

Arthur Pijpers

# Discrete Tomografie op de Torus

Bachelorscriptie, 13 juni 2013

Scriptiebegeleider: prof.dr. K.J. Batenburg



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Basisresultaten op het vlak</b>	<b>4</b>
2.1	Twee richtingen: horizontaal en verticaal . . . . .	4
2.2	Meer richtingen . . . . .	5
<b>3</b>	<b>De oplossing <math>x^*</math></b>	<b>5</b>
3.1	Motivatie en definitie . . . . .	5
3.2	Eigenschappen van $x^*$ . . . . .	6
3.3	De formule voor $x^*$ bij twee richtingen . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Het torusmodel</b>	<b>7</b>
4.1	Definitie en eigenschappen . . . . .	8
4.2	De formule voor $x^*$ in een specifiek geval . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Nieuwe resultaten op de torus</b>	<b>10</b>
5.1	Eigenschappen van $x^*$ op de torus . . . . .	10
5.2	Een manier om $x^*$ te bepalen . . . . .	11
5.3	Concrete voorbeelden . . . . .	12
5.4	Het eindresultaat: de algemene formule voor $x^*$ op de torus . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Bijlage: Illustraties bij voorbeeld 3 (sectie 5.3)</b>	<b>17</b>

# 1 Inleiding

De *tomografie* houdt zich bezig met het reconstrueren van beelden vanuit de projecties in een beperkt aantal richtingen. Dit vakgebied heeft vele toepassingen, bijvoorbeeld in de geneeskunde (denk aan röntgenfoto's). Binnen de tomografie bestaat de *discrete tomografie*, waarbij de beelden die gereconstrueerd worden *binair beelden* zijn. Ook de discrete tomografie kent verschillende toepassingen, bijvoorbeeld bij de elektronenmicroscopie van nanodeeltjes [1]. In deze scriptie ga ik de discrete tomografie bekijken.

We definiëren eerst het *discrete tomografiemodel op het vlak*. Zij gegeven een rechthoekig rooster  $A = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\}$ . Een *richting* is een paar  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  met  $a, b$  copriem. De *lijnen* (van  $A$ ) in een richting  $(a, b)$  zijn de niet-lege verzamelingen van de vorm  $\{(x, y) \in A \mid ax - by = t\}$  voor een  $t \in \mathbb{Z}$ . Met een *binair beeld* (op  $A$ ) bedoelen we een functie  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ . De *lijnsom* van een lijn  $L$ , behorende bij een binair beeld  $f$ , is de som van de waarden op  $L$ , dus  $\sum_{(x,y) \in L} f(x, y)$ . Zij  $S = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)\}$  een verzameling verschillende richtingen. Met verschillend bedoelen we dat de richtingen verschillende lijnen induceren.

In de discrete tomografie wordt het verband tussen binaire beelden op  $A$  en de lijnsommen hiervan van alle lijnen in de richtingen van  $S$  bestudeerd. De belangrijkste vragen hierbij zijn:

- De lijnsommen behorende bij een binair beeld kunnen worden gerepresenteerd door een functie van de verzameling van alle lijnen naar  $\mathbb{N}$ . Gegeven een willekeurige functie van de verzameling van alle lijnen naar  $\mathbb{N}$ , bestaat er een binair beeld met deze lijnsommen?
- Zo ja, hoe kan zo een binair beeld gereconstrueerd worden?
- Gegeven een binair beeld, zijn er andere binaire beelden met dezelfde lijnsommen?
- Zo ja, in hoeverre kunnen deze beelden verschillend zijn?

In deze scriptie ga ik vooral in op de derde en vierde vraag. Eerst ga ik een aantal bekende resultaten geven, voor het discrete tomografiemodel op het vlak. Daarna introduceer ik een nieuw model, op de *torus*. Met dit nieuwe model kunnen sommige problemen die men tegenkomt op het vlakke model makkelijker opgelost worden. In het bijzonder ligt de focus op een speciale oplossing  $x^*$  van een nader te bepalen lineair stelsel. Met deze  $x^*$  kan men bovengrenzen geven voor verschillen tussen binaire beelden met dezelfde lijnsommen. Het zal blijken dat we op de torus de oplossing  $x^*$  op een elegante manier kunnen berekenen.

## 2 Basisresultaten op het vlak

In dit hoofdstuk bespreken we een aantal elementaire resultaten in de discrete tomografie. We gaan hierbij uit van het model op het vlak zoals gedefinieerd in de inleiding. Dit hoofdstuk is bedoeld om wat meer inzicht te krijgen in de discrete tomografie, en richt zich vooral op existentie en uniciteit van binaire beelden met bepaalde lijnsommen.

### 2.1 Twee richtingen: horizontaal en verticaal

Bekijk eerst het meest simpele geval met slechts de horizontale en verticale richtingen, d.w.z.  $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ . In dit geval zijn de lijnsommen dus eigenlijk rijssommen en kolomsommen. In dit geval is het precies bekend wanneer er een binair beeld bestaat met deze lijnsommen. Dit wordt gegeven in de volgende stelling.

**Stelling 2.1** Zij gegeven gehele getallen  $0 \leq r_0, r_1, \dots, r_{n-1} \leq m$  en  $0 \leq c_0, c_1, \dots, c_{m-1} \leq n$  zodanig dat  $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = \sum_{j=0}^{m-1} c_j$ . Er bestaat een binair beeld met rijssommen  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  en kolomsommen  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  dan en slechts dan als er voor alle deelverzamelingen  $I \subset \{0, 1, \dots, m-1\}$  en  $J \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$  geldt

$$\sum_{j \in J} r_j - \sum_{i \notin I} c_i \leq |I||J|.$$

Het is duidelijk dat er geen binair beeld met deze lijnsommen kan bestaan in het geval dat er verzamelingen  $I, J$  bestaan waarvoor deze eis niet voldaan is. Het bewijs de andere kant op is ingewikkelder, en is te vinden in [2, Theorem 1.2].

Ook de vraag wat alle beelden zijn met bepaalde lijnsommen heeft in het geval van twee richtingen een duidelijk antwoord, in de vorm van de volgende stelling van Ryser. Als twee binaire beelden dezelfde lijnsommen hebben in alle richtingen van  $S$ , noemen we deze beelden *tomografisch equivalent*.

**Stelling 2.2** (Ryser, 1957) Bekijk het geval  $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ . Twee binaire beelden zijn tomografisch equivalent dan en slechts dan als ze in elkaar over zijn te brengen door een eindig aantal 4-verbodelingen. Een 4-verbodeling is een verandering tussen binaire beelden die de volgende deelfiguren in elkaar overvoert (beide kanten op is toegestaan, en met de getallen op de puntjes gebeurt niets).

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \longleftrightarrow & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & & 1 & \dots & 0 \end{array}$$

Het is duidelijk dat een 4-verbodeling de lijnsommen niet verandert, en elke eindige combinatie van 4-verbodelingen dus ook niet. Het bewijs de andere kant op maakt gebruik van inductie naar het verschil  $d(f, g) := |\{(x, y) \in A \mid f(x, y) \neq g(x, y)\}|$  tussen twee binaire beelden  $f, g$  en is te vinden in [3].

