

# Interferentie door Elektronen

*Een bachelorscriptie door*  
Jordy van der Hoorn

*Onder begeleiding van*  
prof.dr.ir Oosterkamp  
dr. Van Gaans

*Inleverdatum*  
15 november 2013



**Universiteit Leiden**

**Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden**

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Voorwoord</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Inleiding</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Het experiment en aannames</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>De banen en aantal golven van elektronen</b>	<b>6</b>
4.1	De baan van een elektron . . . . .	6
4.2	Het aantal golven van een elektron . . . . .	8
4.3	De horizontale en verticale beginsnelheid . . . . .	11
4.4	elektronen die vertrekken uit $(x, y) = (0, D)$ . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Interferentie</b>	<b>16</b>
5.1	Zien we altijd een interferentie patroon? . . . . .	16
5.2	Interferentie-afstand . . . . .	19
5.3	Grootte van het interferentie patroon . . . . .	21
5.4	Grafische weergave . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Conclusie</b>	<b>24</b>

# 1 Voorwoord

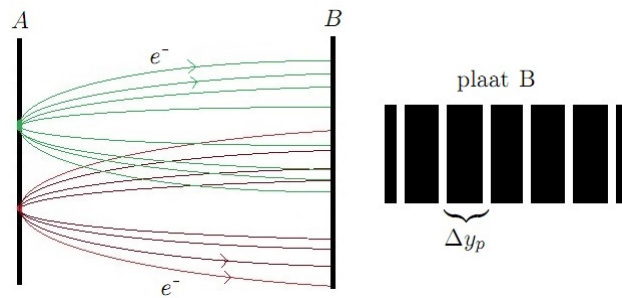
Na  $2\frac{1}{2}$  jaar mocht ook ik eindelijk aan mijn bachelorscriptie beginnen. Het Snellius-gebouw werd gedurende een half jaar plotseling een deel van mijn leven. Het was aan mij de taak of ik al die mooie wiskundige theorieën van de afgelopen tijd toe kan passen op een echt wiskundig onderzoek. Maar onderzoek doen is niet zomaar iets. Zo ben ik vele obstakels tegen gekomen en denk je op dit moment werkelijk iets concreets gevonden te hebben, blijkt morgen weer dat je toch iets vergeten bent.

Na een opmerkelijke beginperiode waarin de onderwerpen van de bachelorscriptie werden verdeeld, werd bij mij het onderwerp: Elektronen Interferentie, voor mijn voeten gegooid. Hoewel ik van de 30 onderwerpen dit onderwerp niet in mijn top 3 had geplaatst en dit een Natuurkunde/Wiskunde-onderwerp is, heb ik het met beide handen stevig aangepakt. Hoe verder ik kwam, hoe leuker ik het begon te vinden. Gedurende tijd wordt je namelijk ook steeds nieuwsgieriger naar het resultaat, dat het werken aan je scriptie steeds leuker wordt.

Maar om een mooi eindproduct neer te zetten, moet ten eerste een hoop werk verricht worden maar misschien wel het belangrijkste is dat er hulp geboden wordt door mensen die je willen helpen. Daarom wil ik graag Dhr. Oosterkamp bedanken voor alle natuurkundige aspecten van dit onderwerp en Dhr. Van Gaans voor de wiskundige aspecten. Daarbij hebben ze samen de tijd genomen om deze scriptie te lezen, van commentaar te voorzien en te beoordelen.

## 2 Inleiding

Net als bij licht en water kan er bij elektronen interferentie optreden. Dit komt doordat elektronen behalve een deeltjeskarakter ook een golfkarakter hebben. Op de plaats waar interferentie plaatsvindt, kunnen we de interferentie-afstand berekenen. In deze scriptie is het doel dan ook om op een wiskundige manier de interferentie-afstand te bepalen, die veroorzaakt wordt door elektronen. We zullen dit doen voor het semi-klassieke model. Met het semi-klassieke model bedoelen we het model waarbij twee platen,  $A$  en  $B$ , tegenover elkaar staan waarbij plaat  $A$  twee vertrekplaatsten heeft waaruit elektronen kunnen vertrekken met een bepaalde hoeveelheid beginenergie. Omdat plaat  $B$  aan de overkant positief geladen is en de elektronen negatief geladen zijn, worden de elektronen met een bepaalde kracht naar plaat  $B$  toe getrokken. En vanwege het golfkarakter van de elektronen, zal er interferentie plaatsvinden op plaat  $B$ . Voor een grafische weergave, zie figuur 1.

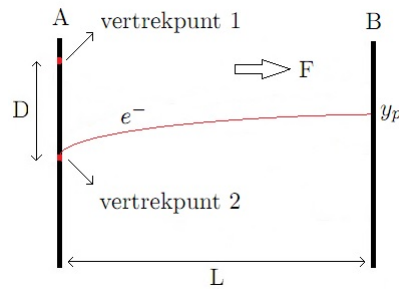


**Figuur 1:** Het semi-klassieke model en het interferentiepatroon op plaat  $B$

De vraag is of we  $\Delta y_p$  kunnen bepalen (zie figuur 1). Hiervoor gebruiken we het feit dat we in het semi-klassieke model de banen van de elektronen kunnen bekijken alsof het geladen deeltjes zijn. Hierdoor kunnen we voor elk willekeurig tijdstip het aantal golven van de baan van een elektron berekenen. Dit zal ons uiteindelijk leiden tot de gevraagde interferentie-afstand.

### 3 Het experiment en aannames

We zullen beginnen met een opstelling van een model voor het experiment te geven. Verder zullen er gedurende dit onderzoek vele variabelen aan bod komen. Daarom zijn in figuur 2 alle variabelen weergegeven. Ook zijn hier alle aannames te vinden die er tijdens dit onderzoek gebruikt zijn.



