende uitspraken:*

1. *$L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ is archimedisch dan en slechts dan als Y archimedisch is,*
2. *$L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ is een rieszruimte dan en slechts dan als Y een rieszruimte is,*
3. *$L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ is een dedekind complete rieszruimte dan en slechts dan als Y een dedekind complete rieszruimte is.*

Bewijs. Direct gevolg van stellingen 1.4.3 en 2.4.4.

□

Lemma 1.4.2, stelling 2.4.4 en het onderstaande diagram maken de volgende gevolgen duidelijk.

$$
\begin{tikzcd}
L_r(c_{00}(\mathbb{I}),Y) \arrow[rrr, "\phi_Z^{-1}\circ\iota\circ\phi_Y"] \arrow[ddd, "\phi_Y"] & & & L_r(c_{00}(\mathbb{I}),Z) \arrow[ddd, "\phi_Z"] \\
& R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & R \arrow[d, mapsto] & \\
& (Re_n)_{n=1}^{\infty} \arrow[r, mapsto] & (Re_n)_{n=1}^{\infty} & \\
\prod_{i\in\mathbb{I}} Y \arrow[rrr, "\iota"] & & & \prod_{i\in\mathbb{I}} Z
\end{tikzcd}
$$

Gevolg 2.4.7. *Laat Y, Z gericht zijn en $Y \subset Z$ ordedicht, dan ligt $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ ordedicht in $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Z)$.*

Gevolg 2.4.8. *Stel Y is gericht en integraal gesloten, dan is $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y^\delta)$ de dedekind completering van $L_r(c_{00}, Y)$. Stel voor $R_1, R_2 \in L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ is $S \in L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ het supremum van R_1 en R_2 binnen $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$, dan is S het supremum van R_1 en R_2 binnen $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y^\delta)$ en geldt voor alle $x \in c_{00}(\mathbb{I})^+$ de formule van Riesz-Kantorovič:*

$$Sx = \sup\{R_1 y + R_2 z : y, z \in X^+, x = y + z.\}. \tag{2.4.3}$$

Voor algemene archimedische rieszruimten X, Y hoeft $L_r(X, Y)$ niet riesz te zijn. Met gevolg 2.4.8 en stelling 2.4.6 hebben we het volgende opmerkelijke resultaat.

Gevolg 2.4.9. *Stel Y is een archimedische rieszruimte. Dan is $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ een archimedische rieszruimte en geldt voor alle $R_1, R_2 \in L_r(c_{00}(\mathbb{I}), Y)$ en voor alle $x \in c_{00}(\mathbb{I})^+$ de formule van Riesz-Kantorovič:*

$$(R_1 \vee R_2)(x) = \sup\{R_1 y + R_2 z : y, z \in (c_{00}(\mathbb{I}))^+, x = y + z\}. \tag{2.4.4}$$

Voorbeeld 2.4.10. Beschouw voor $n \in \mathbb{Z}_{>0} : X = \mathbb{R}^{n+1}$ met de lorentzkegel $L_n := \{(r, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : r^2 - \langle u, u\rangle \geq 0 \text{ en } r \geq 0\}$. Volgens [5], stelling 10 en pagina's 10 en 11 ligt X via een inbedding ι ordedicht in $C(S^{n-1})$, de ruimte van reëelwaardige continue functies op S^{n-1} met S^{n-1} de $(n-1)$-dimensionale bolsfeer. Dus $L_r(c_{00}(\mathbb{I}), X)$ ligt via de inbedding $\phi_{C(S^{n-1})} \circ \iota$ ordedicht in $\prod_{i\in\mathbb{I}} C(S^{n-1})$.

3 Continue reguliere operators

Het is niet gemakkelijk om te bewijzen dat een geordende vectorruimte orde-isomorf is met $c_{00}(\mathbb{I})$, voor zekere indexverzameling $\mathbb{I}$, en als $L(X,Y) \neq L_r(X,Y)$, of X niet dedekind compleet is dan kan X vanwege stelling 2.4.3 en lemma 2.4.2 niet orde-isomorf zijn met $c_{00}(\mathbb{I})$. In dit hoofdstuk vervang ik '$c_{00}(\mathbb{I})$' door 'ℓ^1','basis' door 'schauderbasis' en X^+ bestaat uit 'positieve sommen' door X^+ bestaat uit 'oneindige positieve sommen'. Dan is een analoge karakterisering van $\mathcal{L}_r(\ell^1, Y)$ te geven.