## 2.2 Meer richtingen

Voor het geval van slechts twee richtingen is dus al veel bekend. Dit is anders in het geval van drie of meer richtingen. Er is dan geen simpele karakterisatie van vectoren natuurlijke getallen die als lijnsommen van een binair beeld kunnen voorkomen. Er bestaan echter wel algoritmen om in de praktijk een binair beeld met gegeven lijnsommen te reconstrueren, of een benadering daarvan als zo een beeld niet bestaat. De vraag of er, gegeven een binair beeld, tomografisch equivalente beelden bestaan is nog lastiger te beantwoorden. Er is zelfs een sterk negatief resultaat, zie de volgende stelling [2, Proposition 3.1]:

**Stelling 2.3** Zij  $S = (a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$  een gegeven verzameling richtingen met  $k \geq 2$ . Voor elke  $L \in \mathbb{N}$  bestaan er zekere  $n, m \in \mathbb{N}$  en binaire beelden  $f, g$  op  $A = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\}$  met de volgende eigenschappen:

- $d(f, g) > L$ .
- $f$  en  $g$  zijn tomografisch equivalent.
- Er bestaat geen binair beeld  $h$  verschillend van  $f$  en  $g$  met dezelfde lijnsommen.

Deze stelling impliceert dat er geen stelling analoog aan die van Ryser is voor meer dan twee richtingen. We zullen dus andere technieken moeten gebruiken om de verschillen tussen tomografisch equivalente beelden te bestuderen.

## 3 De oplossing $x^*$

In dit hoofdstuk maken we de stap naar (bovengrenzen van) verschillen tussen tomografisch equivalente binaire beelden. Een belangrijke rol hierin speelt het beeld  $x^*$  op  $A$ , waarvan we zullen zien dat het in het midden van alle binaire beelden ligt. Veel bovengrenzen van verschillen tussen tomografisch equivalente binaire beelden worden bepaald door  $x^*$  [4], en dus is het belangrijk om deze oplossing nader te bestuderen. We geven een aantal eigenschappen van  $x^*$ , een voorbeeld van een bovengrens waarbij we  $x^*$  gebruiken, en een formule voor  $x^*$  als functie van de lijnsommen in het geval van twee richtingen. Tevens merken we op dat voor meer dan twee richtingen een dergelijke formule nog niet is gevonden.

### 3.1 Motivatie en definitie

In de discrete tomografie wordt eigenlijk gezocht naar binaire oplossingen van een gegeven lineair stelsel. Het is interessant om dit lineaire stelsel verder te bestuderen, en bijvoorbeeld te kijken naar alle gehele of zelfs alle reële oplossingen hiervan. Het stelsel noteren we als  $Wx = p$ . De matrix  $W$  is hier de matrix met de lijnen in de richtingen van  $S$  als rijen, en de punten in  $A$  als kolommen. De waarde  $W_{ij}$  is dan gelijk aan 1 als het punt  $j$  op lijn  $i$  ligt, en anders gelijk aan 0. De vector  $p$  is de vector van alle lijnsommen, en de vector  $x$  is een beeld op  $A$ .

We zullen in het vervolg aannemen dat het stelsel  $Wx = p$  reële oplossingen heeft. In het bijzonder is hieraan voldaan als dit stelsel een binaire oplossing heeft. Een bijzonder interessante oplossing van dit stelsel is de *kortste reële oplossing* (als vector in  $\mathbb{R}^{nm}$ , met de Euclidische lengte), die we met  $x^*$  zullen noteren. Deze oplossing wordt gebruikt bij het bepalen van veel bovengrenzen van verschillen tussen tomografisch equivalente beelden [4]. De rest van deze scriptie gaat bestaan uit het bespreken van deze oplossing  $x^*$ , en hoe deze afhangt van de lijnsommen.

### 3.2 Eigenschappen van $x^*$

We beginnen met het geven van twee belangrijke eigenschappen van  $x^*$ .

**Stelling 3.1**  $x^*$  is de unieke oplossing van  $Wx = p$  die loodrecht staat op elke oplossing van het stelsel  $Wx = 0$ .

*Bewijs:* Het is bekend uit de lineaire algebra dat de kortste vector in een affien vlak (hier de oplossingen van  $Wx = p$ ) de loodrechte projectie vanuit 0 op dit vlak is. Tevens is deze loodrechte projectie uniek. ■

**Stelling 3.2**  $x^*$  is, als functie van de lijnsommen, lineair.

*Bewijs:* Zij gegeven twee sets lijnsommen  $p_1$  en  $p_2$ , met bijbehorende kortste reële oplossingen  $x_1^*$  resp.  $x_2^*$ . Zij  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  constanten. Dan geldt  $W(\lambda x_1^* + \mu x_2^*) = \lambda W(x_1^*) + \mu W(x_2^*) = \lambda p_1 + \mu p_2$  en voor elke  $y$  met  $Wy = 0$  geldt  $\langle \lambda x_1^* + \mu x_2^*, y \rangle = \lambda \langle x_1^*, y \rangle + \mu \langle x_2^*, y \rangle = 0$ .

Met behulp van stelling 3.1 zien we nu dat  $\lambda x_1^* + \mu x_2^*$  de kortste reële oplossing is behorende bij de lijnsommen  $\lambda p_1 + \mu p_2$ . ■

Nu laten we een voorbeeld zien van een bovengrens voor het verschil tussen twee tomografisch equivalente beelden, beschreven in [4]. Merk op dat we hier, zoals bij veel van dit soort bovengrenzen, de oplossing  $x^*$  gebruiken.

**Stelling 3.3** Zij  $x_1$  en  $x_2$  twee binaire beelden op  $A$  die voldoen aan het stelsel  $Wx = p$ . Dan geldt  $d(x_1, x_2) := |\{(i, j) \in A \mid x_1(i, j) \neq x_2(i, j)\}| \leq 4R^2$  waarbij  $R := \sqrt{D - \|x^*\|_2^2}$ , en  $D := \frac{\|p\|_1}{k}$ . We gebruiken hierbij de notatie  $\|\cdot\|_p$  voor de  $L^p$ -norm. Merk op dat  $D$  het aantal enen is in een binair beeld dat voldoet aan  $Wx = p$ .

*Bewijs:* Omdat  $x_1$  een binair beeld is geldt er  $\|x_1\|_2^2 = \|x_1\|_1 = D$ . Daarnaast weten we dat  $x^*$  loodrecht staat op  $x_1 - x^*$  en met de stelling van Pythagoras vinden we dat de afstand tussen  $x^*$  en  $x_1$  gelijk is aan  $\|x^* - x_1\|_2 = \sqrt{\|x_1\|_2^2 - \|x^*\|_2^2} = R$ . Op dezelfde manier geldt uiteraard dat de afstand tussen  $x^*$  en  $x_2$  ook gelijk is aan  $R$ . Toepassen van de driehoeksongelijkheid geeft dan dat de afstand tussen  $x_1$  en  $x_2$  niet groter is dan  $2R$ . Omdat  $x_1$  en  $x_2$  allebei binaire beelden zijn heeft het beeld  $x_1 - x_2$  alleen waarden in  $\{-1, 0, 1\}$ . In het bijzonder geldt voor al deze waarden  $i$  de gelijkheid  $i^2 = |i|$ . Er geldt dus  $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_1 = \|x_1 - x_2\|_2^2 \leq (2R)^2 = 4R^2$ .