**Figuur 2:** Weergave van de variabelen in het experiment

#### Variabelen

- $A$  = Plaat  $A$ .
- $B$  = Plaat  $B$ .
- $F$  = Het elektronische veld tussen de platen  $A$  en  $B$ .
- $L$  = De afstand tussen de platen  $A$  en  $B$ .
- $D$  = De afstand tussen de twee vertrekpunten van de elektronen.
- $y_p$  = Het punt waar het elektron op plaat  $B$  terechtkomt.

#### Aannames

- De kinetische energie is voor alle elektronen gelijk op het vertrekpunt en daarom ook op het eindpunt.
- De elektronen kunnen op een verschillend tijdstip vertrekken.
- De elektronen vertrekken in een gelijke fase.
- De elektronen worden eenparig versneld.

Van deze vier aannames is de aanname dat de elektronen allemaal met een gelijke fase vertrekken het minst redelijk. Zo kan het namelijk zijn dat het ene elektron vertrekt in zijn evenwichtsstand en de ander in zijn maximale amplitude.

## 4 De banen en aantal golven van elektronen

### 4.1 De baan van een elektron

Doordat de elektronen vertrekken vanuit plaat A en aankomen op plaat B, bewegen ze zich voort over bepaalde banen. De eerste stap is het vinden van deze banen.

**Stelling 4.1.1** *De baan van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, 0)$  wordt gegeven door:*

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t) &= \frac{qF}{2m}(t - t_0)^2 + v_1(t - t_0), \\ y(t) &= v_2(t - t_0). \end{aligned}$$

*Hierbij geldt:*

- $v_1$ =beginsnelheid van het elektron in horizontale richting.
- $v_2$ =beginsnelheid van het elektron in verticale richting.

#### **Bewijs:**

We merken op dat de plaats waar een elektron zich bevindt, afhangt van de tijd en dat een elektron zich in horizontale en verticale richting kan voortbewegen. Per baan horen we dus een  $x(t)$  en  $y(t)$  te vinden.

Doordat de elektronen negatief geladen zijn en de plaat aan de overkant positief geladen is, wordt er met een bepaalde kracht  $F$  aan de elektronen getrokken. Met behulp van de eerste wet van Newton vinden we:

$$Fq = m \cdot a,$$

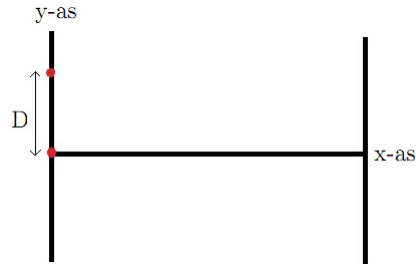
Uitgeschreven in componenten,

$$(2) \quad \begin{pmatrix} Fq \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

waar  $q$  de lading van een elektron is.

We merken op dat  $x = 0$  wanneer de elektronen nog moeten vertrekken. We kunnen ook  $y = 0$  kiezen omdat we één van de twee vertrekplaatsen vast nemen zodat de andere afhankelijk is van  $D$ .

Dit zullen we duidelijk maken in onderstaand figuur.



**Figuur 3:** De vertrekplaatsen van de elektronen zijn  $(x, y) = (0, 0)$  en  $(x, y) = (0, D)$

Voor de beginvoorwaarden van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, 0)$  volgt:

$$\begin{aligned}x(t_0) &= 0, x'(t_0) = v_1 \\y(t_0) &= 0, y'(t_0) = v_2\end{aligned}$$

Uit (2) vinden we twee vergelijkingen, namelijk:

$$mx'' = qF,$$

$$my'' = 0.$$

Hieruit volgt:

$$x(t) = \frac{qF}{2m}t^2 + c_1t + c_2 \text{ met } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

$$y(t) = c_3t + c_4 \text{ met } c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Nadat we de beginvoorwaarden hebben ingevuld, vinden we uiteindelijk:

$$x(t) = \frac{qF}{2m}(t - t_0)^2 + v_1(t - t_0),$$

$$y(t) = v_2(t - t_0).$$

□

## 4.2 Het aantal golven van een elektron

Nu we hebben gevonden hoe de banen van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  eruit zien, willen we bepalen hoeveel golven een elektron maakt gedurende zijn baan.

**Stelling 4.2.1** *Het aantal golven van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, 0)$  is gelijk aan:*

$$(3) \quad \frac{\left(\frac{qF}{m}\right)^2}{3} \left(\frac{y_p}{v_2}\right)^3 + \frac{qFv_1}{m} \left(\frac{y_p}{v_2}\right)^2 + (v_1^2 + v_2^2) \frac{y_p}{v_2}$$

**Bewijs:**

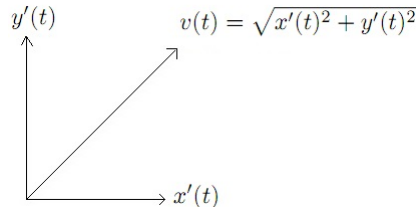
We merken op dat het aantal golven gelijk is aan de afgelegde afstand gedeeld door de golflengte van het elektron. Oftewel, het aantal golven van een elektron gedurende  $\Delta t$  is gelijk aan  $\frac{v(t)\Delta t}{\lambda(t)}$ . Met behulp van de wet van de Broglie ( $\lambda(t) = \frac{h}{mv(t)}$ ) volgt[1]:

$$\frac{v(t)\Delta t}{\lambda(t)} = \frac{v(t)\Delta t}{\frac{h}{mv(t)}} = \frac{mv(t)^2\Delta t}{h},$$

Voor  $\Delta t = t_{eind} - t_0$ , vinden we dat het aantal golven die het elektron maakt gelijk is aan:

$$(4) \quad \frac{m}{h} \int_{t_0}^{t_{eind}} v(s)^2 ds.$$

Nu merken we op dat we voor  $v(t)$ ,  $t_0$  en  $t_{eind}$  nog geen expliciete uitdrukkingen hebben. We zullen beginnen om een uitdrukking voor  $v(t)$  te vinden.  $v(t)$  is de absolute snelheid waarmee het elektron zich voortbeweegt op tijdstip  $t$ . Omdat  $x'(t)$  de horizontale snelheid is op tijdstip  $t$  en  $y'(t)$  de verticale snelheid is op tijdstip  $t$ , vinden we met behulp van de stelling van Pythagoras  $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ . Dit is ook duidelijk te zien in figuur 4.