In het vervolg van dit hoofdstuk zijn X en Y steeds genormeerde gerichte geordende vectorruimten.

3.1 Continue reguliere operators

Omdat we graag willen dat de ruimte van continue reguliere operators gericht is hebben we de volgende, op het eerste gezicht wat vreemde definitie van een continue reguliere operator.

Definitie 3.1.1. Een reguliere afbeelding $R \in L_r(X,Y)$ heet een continue reguliere lineaire afbeelding als er $S, T \in L_r(X,Y)^+$ bestaan zodat S en T continu zijn en $R = S - T$. De (gerichte) geordende vectorruimte van alle continue reguliere afbeeldingen geven we aan met $\mathcal{L}_r(X,Y)$.

Opmerking 3.1.2. In het algemeen is $\mathcal{L}_r(X,Y) \neq L(X,Y) \cap B(X,Y)$. Zie [4], voorbeeld 5.9 voor een tegenvoorbeeld.

3.2 M-reguliere norm en $\ell^\infty(X)$

Definitie 3.2.1. Zij X een geordende vectorruimte met norm $||\cdot||$. Dan is $||\cdot||$ een M-reguliere norm als er een $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaat zodat $\forall x \in X$ er $y_1, y_2 \in X^+$ bestaan zodat $x = y_1 - y_2$ en $||y_1||, ||y_2|| \leq M||x||$.

Met $\ell^\infty(X)$ noteren we de vectorruimte van alle begrensde X-waardige rijen:

$$\ell^\infty(X) := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X : \exists M \geq 0 \forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : ||x_n|| \leq M \right\}. \quad (3.2.1)$$

Merk op dat $\ell^\infty(X)$ afhangt van de gekozen norm.

Lemma 3.2.2. *Stel X is een geordende normruimte met M-reguliere norm $||\cdot||$. Dan is $\ell^\infty(X)$ gericht.*

Bewijs. Stel $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(X)$. Dus er is een $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zodat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : ||x_n|| \leq M$. Vanwege het feit dat $||\cdot||$ M-regulier is, bestaat er een $N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zodat voor alle $x \in X$ er $y_1, y_2 \in X^+$ bestaan zodat $x = y_1 - y_2$ en $||y_1||, ||y_2|| \leq N||x||$. Dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaan er $y_n, \widetilde{y}_n \in X^+$ zodat $x_n = y_n - \widetilde{y}_n$ en $||y_n||, ||\widetilde{y}_n|| \leq N||x_n|| \leq NM$. Dus $(y_n)_{n=1}^\infty, (\widetilde{y}_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(X)^+$ en $(x_n)_{n=1}^\infty = (y_n)_{n=1}^\infty - (\widetilde{y}_n)_{n=1}^\infty$. Dus $\ell^\infty(X)$ is gericht. $\square$

3.3 De ruimte $\mathcal{L}_r(\ell^1, X)$

Stelling 3.3.1. *Stel X is een geordende banachruimte onder M-reguliere norm $||\cdot||$. Neem verder aan dat X^+ gesloten is onder $||\cdot||$. Dan is*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}_r(\ell^1, X) &\to \ell^\infty(X), && (3.3.1)\\ R &\mapsto (Re_n)_{n=1}^\infty. && (3.3.2) \end{aligned}$$

een orde-isomorfisme. Dus $\mathcal{L}_r(\ell^1, X)$ en $\ell^\infty(X)$ zijn orde-isomorf.

Bewijs. Laat $(e_n)_{n=1}^\infty$ de standaard schauderbasis (zie Megginson [7], paragraaf 4.1) van ℓ^1 zijn. Definieer $\psi : \mathcal{L}_r(\ell^1, X) \to \ell^\infty(X)$ door $R \mapsto (Re_n)_{n=1}^\infty$. Vanwege het feit dat R continu is, is ψ welgedefinieerd. Merk verder op dat ψ lineair en positief is. Stel voor $R \in \mathcal{L}_r(X, Y)$ geldt $(Re_n)_{n=1}^\infty \geq 0$. Stel $x = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n \geq 0$, dan is voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0} : a_n \geq 0$ en vanwege continuïteit van R en het gesloten zijn van X^+ geldt

$$Rx = R\left(\sum_{n=1}^\infty a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n Re_n \geq 0.$$