### 3.3 De formule voor $x^*$ bij twee richtingen

De vraag is hoe we de lineaire afbeelding die  $x^*$  geeft als functie van de lijnsommen expliciet kunnen bepalen voor gegeven  $S, n, m$ . We beginnen weer met het simpele geval,  $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ . Het is misschien geen verrassing dat de functie voor  $x^*$  hier bekend is [5]. Het resultaat wordt gegeven in de volgende stelling:

**Stelling 3.4** Bekijk het discrete tomografiemodel op het  $m \times n$  vlak met  $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ . We hebben dan rijssommen  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  en kolomsommen  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ . Voor de kortste reële oplossing  $x^*$  van het bijbehorende lineaire stelsel  $Wx = p$  geldt dan

$$x^*(i, j) = \frac{c_i}{n} + \frac{r_j}{m} - \frac{D}{nm}$$

waarbij

$$D = \sum_{j=0}^{n-1} r_j = \sum_{i=0}^{m-1} c_i.$$

*Bewijs:* We laten eerst zien dat  $x^*$  voldoet aan het lineaire stelsel. Voor elke  $0 \leq i < n$  geldt namelijk

$$\sum_{j=0}^{n-1} x^*(i, j) = \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{c_i}{n} + \frac{r_j}{m} - \frac{D}{nm} \right) = c_i + \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{r_j}{m} \right) - \frac{D}{m} = c_i$$

en voor elke  $0 \leq j < m$  geldt

$$\sum_{i=0}^{m-1} x^*(i, j) = \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{c_i}{n} + \frac{r_j}{m} - \frac{D}{nm} \right) = \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{c_i}{n} \right) + r_j - \frac{D}{n} = r_j.$$

Nu laten we zien dat  $x^*$  loodrecht staat op de kern van het lineaire stelsel. Zij hiervoor  $h \in \ker(W)$  gegeven. Alle lijnsommen van  $h$  zijn dan nul en dus geldt er:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} x^*(i, j) h(i, j) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \left( \frac{c_i}{n} + \frac{r_j}{m} - \frac{D}{nm} \right) h(i, j) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{c_i}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h(i, j) \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left( \left( \frac{r_j}{m} - \frac{D}{mn} \right) \sum_{i=0}^{m-1} h(i, j) \right) = 0. \end{aligned}$$

■

Voor meer dan twee richtingen is er echter nog geen expliciete uitdrukking voor  $x^*$  als functie van de lijnsommen bekend. Eén van de grote problemen is dat voor een richting verschillend van  $(0, 1)$  en  $(1, 0)$  niet alle lijnen in die richting evenveel punten bevatten. Om, onder andere, dit probleem te omzeilen introduceren we het *torusmodel*.

## 4 Het torusmodel

In dit hoofdstuk definiëren we een nieuw discrete tomografiemodel, namelijk op de torus in plaats van op het vlak. We bespreken een aantal eigenschappen van dit nieuwe torusmodel, en geven een formule voor  $x^*$  als functie van de lijnsommen voor een willekeurig aantal richtingen onder specifieke voorwaarden.

## 4.1 Definitie en eigenschappen

We definiëren het *discrete tomografiemodel op de torus* als volgt: Laat  $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , definieer het begrip *richting* weer als een paar  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  met  $a, b$  copriem en definieer de lijnen d.m.v. parametrisaties. Een lijn in de richting  $(a, b)$  is dus van de vorm  $\{(i + at, j + bt) \mid t \in \mathbb{Z}\}$  voor een punt  $(i, j) \in A$ . Zij  $S = \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$  een verzameling verschillende richtingen, waarbij we met verschillend weer bedoelen dat de richtingen verschillende lijnen induceren.

Aan de hand van dit model kunnen we lijnsommen, het stelsel  $Wx = p$  en de kortste reële oplossing  $x^*$  analoog aan het vlakke model definiëren. Het torusmodel dat we nu hebben lijkt veel op het model op het vlak, maar er zijn een aantal belangrijke verschillen. De volgende stelling laat hier één van zien:

**Stelling 4.1** Bekijk het torusmodel en zij  $(a, b)$  een richting. Alle lijnen in de richting  $(a, b)$  bevatten dan evenveel punten.

*Bewijs:* Het aantal punten op een toruslijn  $\{(i + at, j + bt) \mid t \in \mathbb{Z}\}$  is de periode van de functie  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, t \mapsto (i + at, j + bt)$ . Deze is gelijk aan de kleinste positieve  $t \in \mathbb{Z}$  waarvoor geldt  $m \mid at$  en  $n \mid bt$ . In het bijzonder is deze onafhankelijk van  $i$  en  $j$ . ■

We willen proberen de expliciete formule voor  $x^*$  in het geval met twee richtingen te veralgemeniseren voor meer richtingen met het torusmodel. We weten dat in ieder geval alle lijnen in dezelfde richting evenveel punten bevatten. Het geval van twee richtingen heeft echter ook nog twee andere mooie eigenschappen, die in het algemeen niet waar zijn in het torusmodel.

- Voor elke richting  $(a, b) \in S$ , geldt dat alle lijnen in de richtingen in  $S \setminus (a, b)$  evenveel punten bevatten.
- Elk tweetal lijnen in verschillende richtingen snijdt elkaar in precies één punt.

Neem aan dat  $m = n$ , dus dat we een *vierkant* bekijken. Dan is het mogelijk om te laten zien wanneer bovenstaande twee eigenschappen gelden, en dat in die gevallen er een expliciete formule voor  $x^*$  bestaat.

**Stelling 4.2** Bekijk het torusmodel op een  $n \times n$  vierkant. Dan bestaat elke lijn uit precies  $n$  punten.

*Bewijs:* Bekijk een lijn met richting  $(a, b)$ . We zoeken de kleinste positieve gehele  $t$  waarvoor geldt  $n \mid at$  en  $n \mid bt$ . Aangezien  $(a, b)$  een richting is geldt  $\text{ggd}(a, b) = 1$ , en dus ook  $\text{ggd}(at, bt) = t$ . Het getal  $n$  deelt zowel  $at$  als  $bt$ , en dus moet gelden  $t \geq n$ . We zien ook dat de waarde  $t = n$  voldoet aan de eisen, en dus bevat elke toruslijn precies  $n$  punten. ■

**Gevolg 4.3** Er zijn op de  $n \times n$  torus precies  $n$  lijnen in elke richting.

Aan de eerste voorwaarde is op een vierkant dus altijd voldaan. We gaan nu onderzoeken wanneer ook de tweede voorwaarde geldt. Eerst geven we een andere manier om toruslijnen te bekijken, en daarna kunnen we nodige en voldoende voorwaarden geven.

**Stelling 4.4** De lijnen in het  $n \times n$  torusmodel in de richting  $(a, b)$  zijn allemaal van de vorm  $\{(x, y) \in A \mid bx - ay \equiv c \pmod{n}\}$  voor een  $c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .



*Bewijs:* Het is duidelijk dat  $bx - ay$  constant blijft modulo  $n$  op de toruslijn  $\{(i + at, j + bt) \mid t \in \mathbb{Z}\}$ . Tevens zijn geen van de verzamelingen  $\{(x, y) \in A \mid bx - ay \equiv c \pmod{n}\}$  leeg, omdat  $a$  en  $b$  copriem zijn. Dus bevatten de  $n$  verzamelingen  $\{(x, y) \in A \mid bx - ay \equiv c \pmod{n}\}$  voor  $c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  allen minimaal  $n$  punten. Hiermee hebben we alle  $n^2$  punten uit  $A$  al, en dus zijn de verzamelingen  $\{(x, y) \in A \mid bx - ay \equiv c \pmod{n}\}$  precies de lijnen in de richting  $(a, b)$ . ■

**Stelling 4.5** Bekijk het  $n \times n$  torusmodel. Een willekeurige toruslijn in de richting  $(a, b)$  en een willekeurige toruslijn in de richting  $(c, d)$  snijden elkaar precies één keer dan en slechts dan als  $\text{ggd}(ad - bc, n) = 1$ .

*Bewijs:* We kijken naar het aantal snijpunten van de toruslijnen  $bx - ay \equiv c_1 \pmod{n}$  en  $dx - cy \equiv c_2 \pmod{n}$ . Dit aantal is voor alle  $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  gelijk aan één dan en slechts als het endomorfisme op  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$  gegeven door de matrix  $A = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$  injectief is, of equivalent, als het triviale kern heeft. Stel dat geldt  $\text{ggd}(ad - bc, n) \neq 1$ , en zij  $p$  een priemdelers van  $\text{ggd}(ad - bc, n)$ . Dan heeft  $A$  in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  determinant nul, en bestaat er dus een vector  $q \in \mathbb{Z}^2 \setminus p\mathbb{Z}^2$  met  $Aq \in p\mathbb{Z}^2$ . Hieruit volgt dat geldt  $\frac{n}{p}q \notin n\mathbb{Z}^2$  en  $A(\frac{n}{p}q) \equiv 0 \pmod{n}$ . Stel nu dat geldt  $\text{ggd}(ad - bc, n) = 1$ . Dan is  $ad - bc$  inverteerbaar modulo  $n$ , en bestaat er een inverse van  $A$ , namelijk  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix}$ . De matrix  $A$  is dan dus injectief. ■

## 4.2 De formule voor $x^*$ in een specifiek geval

Nu kunnen we eindelijk, onder een aantal aannames, een expliciete formule voor  $x^*$  als functie van de lijnsommen vinden. Deze formule is ook al gegeven in [5].

**Stelling 4.6** Bekijk het discrete tomografiemodel op de  $n \times n$  torus, met richtingsverzameling  $S = \{(a_1, b_1) \dots (a_k, b_k)\}$ . Neem bovendien aan dat voor alle  $0 < i < j \leq k$  geldt  $\text{ggd}(a_i b_j - b_i a_j, n) = 1$ . Noteer de lijnsom van de toruslijn met richting  $(a, b)$  die door punt  $(i, j)$  gaat als  $L_{a,b,i,j}$ . Definieer  $D$  weer als het totale aantal vakjes met waarde 1, dus de som van alle lijnsommen in een richting. Voor de kortste reële oplossing  $x^*$  van het bijbehorende lineaire stelsel geldt dan

$$x^*(i, j) = \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^k (L_{a_t, b_t, i, j}) - \frac{(k-1)D}{n} \right).$$

*Bewijs:* We laten eerst zien dat  $x^*$  een oplossing is van het lineaire stelsel. Bekijk een toruslijn  $l$  met de richting  $(a_t, b_t)$ . Dan geldt

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in l} x^*(i, j) &= \frac{-(k-1)D}{n} + \sum_{(i,j) \in l} \left( \frac{L_{a_t, b_t, i, j}}{n} + \sum_{(a,b) \in S \setminus (a_t, b_t)} \frac{L_{a,b,i,j}}{n} \right) \\ &= \frac{-(k-1)D}{n} + L_{a_t, b_t, i, j} + \frac{(k-1)D}{n} \\ &= L_{a_t, b_t, i, j}. \end{aligned}$$

We hebben hierbij gebruikt dat voor twee verschillende richtingen  $(a, b)$  en  $(c, d)$  de  $n$  punten op een lijn met de richting  $(a, b)$  precies liggen op de  $n$  lijnen met richting  $(c, d)$ . Dit feit volgt uit stelling 4.5.

We laten nu zien dat  $x^*$  loodrecht staat op de kern van  $W$ . Zij  $h$  een element uit deze kern. Noteer de verzameling toruslijnen met richting  $(a_t, b_t)$  als  $L_t$  en de lijnsom van een toruslijn  $l$  als  $S_l$ . Er geldt dan

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \in A} x^*(i,j)h(i,j) &= \sum_{(i,j) \in A} \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^k (L_{a_t, b_t, i, j}) - \frac{(k-1)T}{n} \right) h(i,j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^k \sum_{l \in L_t} \sum_{(i,j) \in l} \left( \left( S_l - \frac{(k-1)T}{nk} \right) h(i,j) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^k \sum_{l \in L_t} \left( S_l - \frac{(k-1)T}{nk} \right) \sum_{(i,j) \in l} h(i,j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

## 5 Nieuwe resultaten op de torus

In dit hoofdstuk kijken we verder naar  $x^*$  op de torus. In het bijzonder gaan we op zoek naar een zo algemeen mogelijke formule voor  $x^*$  als functie van de lijnsommen. Eerst geven we een aantal eigenschappen waar deze formule aan moet voldoen, en daarna geven we een manier om deze formule te bepalen door een lineair stelsel op te lossen. Hiermee zullen we een aantal voorbeelden uitwerken om meer inzicht te krijgen en ten slotte een algemene formule voor  $x^*$  te produceren. Neem in dit hoofdstuk, tenzij anders vermeld, aan dat  $m = n$ .

### 5.1 Eigenschappen van $x^*$ op de torus

We gaan proberen om in nog algemenere gevallen een expliciete functie voor  $x^*$  vanuit de lijnsommen te geven. De volgende stellingen geven de richting aan waarin we moeten zoeken.

**Stelling 5.1** De functie die  $x^*$  geeft vanuit de lijnsommen is lineair in de lijnsommen.

*Bewijs:* Hetzelfde als in het vlakke geval.

■

We kunnen dus schrijven

$$x^*(i, j) = \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(i, j, x, y, t) L_{a_t, b_t, i+x, j+y}$$

waarbij  $X_t$  een verzameling van punten uit  $A$  is zodanig dat op elke lijn in de richting  $(a_t, b_t)$  precies één punt uit  $X_t$  ligt. Dat we deze manier hebben gekozen om over alle lijnen te sommeren heeft te maken met het feit dat alle punten op de torus als het ware 'hetzelfde' zijn. Daardoor voldoen de constanten in bovenstaande uitdrukking aan speciale voorwaarden. Dit resultaat wordt gegeven in de volgende stelling:

**Stelling 5.2** De constanten  $c(i, j, x, y, t)$  in bovenstaande uitdrukking hangen niet af van  $(i, j)$ .

*Bewijs:* Zij twee punten  $(i, j), (r, s) \in A$  gegeven. Er geldt dan

$$x^*(i, j) = \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(i, j, x, y, t) L_{a_t, b_t, i+x, j+y}$$

en

$$x^*(i+r, j+s) = \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(i+r, j+s, x, y, t) L_{a_t, b_t, i+r+x, j+s+y}.$$

Maar ook geldt, omdat we op een torus werken, dat  $x^*(i+r, j+s)$  op dezelfde manier van de lijnsommen  $L_{a_t, b_t, i+r+x, j+s+y}$  afhangt als  $x^*(i, j)$  van de lijnsommen  $L_{a_t, b_t, i+x, j+y}$ . Dus geldt er

$$x^*(i+r, j+s) = \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(i, j, x, y, t) L_{a_t, b_t, i+r+x, j+s+y}$$

waarmee we zien dat geldt  $c(i, j, x, y, t) = c(i+r, j+s, x, y, t)$ . Dit geldt voor elke  $(r, s) \in A$ , en dus zijn de constanten in elk punt gelijk. ■

We zullen deze eigenschap voortaan ook wel *invariant onder translaties* noemen. We geven nu een nuttig resultaat dat volgt uit invariantie onder translaties.