**Figuur 4:** De absolute snelheid van een elektron op tijdstip  $t$



De eerste stap wordt dus het vinden van de afgeleide. Uit (1) volgt:

$$x'(t) = \frac{qF}{m}(t - t_0) + v_1,$$

$$y'(t) = v_2.$$

De absolute snelheid van een elektron wordt dan:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{qF}{m}(t - t_0) + v_1\right)^2 + v_2^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{qF}{m}\right)^2(t - t_0)^2 + \frac{2qFv_1}{m}(t - t_0) + v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Nu we een expliciete formule voor  $v(t)$  hebben gevonden, moeten we  $t_{eind}$  en  $t_0$  nog vinden. Hiervoor gebruiken we het feit dat  $x(t_{eind}) = L$  en  $y(t_{eind}) = y_p$ . De vergelijkingen die hieruit volgen zijn:

$$x(t_{eind}) = \frac{qF}{2m}(t_{eind} - t_0)^2 + v_1(t_{eind} - t_0) = L$$

$$y(t_{eind}) = v_2(t_{eind} - t_0) = y_p.$$

Voor de verdere berekeningen nemen we aan dat  $t_{eind} = 0$ , zodat  $t_0$  negatief wordt. Dit is mogelijk omdat voor het berekenen van de interferentie-afstand de absolute tijd geen invloed zal hebben. Bovenstaande vergelijkingen worden nu:

$$(5) \quad x(0) = \frac{qF}{2m}t_0^2 - v_1t_0 = L,$$

$$y(0) = -v_2t_0 = y_p.$$

Uit (5) volgt dat  $t_0 = -\frac{y_p}{v_2}$  zodat we de expliciete uitdrukkingen voor  $v(t)$ ,  $t_0$  en  $t_{eind}$  hebben gevonden. Nu kunnen we de gevonden integraal bij (4) oplossen:

$$\begin{aligned} \frac{m}{h} \int_{t_0}^{t_{eind}} v(s)^2 ds &= \frac{m}{h} \int_{t_0}^{t_{eind}} \left( \frac{qF}{m} \right)^2 (s - t_0)^2 + \frac{2qFv_1}{m} (s - t_0) + v_1^2 + v_2^2 ds \\ &= \frac{m}{h} \left[ \frac{\left( \frac{qF}{m} \right)^2}{3} s^3 + \left( \frac{qFv_1}{m} - \left( \frac{qF}{m} \right)^2 t_0 \right) s^2 \right. \\ &\quad \left. + (v_1^2 + v_2^2 + \left( \frac{qF}{m} \right)^2 t_0^2 - \frac{2qFv_1}{m} t_0) s + c_5 \right]_{t_0}^{t_{eind}} \end{aligned}$$

Vullen we  $t_0 = -\frac{y_p}{v_2}$  en  $t_{eind} = 0$  in, dan krijgen we dat het aantal golven van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, 0)$  gelijk wordt aan:

$$\frac{\left( \frac{qF}{m} \right)^2}{3} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^3 + \frac{qFv_1}{m} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^2 + (v_1^2 + v_2^2) \frac{y_p}{v_2}$$

□

### 4.3 De horizontale en verticale beginsnelheid

Uit vergelijking (3) zien we dat het aantal golven die het elektron maakt, afhangt van  $v_1$  en  $v_2$ . Om het aantal golven alleen te laten afhangen van de plaats waar het elektron op plaat  $B$  terechtkomt, moeten we zowel  $v_1$  als  $v_2$  uitdrukken in termen van  $y_p$ . Om dit te bewerkstelligen zullen we als eerst  $v_1$  uitdrukken in termen van  $v_2$  zodat we vervolgens alleen  $v_2$  hoeven uit te drukken in termen van  $y_p$ .

**Stelling 4.3.1** *De horizontale en verticale beginsnelheid van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, 0)$  worden gegeven door:*

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - \frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}},$$

$$v_2 = \pm \sqrt{\frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}}.$$

**Bewijs:**

Een elektron heeft op het begin een bepaalde hoeveelheid beginenergie, ook wel kinetische energie ( $E_{kin}$ ) genaamd. Uit de formule van kinetische energie volgt dan:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= E_{kin}, \\ \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) &= E_{kin}, \\ v_1^2 + v_2^2 &= \frac{2E_{kin}}{m}, \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2}. \end{aligned}$$

Doordat we  $v_1$  in termen van  $v_2$  hebben uitgedrukt, wordt vergelijking (3) voor het aantal golven van een elektron gelijk aan:

$$(7) \quad \frac{\left(\frac{qF}{m}\right)^2}{3} \left(\frac{y_p}{v_2}\right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2}}{m} \left(\frac{y_p}{v_2}\right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p}{v_2}.$$

De laatste stap die we nu nog moeten doen is  $v_2$  uitdrukken in termen van  $y_p$ . Hiervoor gebruiken we het feit dat we gevonden hebben dat  $t_0 = -\frac{y_p}{v_2}$ . Als we dit nu samen met de uitdrukking van  $v_1$  substitueren in (5) vinden we:

$$\frac{qF}{2m} \left(\frac{y_p}{v_2}\right)^2 + \frac{y_p}{v_2} \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2} = L.$$

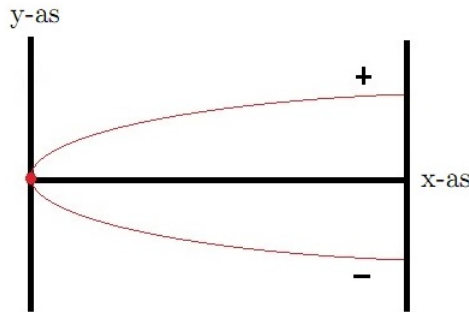
Hier komen vier mogelijke uitdrukkingen voor  $v_2$  uit, namelijk:

$$v_2 = \pm \sqrt{\frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL \pm \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}}.$$