Dus R is positief. Dus ψ is bipositief. Nu rest nog te bewijzen dat ψ surjectief is. Stel $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(X)$. Vanwege lemma 3.2.2 bestaan er $(y_n)_{n=1}^\infty, (\widetilde{y}_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(X)^+$ zodat $(x_n)_{n=1}^\infty = (y_n)_{n=1}^\infty - (\widetilde{y}_n)_{n=1}^\infty$. Laat $W = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$, dan ligt W normdicht in ℓ^1. Definieer $S|_W, T|_W : W \to X$ door respectievelijk $e_n \mapsto y_n$ en $e_n \mapsto \widetilde{y}_n$. Stel $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in W$, met $||x|| = \sum_{i=1}^n |a_i| \leq 1$. Dan is $S|_W x = S|_W \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i S e_i = \sum_{i=1}^n a_i y_i$. Merk op dat er een $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is zodat voor alle $i \in \mathbb{Z}_{>0} : ||y_i|| \leq M$. Dus

$$||S|_W x|| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot ||y_i|| \leq M \sum_{i=1}^n |a_i| \leq M.$$

Dus $S|_W$ is continu, geheel analoog is ook $T|_W$ continu. Vanwege [10], stelling 4.19 zijn $S|_W$ en $T|_W$ uniek uit te breiden tot continue lineaire afbeeldingen respectievelijk $S, T : \ell^1 \to X$. Verder is voor $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in \ell^{1+} : Sx = S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n S e_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \geq 0$, (want $a_n \geq 0$ en X^+ is gesloten). Dus S is positief. Geheel analoog is ook $T \geq 0$. Dus $R := S - T \in \mathcal{L}_r(X, Y)$ en $\psi(R) = \psi(S) - \psi(T) = (y_n)_{n=1}^{\infty} - (\widetilde{y}_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Dus ψ is surjectief. Dus ψ is een orde-isomorfisme.

$\square$

Voorbeeld 3.3.2. De standaardnorm op $\mathbb{R}^n$ is $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Stel $x \in \mathbb{R}$, dan is $x = x^+ - x^-$, en $||x^+|| = \sqrt{{x_1^+}^2 + \ldots + {x_n^+}^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2} = ||x||$, net zo $||x^-|| \leq ||x||$, dus $|| \cdot ||$ is M-regulier. Verder is $(\mathbb{R}^n)^+$ gesloten, dus vanwege stelling 3.3.1 is $\mathcal{L}_r(\ell^1, \mathbb{R}^n) \cong \ell^\infty(\mathbb{R}^n)$. Stel $S, T \in \mathcal{L}_r(\ell^1, \mathbb{R}^n)$, dan is $\psi(S) = (Se_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\psi(T) = (Te_n)_{n=1}^{\infty}$. Dus $\sup\{\psi(S), \psi(T)\} = (Se_n \vee Te_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$. Stel $x, y \in \mathbb{R}^n$ met $||x||, ||y|| \leq N$, dan is $||x||^2, ||y||^2 \leq N^2$ en $||x \vee y||^2 \leq ||x||^2 + ||y||^2$, dus $||x \vee y|| \leq \sqrt{||x||^2 + ||y||^2} \leq \sqrt{2N^2} = \sqrt{2}N$, dus $(Se_n)_{n=1}^{\infty} \vee (Te_n)_{n=1}^{\infty} = (Se_n \vee Te_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dus $S \vee T = (e_n \mapsto Se_n \vee Te_n : n \in \mathbb{Z}_{>0})$ is het supremum van S en T in $\mathcal{L}_r(\ell^1, \mathbb{R}^n)$.