**Stelling 5.3** Elk element van het beeld van elke lineaire functie van de lijnsommen naar  $\mathbb{R}^{n^2}$  die invariant is onder translaties staat loodrecht op het vlak  $Wx = 0$ .

*Bewijs:* Bekijk een lineaire functie

$$f(i, j) = \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) L_{a_t, b_t, i+x, j+y}.$$

Zij  $h \in \ker(W)$  gegeven. Voor een lijn  $l$  en een punt  $(x, y)$ , noteer met  $l + (x, y)$  de lijn  $\{(i+x, j+y) \mid (i, j) \in l\}$ , die uiteraard in dezelfde richting als  $l$  loopt. Er geldt:

$$\begin{aligned} \langle f, h \rangle &= \sum_{(i,j) \in A} f(i, j) h(i, j) \\ &= \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) L_{a_t, b_t, i+x, j+y} h(i, j) \\ &= \sum_{t=1}^k \sum_{l \in L_t} \sum_{(x,y) \in X_t} \sum_{(i,j) \in l} c(x, y, t) L_{a_t, b_t, i+x, j+y} h(i, j) \\ &= \sum_{t=1}^k \sum_{l \in L_t} \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) S_{l+(x,y)} \sum_{(i,j) \in l} h(i, j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

## 5.2 Een manier om $x^*$ te bepalen

We zoeken dus constanten  $c(x, y, t)$  zodanig dat de uitdrukking voor  $x^*$  zoals boven gegeven voldoet aan het stelsel  $Wx = p$ .

De vergelijkingen waar deze constanten dan aan moeten voldoen vormen zelf ook een lineair stelsel. Merk op dat dit stelsel geen unieke oplossing heeft, aangezien er lineaire afhankelijkheden tussen de lijnen bestaan. Wel geldt natuurlijk dat elke oplossing van het stelsel de (unieke) functie voor  $x^*$  geeft. Hoe dit stelsel eruit ziet is gegeven in de volgende stelling:

**Stelling 5.4** Nummer de lijnen  $(l_1, l_2, \dots, l_{nk})$ . Zij  $B$  de  $nk \times nk$  matrix gedefinieerd door  $B_{r,s} = |l_r \cap l_s|$ . Definieer  $c(i, j) = (c_1, \dots, c_{nk})$  als de vector waarbij  $c_r$  de constante voor de lijnsom van lijn  $l_r$  in de formule voor  $x^*(i, j)$  is.

Definieer de vector  $x(i, j) = (x_1, \dots, x_{nk})$  door  $x_r = 1$  als  $(i, j) \in l_r$  en  $x_r = 0$  als  $(i, j) \notin l_r$ . Voor alle  $(i, j) \in A$  geldt dan  $Bc(i, j) = x(i, j)$ . Tevens geldt dat elke oplossing van het stelsel  $Bc(i, j) = x(i, j)$  de uitdrukking voor  $x^*$  induceert. Merk op dat vanwege stelling 5.2 we dit stelsel voor slechts één punt  $(i, j)$  hoeven op te lossen. Sterker nog, we zullen voor elk punt hetzelfde stelsel krijgen.

*Bewijs:* Leg voor iedere richting  $(a_t, b_t)$  een verzameling  $X_t$  van  $n$  punten vast waarvan er geen twee op één lijn in de richting  $(a_t, b_t)$  liggen (zie gevolg 4.3). Noteer met  $l(x, y, a_t, b_t)$  de lijn door punt  $(x, y)$  in de richting  $(a_t, b_t)$  en met  $L_t$  de verzameling van alle lijnen in de richting  $(a_t, b_t)$ . Zij  $(p_1, p_2) \in A$  een punt,  $(a_w, b_w)$  een richting en  $l$  een lijn in de richting  $(a_w, b_w)$  door  $(p_1, p_2)$ . We berekenen nu

$$\begin{aligned}
S_l &= \sum_{(i,j) \in l} x^*(i, j) \\
&= \sum_{(i,j) \in l} \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) L_{a_t, b_t, i+x, j+y} \\
&= \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) \sum_{(i,j) \in l} L_{a_t, b_t, i+x, j+y} \\
&= \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) \sum_{(i,j) \in l+(x,y)} L_{a_t, b_t, i, j} \\
&= \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) \sum_{(i,j) \in l(p_1+x, p_2+y, a_t, b_t)} L_{a_w, b_w, i, j} \\
&= \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) \sum_{L \in L_w} S_L \cdot |L \cap l(p_1+x, p_2+y, a_t, b_t)| \\
&= \sum_{L \in L_w} S_L \sum_{t=1}^k \sum_{(x,y) \in X_t} c(x, y, t) \cdot |L \cap l(p_1+x, p_2+y, a_t, b_t)| \\
&= \sum_{L \in L_w} S_L \sum_{s=1}^{nk} c_s(p_1, p_2) \cdot |L \cap l_s|.
\end{aligned}$$

De rechterzijde in de laatste uitdrukking moet hier gelijk zijn aan 1 bij  $L = l$  en anders gelijk aan 0. Dit geldt uiteraard voor iedere  $1 \leq w \leq k$ , waarmee de stelling bewezen is. ■

### 5.3 Concrete voorbeelden

We kunnen voor specifieke voorbeelden de formule voor  $x^*$  dus concreet berekenen. Dit kan mogelijk inzicht geven in het gedrag van deze formule in het algemene geval.

**Voorbeeld 1** Neem  $n = 4$ ,  $S = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$ . Dan krijgen we na het oplossen van het stelsel verkregen door stelling 5.4 de volgende formule:  $x^*(i, j) = \frac{1}{4} \sum_{t=1}^3 L_{i,j,a_t,b_t} - \frac{1}{16}D - \frac{2}{16}D'$ , waarbij  $D'$  het aantal enen (van een beeld dat aan de lijnsommen voldoet) in de verzameling  $Q = \{(x, y) \in A \mid x \equiv j \pmod{2}\}$  is. We kunnen  $Q$  zien als de rij waarop  $(i, j)$  ligt verenigd met de rij twee hoger. We kunnen  $Q$  ook zien als de vereniging van alle lijnen in de richting  $(1, 2)$  die door een punt in de rij van  $(i, j)$  gaan.