En voor  $v_1$  vinden we uit (6):

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - \frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL \pm \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}}.$$

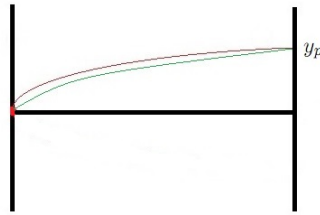
Het  $\pm$ -teken dat voor de wortel van  $v_2$  staat, komt doordat  $v_2$  de beginsnelheid is in verticale richting. Voor een bepaalde kinetische energie in het begin kan een elektron dus omhoog of omlaag bewegen, zie figuur 3. We merken op dat de twee mogelijke banen die het elektron kan maken symmetrisch zijn.



**Figuur 5:** twee symmetrische banen van een elektron

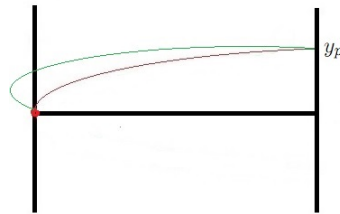
Bij de uitdrukking voor  $v_1$  is het niet mogelijk om een  $-$ teken voor de wortel te krijgen.  $v_1$  is namelijk de beginsnelheid van een elektron in horizontale richting en als er een  $-$ teken voor de wortel zou staan, zouden de elektronen dus ook naar links kunnen bewegen. Dit is echter onmogelijk omdat de positief geladen plaat  $B$  juist alle elektronen naar rechts trekt.

Nu is er nog enkel de vraag of het  $\pm$ -teken binnen de wortel mogelijk is. De vraag is dus of het mogelijk is om met een gelijke kinetische energie maar een verschillende beginsnelheid in hetzelfde punt  $y_p$  uit te komen (zie figuur 6).



**Figuur 6:** Is dit mogelijk?

De enige mogelijkheid waarbij dit zou kunnen is dat een elektron eerst naar links beweegt waarna het vervolgens wel in  $y_p$  kan uitkomen. De horizontale beginsnelheid moet dus negatief zijn. Dit kan er als volgt uitzien:



**Figuur 7:** Horizontale beginsnelheid is negatief

Door de relevante waarden van de variabelen in te vullen, blijkt de volgende keuze van het  $\pm$ -teken de juiste te zijn[2]:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - \frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}}$$

$$v_2 = \pm \sqrt{\frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}}$$

□

#### 4.4 elektronen die vertrekken uit $(x, y) = (0, D)$

Nu we exact de baan, het aantal golven per baan en de beginsnelheid hebben bepaald voor alle elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$ , moeten we nog hetzelfde doen voor alle elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, D)$ . We zullen hierbij niet alles helemaal uitwerken zoals we hierboven hebben gedaan. Het verschil is dat de elektronen op een andere vertrekplaats vertrekken, ze op een ander tijdstip kunnen vertrekken en een andere beginsnelheid kunnen hebben.

De beginvoorwaarden worden dan ook anders, namelijk:

$$\begin{aligned}x(t_1) &= 0, x'(t_1) = v_3, \\y(t_1) &= D, y'(t_1) = v_4.\end{aligned}$$

Daarom krijgen we:

$$x(t) = \frac{qF}{2m}(t - t_1)^2 + v_3(t - t_1),$$

$$y(t) = v_4(t - t_1) + D,$$

met afgeleiden:

$$x'(t) = \frac{qF}{m}(t - t_1) + v_3,$$

$$y'(t) = v_4.$$

We merken op dat de integraal voor het aantal golven van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  gelijk is aan die van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, D)$ , behalve dat we nu integreren van  $t_1$  tot  $t_{eind}$ . Het aantal golven van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, D)$  wordt dus:

$$\frac{m}{h} \int_{t_1}^{t_{eind}} v(s)^2 ds,$$

waarbij  $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ .

Voor het vinden van  $t_1$  nemen we  $t_{eind} = 0$ . Nu volgt uit  $y(t_{eind}) = y(0) = y_p$  dat  $t_1 = \frac{D - y_p}{v_4}$ .

Het aantal golven van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, D)$  wordt dan:

$$(8) \quad \frac{\left(\frac{qF}{m}\right)^2}{3} \left(\frac{y_p - D}{v_4}\right)^3 + \frac{qFv_3}{m} \left(\frac{y_p - D}{v_4}\right)^2 + (v_3^2 + v_4^2) \frac{y_p - D}{v_4}.$$

Omdat alle elektronen een gelijke kinetische energie bij vertrek hebben, vinden we hier ook dat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= E_{kin}, \\ \frac{1}{2}m(v_3^2 + v_4^2) &= E_{kin}, \\ v_3^2 + v_4^2 &= \frac{2E_{kin}}{m}, \\ v_3 &= \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}.\end{aligned}$$

Substitueren we dit in (8) dan wordt de vergelijking voor het aantal golven gelijk aan:

$$(9) \quad \frac{\left(\frac{qF}{m}\right)^2 (y_p - D)^3}{3 v_4} + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}}{m} \left(\frac{y_p - D}{v_4}\right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p - D}{v_4}.$$

Onze laatste stap is om  $v_4$  uit te drukken in termen van  $y_p$ . Hiervoor gebruiken we het feit dat  $x(t_{eind}) = x(0) = L$ . De vergelijking die hieruit volgt is:

$$\frac{qF}{2m} t_1^2 - v_3 t_1 = L.$$

Vullen we  $t_1 = \frac{D - y_p}{v_4}$  en  $v_3 = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}$  dan vinden we:

$$\frac{qF}{2m} \left(\frac{y_p - D}{v_4}\right)^2 + \frac{y_p - D}{v_4} \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2} = L.$$