Nawoord

In deze scriptie hebben we een voldoende voorwaarde gegeven op $L_r(X,Y)$, namelijk $L_r(X,Y) \subset L_r(X,Y^\delta)$ ordedicht, zodat de formule van Riesz-Kantorovič geldt. In een specifiek geval heb ik dat ook bewezen. Een interessante vraag is of voor alle gerichte integraal gesloten vectorruimten Y geldt dat $L_r(X,Y) \subset L_r(X,Y^\delta)$ ordedicht ligt. Blijkt dat namelijk het geval te zijn, dan is een 30 jaar oud probleem opgelost. Een andere interessante vraag is of ordedichtheid ook een noodzakelijke voorwaarde is, dus stel voor $L_r(X,Y)$ geldt de formule van Riesz-Kantorovič, geldt dan ook $L_r(X,Y) \subset L_r(X,Y^\delta)$ ordedicht? Is dat het geval dan is het probleem 'Geldt de formule van Riesz-Kantorovič algemeen?' equivalent met de uitdaging 'Ligt $L_r(X,Y) \subset L_r(X,Y^\delta)$ ordedicht?'. Deze vragen zijn een verder onderzoek meer dan waard!

Lijst van symbolen

In deze scriptie wordt de notatie gevolgd die Van Gaans [4] en Van Haandel [6] in hun dissertaties gebruiken. Voor standaardnotatie voor rieszruimten zie Aliprantis en Burkinshaw [2].

$\overline{A}$	topologische afsluiting van A
A^l	ondergrenzen van A
A^u	bovengrenzen van A
$(b_i \mapsto x_i : i \in \mathbb{I})$	lineaire afbeelding gedefinieerd op basiselementen b_i
$B(X,Y)$	ruimte van continue lineaire afbeeldingen $T : X \to Y$
c	ruimte van alle convergerende reële rijen
$c_{00}(\mathbb{I})$	eindige reële rijen met indexverzameling $\mathbb{I}$
D, X, Y of Z	geordende vectorruimten
ℓ^1	absoluut sommeerbare reële rijen
ℓ^∞	begrensde reële rijen
$\ell^\infty(X)$	begrensde X-waardige rijen
e_n	rij waarvan het n^e component 1 is en alle andere 0
e	de constante rij 1
$\inf A, \inf_X A$	infimum van A in X
$\operatorname{int} A$	inwendige van een verzameling A
$\mathbb{I}$	indexverzameling
K	kegel
$L(X,Y)$	ruimte van lineaire afbeeldingen $T : X \to Y$
$\mathcal{L}_r(X,Y)$	verschillen van continue positieve operators
$L_r(X,Y)$	ruimte van reguliere operators $T : X \to Y$
P_2, P_3	ruimte van resp. 2^e en 3^e graads polynomen in $\mathbb{R}$
S^n	n-dimensionale bolsfeer (in $\mathbb{R}^{n+1}$)
$\sup A, \sup_X A$	supremum van A in X
$(X, \leq)$	geordende vectorruimte met ordening $\leq$
(X, K)	geordende vectorruimte met kegel $X^+ = K$
X^+	verzameling van alle positieve elementen
$(X^\delta, \iota), X^\delta$	dedekind completering van X met inbedding ι
$\prod_{i \in \mathbb{I}} X_i$	productruimte van geordende vectorruimten $X_i, i \in \mathbb{I}$
$X^{\mathbb{I}}$	ruimte van functies $f : \mathbb{I} \to X$
$x \vee y$	supremum van $\{x, y\}$ in X
$x \wedge y$	infimum van $\{x, y\}$ in X
$x^+ = x \vee 0$	
$x^- = -x \vee 0$	

Referenties

[1] Y.A. Abramovich en C.D. Aliprantis,
An Invitation to Operator Theory,
American Mathematical Society,
2002

[2] C.D. Aliprantis en O. Burkinshaw,
Positive Operators,
Academic Press,
1985

[3] D.H. Fremlin,
Topological Riesz Spaces and Measure Theory,
Cambridge University Press,
1974

[4] O.W. van Gaans,
Seminorms on Ordered Vector Spaces,
Dissertatie Radboud Universiteit Nijmegen,
1999

[5] O.W. van Gaans, A. Kalauch en B. Lemmens,
Riesz completions, functional representations, and anti-lattices,
voorpublicatie,
2011

[6] M.B.J.G. van Haandel,
Completions in Riesz Space Theory,
Dissertatie Radboud Universiteit Nijmegen,
1993

[7] R.E. Megginson,
An Introduction to Banach Space Theory,
Springer,
1998

[8] P. Meyer-Nieberg,
Banach Lattices,
Springer,
1991

[9] A.L. Peressini,
Ordered Topological Vector Spaces,
Harper & Row,
1967

[10] B.P. Rynne en M.A. Youngson,
Linear Functional Analysis, 2^e editie,
Springer,
2008

Index