De formule uit dit voorbeeld vertoont sterke gelijkenissen met de algemene formule in het geval dat lijnen in verschillende richtingen elkaar precies eenmaal snijden. Ter herinnering: in dat geval hadden we

$$x^*(i, j) = \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^k (L_{a_t,b_t,i,j}) - \frac{(k-1)D}{n} \right).$$

We zien in ons voorbeeld alweer de term  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t}$ , het verschil is dat de andere term in ons geval eruit ziet als  $\frac{1}{n^2}(D + 2D')$  in plaats van  $\frac{1}{n^2}D(k-1)$ . Aangezien geldt  $k-1 = 2$  is het enige verschil dat we nu een term  $2D'$  in plaats van  $D$  hebben.

Dit is goed te verklaren als we naar de richtingsverzameling  $S$  kijken. Stel dat we na willen gaan of de formule voor  $x^*$  klopt, en de som over een lijn in de richting  $(1, 2)$  berekenen. Bekijk eerst de term  $\frac{1}{4} \sum_{t=1}^3 L_{i,j,a_t,b_t}$ . Het deel  $t = 3$  geeft de lijnsom die we als uitkomst willen hebben. Het deel  $t = 1$  geeft een term  $\frac{D}{16}$ , omdat een lijn in de richting  $(0, 1)$  en een lijn in de richting  $(1, 2)$  elkaar precies eenmaal snijden. Het deel  $t = 2$  verklaart de formule voor  $x^*$ : twee lijnen in de richting  $(1, 0)$  worden tweemaal geteld en de andere twee lijnen in die richting worden niet geteld. We krijgen dus een term  $\frac{2D'}{16}$ , zodat we precies goed uitkomen. Merk op dat een soortgelijke redenering ook zou kunnen worden toegepast in voorbeelden met een grotere of zelfs algemene  $n$ .

Met behulp van dit voorbeeld kunnen we een algemene formule vinden voor het geval  $S = \{(0, 1), (1, 0), (a, b)\}$ . Definieer  $d_1$  als het aantal keren dat een lijn in de richting  $(0, 1)$  en een lijn in de richting  $(a, b)$  elkaar snijden (waarbij we de lijnen zodanig kiezen dat ze elkaar snijden) en  $d_2$  analoog voor de richtingen  $(1, 0)$  en  $(a, b)$ . Definieer  $Q_1(i, j)$  als de vereniging van alle lijnen in de richting  $(a, b)$  die door een punt in de kolom van  $(i, j)$  gaan, en  $Q_2(i, j)$  als de vereniging van alle lijnen in de richting  $(a, b)$  die door een punt in de rij van  $(i, j)$  gaan. Definieer  $D_1$  en  $D_2$  als het aantal enen op  $Q_1$  resp.  $Q_2$ . Dit zijn constanten aangezien  $Q_1$  en  $Q_2$  allebei een disjuncte vereniging van lijnen zijn. Dan geldt de volgende algemene formule:

**Stelling 5.5** Zij  $S = \{(0, 1), (1, 0), (a, b)\}$ , op de  $n \times n$  torus. Dan geldt

$$x^*(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t} - \frac{d_1 D_1}{n^2} - \frac{d_2 D_2}{n^2}.$$

*Bewijs:* Recht toe recht aan uitwerken. Voor elke richting gaat het analoog aan de redenering voor de richting  $(1, 2)$  bij het voorbeeld met  $(a, b) = (1, 2)$ . ■

In alle gevallen die we tot nu toe hebben bekeken zag de formule voor  $x^*$  er als volgt uit:  $x^*(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t}$  min  $k-1$  termen die lijken op  $\frac{D}{n^2}$ , waarbij  $D$  mogelijk vervangen wordt door het aantal enen in een kleinere deelverzameling van  $A$  (bij  $D$  nemen we het aantal enen over heel  $A$ ).

Er moet dan gekeken worden of de som van  $x^*$  over alle punten in een bepaalde lijn inderdaad de juiste lijnsom geeft. Dit geeft het volgende idee om tot de formule voor  $x^*$  te komen:

- Kies een richting  $(a_r, b_r)$  (nog niet duidelijk hoe).
- Bereken  $X(i, j) = S_l - \sum_{(i,j) \in l} (\frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t})$  als functie van de lijnsommen voor een lijn  $l$  in de richting  $(a_r, b_r)$ .
- Er geldt  $x^*(i, j) = \sum_{(i,j) \in l} (\frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t}) + X(i, j)$ .

In alle voorgaande situaties zou dit recept gewerkt hebben, mits we de juiste richting  $(a_r, b_r)$  hadden gekozen. Ook is duidelijk dat het niet per constructie werkt, er wordt namelijk alleen gegarandeerd dat de sommen in de richting  $(a_r, b_r)$  kloppen, in de andere richtingen kan het nog misgaan. De vraag is of de formule voor  $x^*$  altijd op deze manier te krijgen is, en het antwoord blijkt 'nee' te zijn.

**Voorbeeld 2** Neem  $S = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\}$  en  $n = 4$ . Dan snijden een lijn in de richting  $(0, 1)$  en een lijn in de richting  $(2, 1)$  tweemaal (indien ze snijden), en een lijn in de richting  $(1, 0)$  en een lijn in de richting  $(1, 2)$  ook. Voor alle andere paren verschillende richtingen geldt dat twee lijnen elkaar precies één keer snijden. In het bijzonder zien we dat we niet meer één richting kunnen kiezen zoals in alle voorgaande gevallen. Als we namelijk  $(0, 1)$  of  $(2, 1)$  kiezen, dan komt het tweemaal snijden tussen lijnen in de richtingen  $(1, 0)$  en  $(1, 2)$  niet in de formule voor  $x^*$  voor, en als we  $(1, 0)$  of  $(1, 2)$  kiezen komt het tweemaal snijden tussen lijnen in de richtingen  $(0, 1)$  en  $(2, 1)$  niet voor.

Voordat we de formule voor  $x^*$  bij dit voorbeeld geven voeren we wat handige notatie in. Voor een niet-lege deelverzameling  $V = \{(a_1, b_1), \dots, (a_w, b_w)\} \subset S$  definiëren we  $Q(V)(i, j) := \{(i, j) + \lambda_1(a_1, b_1) + \dots + \lambda_w(a_w, b_w) \in A \mid \lambda_1, \dots, \lambda_w \in \mathbb{Z}\}$ . Merk de gelijkenis op met de verzamelingen in eerdere voorbeelden die met de letter  $Q$  aangegeven werden. Aangezien een verzameling  $Q(V)(i, j)$  altijd een disjuncte vereniging van lijnen is kunnen we spreken over het aantal enen op  $Q(V)(i, j)$ , dat we aanduiden met  $D(V)(i, j)$ . Merk weer de gelijkenis op met waarden die we eerder met de letter  $D$  hebben aangegeven.