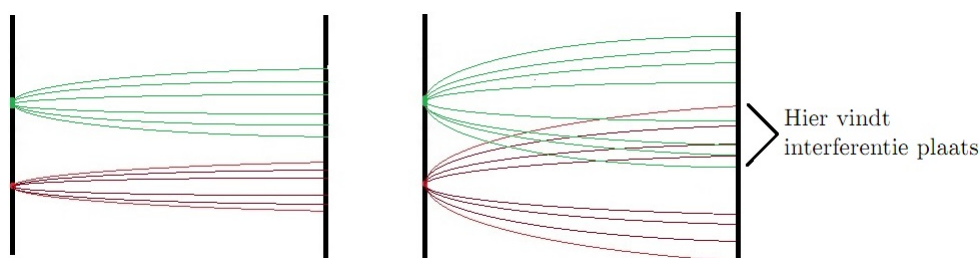
Hier komen vier mogelijke uitdrukkingen voor  $v_4$  uit. Maar omdat we al eerder hebben gezien dat er voor  $v_4$  precies twee mogelijke uitdrukkingen zijn (naar boven en naar beneden) en voor  $v_3$  precies één (alleen naar rechts) worden de horizontale en verticale beginsnelheid gegeven door:

$$\begin{aligned}v_3 &= \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - \frac{(y_p - D)^2 (2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2(y_p - D)^2})}{2m((y_p - D)^2 + L^2)}}, \\ v_4 &= \pm \sqrt{\frac{(y_p - D)^2 (2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2(y_p - D)^2})}{2m((y_p - D)^2 + L^2)}}.\end{aligned}$$

## 5 Interferentie

### 5.1 Zien we altijd een interferentie patroon?

Nu we alle berekeningen hebben gedaan om de interferentie-afstand te bepalen rest ons nog de vraag of er eigenlijk wel altijd interferentie plaatsvindt. We kunnen ons bijvoorbeeld wel voorstellen dat wanneer  $D$  heel groot wordt er geen interferentie zal plaatsvinden omdat de banen uit de twee verschillende startpunten elkaar dan niet kruisen. Dit is goed te zien in de figuur hieronder.



**Figuur 8:** links: geen interferentie, rechts: wel interferentie

De buitenste parabolische banen per vertrekpunt in figuur 5 zijn de banen van de elektronen die een maximale en minimale  $y_p$  geven. Voor deze banen geldt dat de elektronen een maximale verticale snelheid hebben. We merken op dat als de banen uit de twee verschillende vertrekpunten van de elektronen met maximale verticale snelheid elkaar snijden er interferentie plaatsvindt. In figuur 5 zien we dat de maximale verticale snelheid van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  positief moet zijn en van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, D)$  negatief. Dit komt doordat de banen uit de twee verschillende vertrekpunten van de elektronen met maximale verticale snelheid symmetrisch zijn. Een baan van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, 0)$  met een negatieve maximale verticale snelheid kan dus nooit snijden met een baan van een elektron die vertrekt uit  $(x, y) = (0, D)$  met een negatieve maximale verticale snelheid.

De eerste stap wordt om een  $y_{p_{max}}$  en een  $y_{p_{min}}$  van het interferentie patroon te vinden. Omdat de methode voor het vinden van  $y_{p_{max}}$  en  $y_{p_{min}}$  exact hetzelfde is, zullen we alleen  $y_{p_{max}}$  uitwerken.



**Stelling 5.1.1**  $y_{pmax} = \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}$ .

**Bewijs:**

Uit  $v_1^2 + v_2^2 = \frac{2E_{kin}}{m}$  volgt voor de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  met maximale verticale snelheid dat  $v_1 = 0$ . Oftewel,  $v_2 = \pm\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}$ . Substitueren we  $v_1 = 0$  in (1), dan volgt voor de baan van een elektron:

$$x(t) = \frac{qF}{2m}(t - t_0)^2,$$

$$y(t) = v_2(t - t_0).$$

Voor  $t = t_{eind} = 0$  krijgen we:

$$\frac{qF}{2m}t_0^2 = L,$$

$$-v_2t_0 = y_p.$$

Substitueren we nu  $t_0$  uit de eerste vergelijking in de tweede vergelijking en vullen  $v_2 = \pm\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}$  in, dan krijgen we:

$$y_p = \pm v_2 \sqrt{\frac{2mL}{qF}} = \pm \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2mL}{qF}} = \pm \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}.$$

Om interferentie te krijgen, hebben we gezien dat de maximale verticale snelheid van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  positief moet zijn. We krijgen dus:

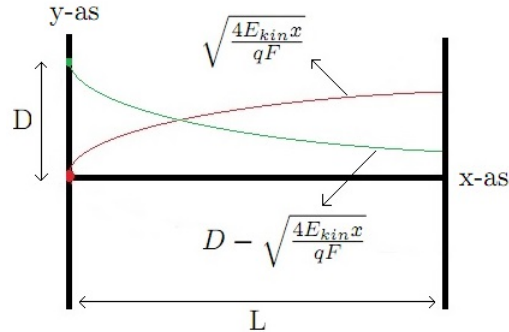
$$y_{pmax} = \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}.$$

□

Met precies dezelfde methode vinden we voor de baan van de elektronen die vertrekken met een negatieve maximale verticale snelheid uit  $(x, y) = (0, D)$ :

$$y_{pmin} = D - \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}.$$

We hebben nu het volgende:



**Figuur 9:** De banen van de elektronen met maximale negatieve en positieve verticale snelheid

In figuur 9 is goed te zien dat er interferentie plaatsvindt wanneer geldt:

$$D - \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}} \leq \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}},$$

oftewel,

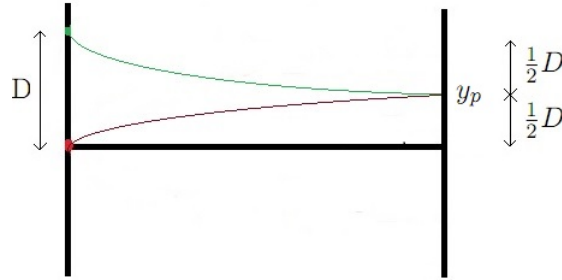
$$D \leq 2\sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}.$$

Nu we precies weten voor welke variabelen er interferentie plaatsvindt, kunnen we de op experiment gebaseerde variabelen bepalen. Deze variabelen zijn als volgt:

$$\begin{aligned} q &= 1.6 \cdot 10^{-19} V \\ E_{kin} &= 1.6 \cdot 10^{-19} J \\ m &= 9 \cdot 10^{-31} kg \\ L &= 10^{-6} m \\ F &= 100 N \\ D &= 10^{-6} m \end{aligned}$$

## 5.2 Interferentie-afstand

Om interferentie te krijgen, moet er gelden dat twee banen uit verschillende vertrekplaatsen precies op hetzelfde moment en een gelijke fase in punt  $y_p$  aankomen. Doordat ze dezelfde fase moeten hebben betekent het dat het verschil in aantal golven van de twee banen in het punt  $y_p$  gelijk moet zijn aan  $k$ , met  $k \in \mathbb{R}$ . We moeten dus het verschil in aantal golven van de banen gelijk stellen aan twee opeenvolgende  $k$ 's. We nemen  $k = 0$  en  $k = 1$ . We merken op dat voor  $k = 0$  de banen uit precies een gelijk aantal golven bestaan. Hieruit moet dus volgen dat  $y_p = \frac{1}{2}D$ . Dit is goed te zien in figuur 10.



**Figuur 10:** Banen met een gelijk aantal golven komen precies aan in  $y_p = \frac{1}{2}D$

De vergelijking die hier bij hoort volgt uit (7) en (9) (met bijbehorende waarden voor  $v_2$  en  $v_4$ ) en is:

$$\frac{m}{\hbar} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2}}{m} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^2 + \frac{2E_{kin} y_p}{m v_2} \right) -$$

$$\frac{m}{\hbar} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}}{m} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^2 + \frac{2E_{kin} y_p - D}{m -v_4} \right) = 0.$$

We merken op dat er geen  $v_4$  maar  $-v_4$  in de vergelijking staat, omdat de elektronen vanuit  $(x, y) = (0, D)$  met een negatieve verticale snelheid vertrekken. Er is goed te zien dat als we  $y_p = \frac{1}{2}D$  invullen, er precies 0 uitkomt. Deze vergelijking hebben we ook numeriek opgelost[3] en er kwam dan ook  $y_p = 5.0 \cdot 10^{-7}m$  uit, zodat onze voorspelling klopt. Om nu de interferentie-afstand te bepalen, nemen we als volgt  $k = 1$ .

We merken op dat we ook  $k = -1$  hadden kunnen kiezen, omdat dit precies dezelfde waarde voor  $k=1$  geeft maar dan negatief. De interferentie-afstand blijft dan dus ook hetzelfde. De vergelijking voor  $k=1$  is als volgt:

$$\frac{m}{h} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2}}{m} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p}{v_2} \right) - \frac{m}{h} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}}{m} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p - D}{-v_4} \right) = 1.$$

Hieruit volgt de numerieke waarde:

$$y_p = 5.013749664 \cdot 10^{-7} m.$$

De interferentie-afstand wordt nu:

$$5.013749664 \cdot 10^{-7} - 5.0 \cdot 10^{-7} = 1.3749664 \cdot 10^{-9} m.$$

Omdat we weten wat  $y_{p_{max}}$  en  $y_{p_{min}}$  zijn, kunnen we exact bepalen hoeveel interferenties er te zien zijn op plaat B. Als eerst moeten we  $y_{p_{max}}$  en  $y_{p_{min}}$  berekenen.

$$y_{p_{max}} = \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} = 2.0 \cdot 10^{-4} m = 0.2 mm,$$

$$y_{p_{min}} = D - \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}} = 10^{-6} - \sqrt{\frac{4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}}$$

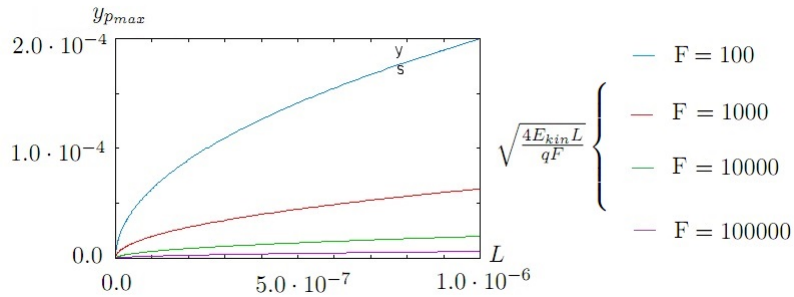
$$= -1.99 \cdot 10^{-4} = -0.199 mm.$$

Het aantal interferenties dat te zien is op plaat B is dan:

$$\frac{2.0 \cdot 10^{-4} + 1.99 \cdot 10^{-4}}{1.3749664 \cdot 10^{-9}} \approx 106409,5343$$

### 5.3 Grootte van het interferentie patroon

We zijn ook geïnteresseerd in wat er gebeurt met  $y_{p_{max}}$  en  $y_{p_{min}}$  als we verschillende paramaters veranderen. Omdat  $y_{p_{max}}$  en  $y_{p_{min}}$  afhankelijk zijn van  $E_{kin}$ ,  $L$  en  $F$ , kunnen we heel veel variëren. We zullen echter alleen  $F$  variëren en zien wat er gebeurt met  $y_{p_{max}}$ . In het volgende figuur is dus een  $y_{p_{max}}$ ,  $L$ -grafiek te zien met verschillende waarden voor  $F$ .