Nu gaan we weer terug naar ons voorbeeld, de formule voor  $x^*$  wordt gegeven door

$$\begin{aligned} x^*(i, j) &= \frac{1}{4} \sum_{t=1}^4 L_{i,j,a_t,b_t} - \left( \frac{D}{16} + \frac{D(\{(0, 1), (2, 1)\})(i, j)}{8} + \frac{D(\{(1, 0), (1, 2)\})(i, j)}{8} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t} - \left( \frac{D}{n^2} + \frac{D(\{(0, 1), (2, 1)\})(i, j)}{|Q(\{(0, 1), (2, 1)\})(i, j)|} + \frac{D(\{(1, 0), (1, 2)\})(i, j)}{|Q(\{(1, 0), (1, 2)\})(i, j)|} \right). \end{aligned}$$

De oplossing is dus van een iets andere vorm dan in alle vorige gevallen, maar nog steeds zijn er grote gelijknissen. Als we ook nog opmerken dat we kunnen schrijven  $\frac{D}{n^2} = \frac{D(\{(0, 1), (1, 0)\})(i, j)}{|Q(\{(0, 1), (1, 0)\})(i, j)|}$  zien

we dat we  $x^*(i, j)$  kunnen schrijven als  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t}$  min  $k - 1$  termen van de vorm  $\frac{D(V)(i, j)}{|Q(V)(i, j)|}$  voor een verzameling  $V \subset S$ . Ook valt nog op dat we steeds verzamelingen  $V$  van twee richtingen kunnen kiezen. We kunnen ons afvragen of dit in het algemeen mogelijk is, en nog steeds blijkt dit niet zo te zijn. De tegenvoorbeelden worden echter al een stuk groter.

**Voorbeeld 3** Neem  $n = 30$  en  $S = \{(0, 1), (2, 1), (3, 4)\}$ . Een lijn in de richting  $(0, 1)$  en een lijn in de richting  $(2, 1)$  snijden elkaar tweemaal (indien ze snijden).

Een lijn in de richting  $(0, 1)$  en een lijn in de richting  $(3, 4)$  snijden elkaar driemaal (indien de lijnen snijden), en een lijn in de richting  $(2, 1)$  en een lijn in de richting  $(3, 4)$  zelfs vijfmaal. In het bijzonder leidt dit ertoe dat de verzamelingen  $Q(\{(0, 1), (2, 1)\})(i, j)$ ,  $Q(\{(0, 1), (3, 4)\})(i, j)$  en  $Q(\{(3, 4), (2, 1)\})(i, j)$  niet in elkaar bevat zijn. Ook is duidelijk dat deze drie verzamelingen allemaal moeten terugkomen in de formule voor  $x^*$  als we weer van een term  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t}$  uitgaan. We krijgen dus een nieuw soort oplossing, maar ook in dit geval blijkt de oplossing niet veel af te wijken van de eerdere gevallen. Er geldt

$$x^*(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t} + \frac{D}{n^2} - \left( \frac{D(\{(0, 1), (2, 1)\})(i, j)}{|Q(\{(0, 1), (2, 1)\})(i, j)|} + \frac{D(\{(0, 1), (3, 4)\})(i, j)}{|Q(\{(0, 1), (3, 4)\})(i, j)|} + \frac{D(\{(2, 1), (3, 4)\})(i, j)}{|Q(\{(2, 1), (3, 4)\})(i, j)|} \right).$$

Dit voorbeeld is voor verduidelijking ook visueel uitgewerkt, in de bijlage staan illustraties van de lijnen met hun snijpunten, en van de verschillende verzamelingen  $Q$ .

Aan de hand van dit laatste voorbeeld krijgen we een nieuw idee over hoe we  $x^*$  kunnen construeren:

- Begin met  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^k L_{i,j,a_t,b_t}$ .
- Trek alles dat 'teveel geteld' is hiervan af.
- Tel alles wat 'teveel afgetrokken' is er weer bij op.
- Herhaal totdat het voor alle richtingen klopt.

Het is nog niet helemaal duidelijk wat hiermee bedoeld wordt, maar het blijkt dat we op deze manier eindelijk de algemene formule voor  $x^*$  kunnen krijgen.

## 5.4 Het eindresultaat: de algemene formule voor $x^*$ op de torus

**Stelling 5.6** Bekijk het discrete tomografiemodel op de  $m \times n$  torus, met richtingsverzameling  $S$ . Dan geldt:

$$x^*(i, j) = \sum_{\emptyset \neq V \subset S} (-1)^{|V|+1} \frac{D(V)(i, j)}{|Q(V)(i, j)|}.$$

*Bewijs:* Het is duidelijk dat  $x^*$  op deze manier invariant is onder translaties, dus we hoeven alleen nog na te gaan dat de lijnsommen kloppen. Merk op dat voor elke oplossing  $x$  van het stelsel  $Wx = p$  de uitdrukking  $\frac{D(V)(i, j)}{|Q(V)(i, j)|}$  gelijk is aan de gemiddelde waarde van  $x$  over de verzameling  $Q(V)(i, j)$ . Zij  $w \in S$  een richting,  $l$  een lijn in de richting  $w$  en  $a$  een punt op  $l$ . We zien nu dat voor elke  $V \subset S$  met  $w \in V$  en  $V \neq \{w\}$  geldt

$$\sum_{(i,j) \in l} \frac{D(V)(i, j)}{|Q(V)(i, j)|} = |l| \frac{D(V)(a)}{|Q(V)(a)|} = \sum_{(i,j) \in l} \frac{D(V \setminus w)(i, j)}{|Q(V \setminus w)(i, j)|}$$

aangezien ieder punt in  $D(V)(a)$  even vaak voorkomt in  $\prod_{(i,j) \in l} D(V \setminus w)(i, j)$ . Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in l} x^*(i, j) &= \sum_{(i,j) \in l} \sum_{\emptyset \neq V \subset S} (-1)^{|V|+1} \frac{D(V)(i, j)}{|Q(V)(i, j)|} \\ &= \sum_{(i,j) \in l} \sum_{V \subset S, w \in V, V \neq \{w\}} \left( (-1)^{|V|+1} \frac{D(V)(i, j)}{|Q(V)(i, j)|} + (-1)^{|V|} \frac{D(V \setminus w)(i, j)}{|Q(V \setminus w)(i, j)|} \right) + \frac{D(\{w\})(i, j)}{|Q(\{w\})(i, j)|} \end{aligned}$$

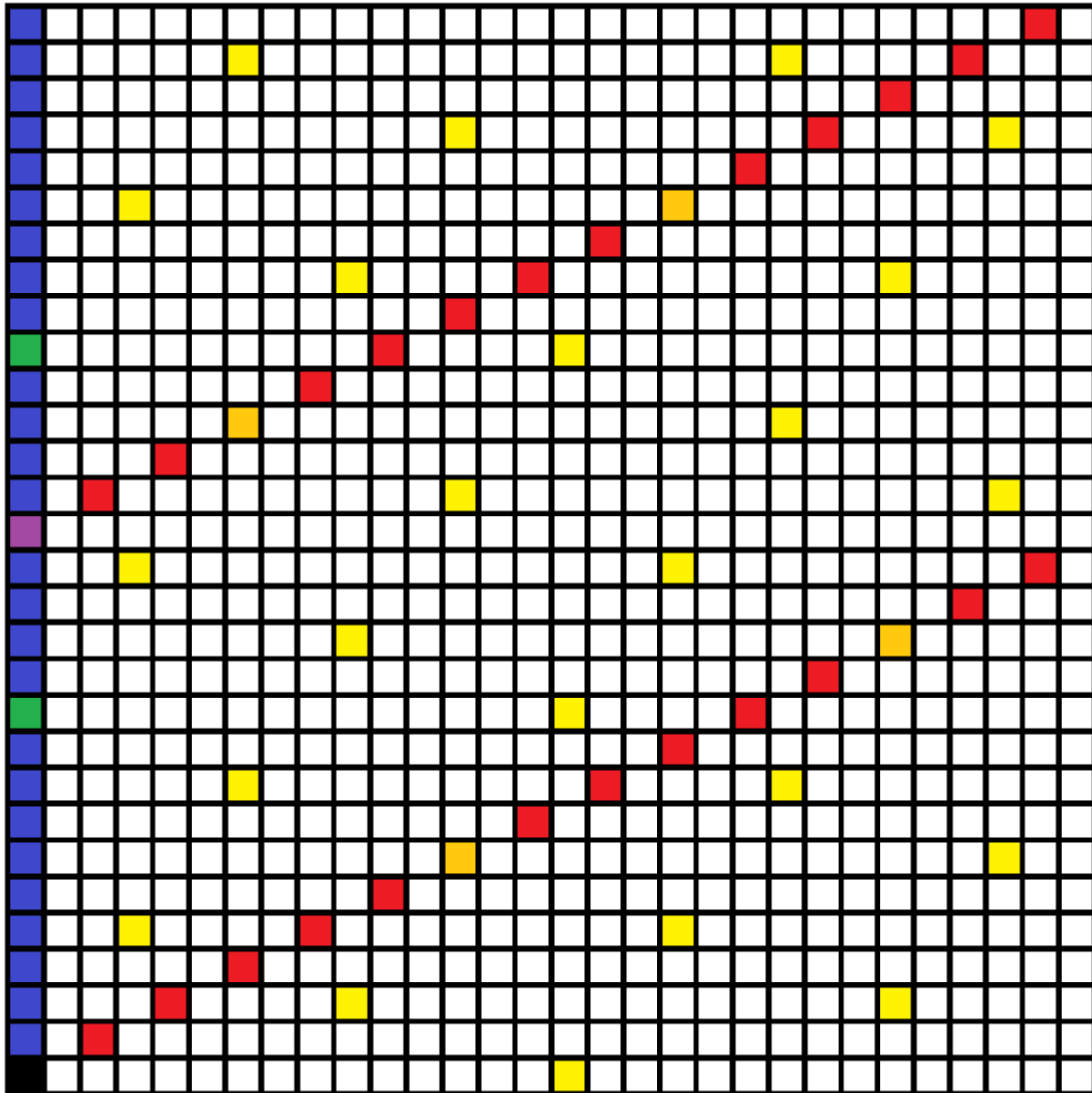
$$\begin{aligned} &= \sum_{(i,j) \in I} \frac{S_i}{|I|} \\ &= S_I. \end{aligned}$$

■



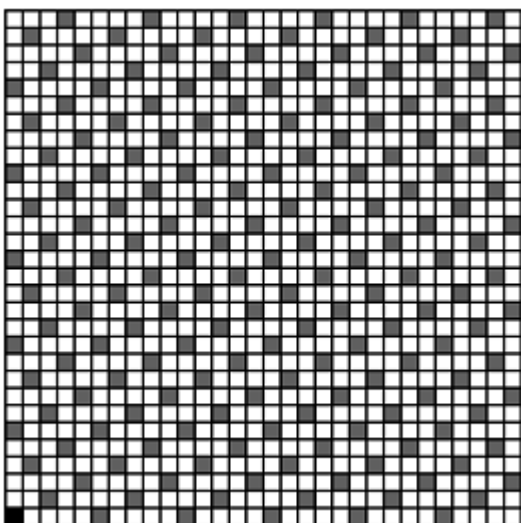
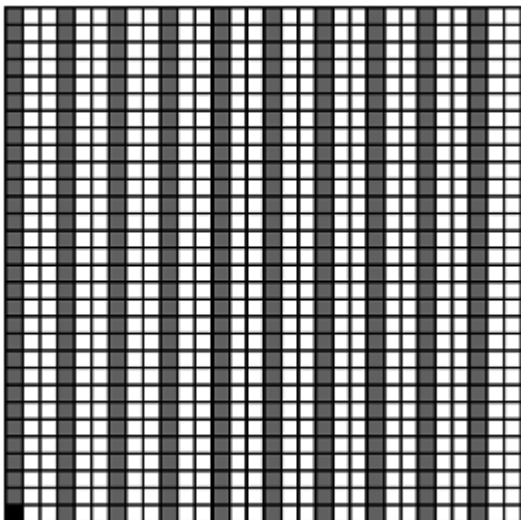
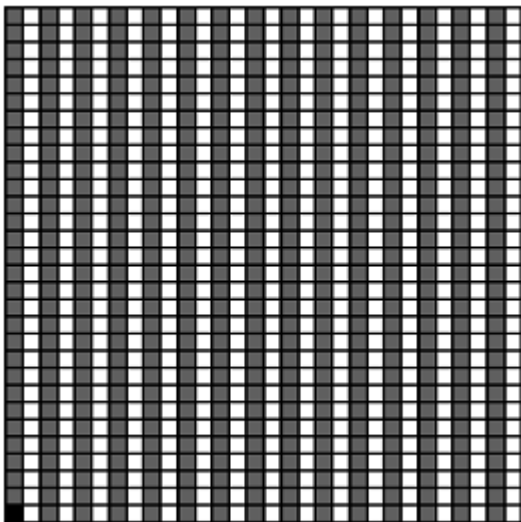
## 6 Bijlage: Illustraties bij voorbeeld 3 (sectie 5.3)

In deze bijlage staat een visuele uitwerking van voorbeeld 3 (op blz. 14). De eerste figuur laat lijnen in de drie verschillende richtingen en hun snijpunten zien.



De blauwe lijn heeft de richting  $(0, 1)$ , de rode lijn heeft de richting  $(2, 1)$  en de gele lijn heeft richting  $(3, 4)$ . Alle drie de lijnen gaan door het zwartgekleurde punt, en ook de andere snijpunten tussen de lijnen zijn aangegeven. Let ook op de aantallen snijpunten van de verschillende lijnen.

De volgende drie figuren laten de (grijs gekleurde) verzamelingen  $Q(\{(0, 1), (2, 1)\})(0, 0)$ ,  $Q(\{(0, 1), (3, 4)\})(0, 0)$  resp.  $Q(\{(2, 1), (3, 4)\})(0, 0)$  zien. Het punt  $(0, 0)$  is in elk van de figuren zwart gekleurd.



## Referenties

- [1] S. van Aert et al., *Three-dimensional atomic imaging of crystalline nanoparticles*, Nature 470, 374-377, 2011.  
[doi:10.1038/nature09741](https://doi.org/10.1038/nature09741)
- [2] G.T. Herman, A. Kuba, *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser Boston, 1999.
- [3] A. Stolk, *De stelling van Ryser*, 2009.  
[http://www.math.leidenuniv.nl/~hfinkeln/seminarium/stelling\\_van\\_Ryser.pdf](http://www.math.leidenuniv.nl/~hfinkeln/seminarium/stelling_van_Ryser.pdf)
- [4] K.J. Batenburg et al., *Bounds on the quality of reconstructed images in binary tomography*, Discrete Applied Mathematics, 2012, to appear.  
[doi:10.1016/j.dam.2012.010](https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.010)
- [5] B. van Dalen, L. Hajdu, R. Tijdeman, *Bounds for discrete tomography solutions*, 2012.  
<http://arxiv.org/pdf/1104.5589v2.pdf>