**Figuur 11**

In de grafiek zien we dat  $y_{p_{max}}$  kleiner wordt voor grotere waarden van  $F$ . Dit kunnen we verklaren doordat de plaat met een steeds grotere kracht de elektronen naar zich toe trekt. Hierdoor zullen de elektronen eerder op plaat B aankomen waardoor de uitwijking van de banen steeds kleiner moet worden. Doordat de uitwijking afneemt zal  $y_{p_{max}}$  dus ook afnemen.

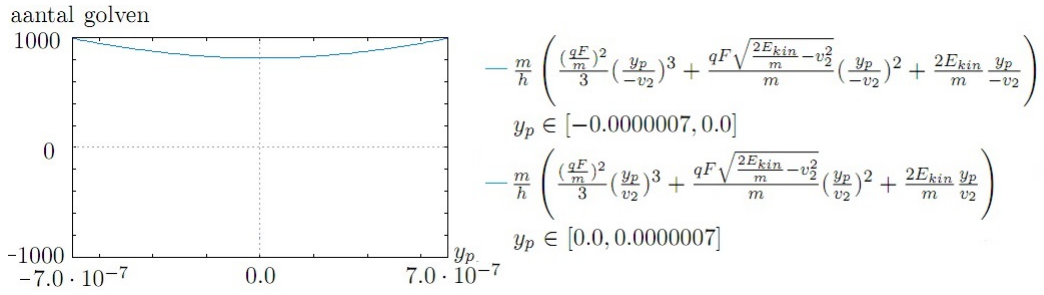
Als we  $E_{kin}$  gaan variëren, zien we aan de formule al dat  $y_{p_{max}}$  groter zal worden voor grotere waarde van  $E_{kin}$ . Als  $E_{kin}$  namelijk toeneemt, krijgen de elektronen een grotere beginenergie waardoor de beginsnelheid zal gaan toenemen. De uitwijking van de banen kan dus groter worden waardoor  $y_{p_{max}}$  zal toenemen.

De laatste variabel die we kunnen variëren is  $L$ . We merken op dat  $y_{p_{max}}$  groter zal worden voor grotere waarden van  $L$ . Dit komt doordat als de afstand groter wordt, de banen groter zullen worden en omdat de banen parabolisch zijn zal  $y_{p_{max}}$  ook groter worden.

## 5.4 Grafische weergave

Om de interferentie-afstand grafisch weer te geven, merken we eerst op dat als we kijken naar de formule voor het aantal golven van de elektronen die vertrekken vanuit  $(x, y) = (0, 0)$ , dan zien we dat er de termen  $(\frac{y_p}{v_2})^3$ ,  $(\frac{y_p}{v_2})^2$  en  $\frac{y_p}{v_2}$  in staan. Voor  $y_p = 0$  krijgen we dus een  $\frac{0}{0}$ -situatie en moeten we dus de limieten nemen. Zo krijgen we voor de eerste term  $\lim_{y_p \rightarrow 0} (\frac{y_p}{v_2})^3$ , enzovoort.

Om nu een grafiek met het punt  $y_p = 0$  erin te krijgen, nemen we  $y_p \in [-0.0000007, 0.0000007]$ . We merken nu wel op dat voor  $y_p \in [-0.0000007, 0.0]$   $v_2$  negatief is en voor  $y_p \in [0.0, 0.0000007]$   $v_2$  positief is. De grafiek die we krijgen, staat hieronder

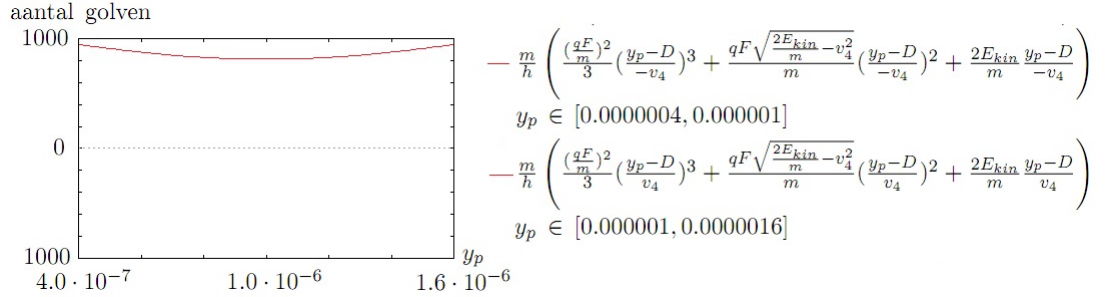


**Figuur 12**

Doordat  $y_p$  zich eerst in de richting van 0 beweegt en vervolgens weer groter wordt, is in de grafiek goed te zien dat het aantal golven eerst afneemt en daarna weer toeneemt.

Als we kijken naar de formule voor het aantal golven van de elektronen die vertrekken vanuit  $(x, y) = (0, D)$ , dan zien we dat er de termen  $(\frac{y_p - D}{-v_4})^3$ ,  $(\frac{y_p - D}{-v_4})^2$  en  $\frac{y_p}{v_2}$  in staan. We merken dus op dat we voor  $y_p = D$  een  $\frac{0}{0}$ -situatie hebben en dus de limieten moeten nemen. Zo krijgen we voor de eerste term  $\lim_{y_p \rightarrow D} (\frac{y_p}{v_2})^3$ , enzovoort. Om nu een grafiek met het punt  $y_p = D$  erin te krijgen, nemen we  $y_p \in [0.0000004, 0.0000016]$ .

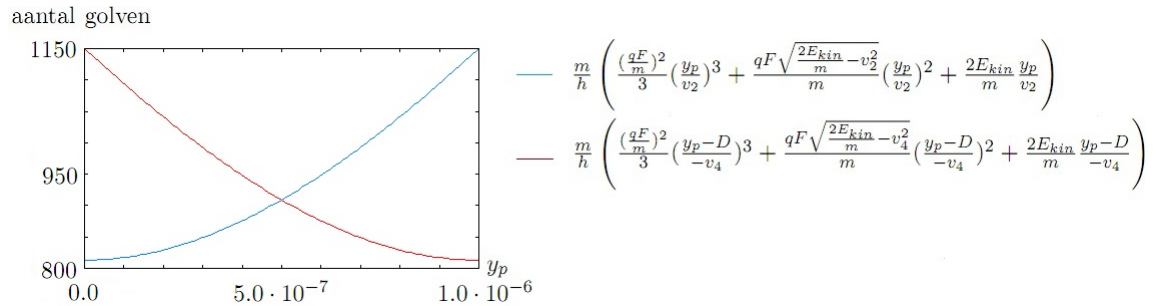
We merken nu wel op dat voor  $y_p \in [0.0000004, 0.000001]$ ,  $v_4$  negatief is en voor  $y_p \in [0.000001, 0.0000016]$  positief. De grafiek wordt dan:



**Figuur 13**

Doordat  $y_p$  zich eerst in de richting van  $D$  beweegt en vervolgens weer groter wordt, is in de grafiek goed te zien dat het aantal golven eerst afneemt en daarna weer toeneemt.

Om nu te laten zien voor welke  $y_p$  er een interferentie bestaat, zullen we het verschil in aantal golven grafisch weergeven. We kunnen in de grafiek dus aflezen dat als het verschil in aantal golven gelijk is aan  $k$  met  $k \in \mathbb{R}$ , er een interferentie is voor bijbehorende  $y_p$ .



**Figuur 14**

In bovenstaande figuur is goed te zien dat het klopt dat beide banen een gelijk aantal golven hebben op  $y_p = 5.0 \cdot 10^{-7} m$ . Beide banen bestaan dan uit  $\pm 920$  golven. Verder is te zien dat we de grenswaarden van  $y_p$  niet gelijk aan  $y_{p_{max}}$  en  $y_{p_{min}}$  hebben genomen. Dit komt doordat  $y_p$  dan teveel mogelijke waarden kan aannemen waardoor de grafiek onnauwkeurig wordt. We hebben gekozen voor  $y_p \in [0.0, 0.000001]$  zodat de verticale snelheid van de elektronen die vertekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  positief blijft en van de elektronen uit  $(x, y) = (0, D)$  negatief.

## 6 Conclusie

Met de methode die wij gebruikt hebben, vinden we eerst de baan die hoort bij elke  $y_p$  op plaat  $B$ . Doordat de elektronen uit twee plaatsen kunnen vertrekken vinden we voor elke  $y_p$  dus ook twee banen. Vervolgens bepalen we voor elke baan uit hoeveel golven deze baan bestaat. Als laatst bekijken we voor welke  $y_p$  2 banen met een gelijk aantal golven uit precies op hetzelfde moment aankomen. Door het verschil te nemen van 2 van zulke opeenvolgende  $y_p$ , vinden we de interferentie-afstand.

Het aantal golven van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, 0)$  wordt gegeven door:

$$\frac{m}{h} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2}}{m} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p}{v_2} \right).$$

Het aantal golven van de elektronen die vertrekken uit  $(x, y) = (0, D)$  wordt gegeven door:

$$\frac{m}{h} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}}{m} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p - D}{-v_4} \right).$$

Met verticale beginsnelheden:

$$v_2 = \sqrt{\frac{y_p^2(2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2y_p^2})}{2m(y_p^2 + L^2)}},$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{(y_p - D)^2(2E_{kin} + qFL + \sqrt{4E_{kin}^2 + 4E_{kin}qFL - q^2F^2(y_p - D)^2})}{2m((y_p - D)^2 + L^2)}}.$$

De interferentie-afstand wordt bepaald door het verschil van 2 opeenvolgende  $y_p$ 's te nemen die te berekenen zijn in de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{h} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_2^2}}{m} \left( \frac{y_p}{v_2} \right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p}{v_2} \right) - \\ & \frac{m}{h} \left( \frac{(qF)^2}{3} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^3 + \frac{qF \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m} - v_4^2}}{m} \left( \frac{y_p - D}{-v_4} \right)^2 + \frac{2E_{kin}}{m} \frac{y_p - D}{-v_4} \right) = k \end{aligned}$$

met 2 opeenvolgende  $k$ 's  $\in \mathbb{R}$ .



Als eenmaal de interferentie-afstand  $\Delta y_p$  is bepaald, is ook het aantal interferenties te bepalen. We merken eerst op dat er alleen interferentie plaatsvindt als:

$$D \leq 2\sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}.$$

Voor variabelen die hieraan voldoen geldt dat het aantal interferenties gelijk is aan:

$$\frac{y_{p_{max}} - y_{p_{min}}}{\Delta y_p},$$

waarbij geldt:

$$y_{p_{max}} = \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}},$$

$$y_{p_{min}} = D - \sqrt{\frac{4E_{kin}L}{qF}}.$$

In bovenstaande formules zien we ook dat het interferentiepatroon groter wordt naarmate  $E_{kin}$  en/of  $L$  groter wordt en kleiner wordt als  $F$  groter wordt.

## Referenties

- [1] Broglie, Louis de, The wave nature of the electron, Nobel Lecture, December 12, 1929.
- [2] Hiervoor hebben we de website [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) gebruikt.
- [3] De numerieke waarden zijn berekend met het Computer Algebra Systeem, Maxima.
- [4] R.Haberman, Applied Partial Differential Equations, fourth Edition, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- [5] G.J. Verbiest, J.N. Simon, T.H. Oosterkamp, M.J. Rost, Subsurface atomic force microscopy: towards a quantitative understanding, Nanotechnology 23, 2012.
- [6] H.D. Young and R.A. Freedman, University Physics, 12th edition, Addison Wesley.
- [7] Eugene Hecht, Optics, 4th edition, Addison Wesley.
- [8] G.R. Fowles and G.L. Cassiday, Analytical Mechanics, 7th edition, Thomson Learning, inc., 1999.