

M. Ercan

Beweging van starre lichamen

Bachelorscriptie, 5 januari 2016

Scriptiebegeleider: Dr. R.J. Kooman



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	De coördinaten van een star lichaam	4
3	De Euler hoeken	5
4	Beweging in niet-inertiële systemen	8
4.1	Versnelde translationele systemen	9
4.2	Dynamica van roterende systemen	10
5	De hoeksnelheid	13
5.1	De uniciteit van $\boldsymbol{\omega}$	14
6	T_{rotatie} en L	15
7	De traagheidstensor	18
7.1	Traagheidsmomenten en producten	21
7.2	De hoofdtraagheidsassen	21
8	De bewegingsvergelijkingen van Euler	23
9	$I = I_1 = I_2$ en $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$	25
9.1	De Chandler wobble	27
9.2	Vervolg 1	27
9.3	De precessie van de equinoxen	31
9.4	Vervolg 1	32
10	De beweging van een symmetrische tol met een vaste punt	32
10.1	Precessie zonder nutatie	35
10.2	Precessie met nutatie	37
11	De stabiliteit van de rotationele beweging	39
12	Bibliografie	40
12.1	Literatuur	40
12.2	Figuren	40

1 Inleiding

In deze scriptie is, bij het beschouwen van bewegingen, de eindige omvang van lichamen van belang. Van zulke lichamen nemen we aan dat ze star zijn. Met een star lichaam bedoelen we dat, gedurende een beweging, de afstanden tussen de posities van de deeltjes ervan onveranderd blijven. Het lichaam beweegt dus als een geheel. Anders gezegd is een star lichaam te beschouwen als een systeem van deeltjes dat aan de verzameling

$$r_{ij} = c_{ij}$$

van voorwaarden is ondergeschikt waarbij r_{ij} de afstand tussen het i -de en het j -de deeltje is en c_{ij} te allen tijde constant blijft. Deze definitie is eenvoudig uit te breiden naar systemen met continue massaverdelingen. Hierin blijven de afstanden tussen elk tweetal infinitessimale volume-eenheden en de massa in elke volume-eenheid te allen tijde constant. Deze definitie is uiteraard een uiterste idealisering. Als zowel de omvang als de vorm van het lichaam, onder werking van externe krachten slechts weinig variëren, is het mogelijk deze te beschouwen als star. We merken op dat, ten gevolge van het fysische snelheidslimiet, dat gelijk is aan dat van het licht in het vacuüm, het concept van een ideaal star lichaam geen acceptatie ondervindt binnen de speciale relativiteitstheorie. Dit komt doordat een star lichaam, als een eenheid, momentaan in beweging wordt gebracht op het moment dat er in een punt ervan een externe kracht wordt uitgeoefend. Dit betekent dat, in tegenstelling tot de principes van de speciale relativiteitstheorie, fysische informatie momentaan van het ene naar het andere punt van een star lichaam wordt getransporteerd.

Alle onderstaande macroscopische grootheden voor systemen van n , op elkaar inwerkende, deeltjes worden in deze scriptie dikwijls gebruikt:

$$\begin{aligned} \text{de totale massa } M &= \sum_{i=1}^n m_i \\ \text{het massamiddelpunt } \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \\ \text{het totale moment (impuls) } \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ \text{het totale impulsmoment } \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \\ \text{het totale krachtmoment } \mathbf{N} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}^{\text{extern}} + \mathbf{F}^{\text{intern}}) \end{aligned}$$

Hierbij zijn m_i en \mathbf{r}_i resp. de massa en de positievector van het i -de deeltje. Verder zijn $\mathbf{F}^{\text{extern}}$ en $\mathbf{F}^{\text{intern}}$ resp. de totale externe en interne krachten van het systeem.

Voor starre lichamen met continue massaverdelingen kunnen we de sommaties, als bij

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \rightarrow \iiint_V dm \quad \text{en} \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \iiint_V \mathbf{r} dm,$$

door integralen over het volume V van het lichaam vervangen.

De bewegingsvergelijkingen en de algemene theorieën die worden ontwikkeld voor starre lichamen kunnen worden gezien als die voor systemen die bestaan uit n deeltjes. Er zijn echter zekere vereenvoudigingen zichtbaar doordat het aantal mogelijke bewegingspatronen beperkt is. Zo is de enige mogelijke beweging van een lichaam, met een ten opzichte van een inertiaal coördinatenstelsel vast punt, de beweging waarbij elk ander punt over een boloppervlak beweegt waarvan de straal gelijk is aan de invariante afstand tussen het bewegende en het vaste punt. Net zo is de enige mogelijke beweging van het starre lichaam met twee vastgestelde punten, de beweging waarbij alle punten, buiten de punten die op de lijn door de twee vaste punten liggen, cirkelbanen beschrijven waarvan de middelpunten op deze lijn liggen. Nu is het lichaam, als drie niet-collineaire punten worden vastgekozen, niet in staat te bewegen en is de positie ervan volledig bepaald.

De bewegingen van starre lichamen waarin een of twee vaste punten worden gekozen staan bekend als de rotatiebewegingen. Deze zijn eenvoudiger dan de algemene bewegingen van lichamen waarin geen enkel punt wordt vastgekozen. Binnen de laatsten is er een speciaal geval, namelijk, de beweging waarbij alle punten van het lichaam op elk moment in dezelfde richting met dezelfde snelheid bewegen en versnellen. Dit wordt de translatiebeweging genoemd. Dit zijn de twee belangrijkste typen bewegingen van starre lichamen omdat we kunnen laten zien dat elke verplaatsing van een star lichaam is samen te stellen, zoals blijkt uit Chasles' Stelling (Michel Chasles 1793-1880), uit een combinatie van rotaties en translaties. De translatie van een star lichaam wordt beschreven door de translatie van een punt, bij voorkeur het massamiddelpunt, ervan. In het vervolg zullen we ons echter richten op de rotatie van starre lichamen.

2 De coördinaten van een star lichaam

Een star lichaam onderscheidt zich van een deeltje, zoals eerder opgemerkt, door zijn veel-deeltjes karakter van eindige omvang. Een star lichaam dient te worden beschreven door zowel zijn oriëntatie als zijn plaats in de ruimte. De coördinaten van de deeltjes worden bepaald door een vast punt van het lichaam, zoals bijvoorbeeld het massamiddelpunt, en de oriëntatie van het lichaam rondom dat punt. In totaal zijn er zes coördinaten nodig om de beweging van het lichaam te beschrijven. Allereerst zijn er drie coördinaten vereist voor het specificeren van de positie van een punt. Vervolgens zijn twee coördinaten, ter representatie van hoeken, in staat de positie van een tweede deeltje, dat op een vaste afstand van de eerste ligt, te bepalen. De positie van een derde deeltje wordt vastgesteld door slechts een coördinaat. Dit komt doordat zijn afstanden tot de eerste twee

deeltjes vastliggen. Alle andere deeltjes van het lichaam hebben vaste afstanden tot de in eerste instantie gekozen drie deeltjes en liggen hierdoor dus ook vast. Dit is de reden dat er slechts zes coördinaten nodig zijn voor het uitdrukken van de positie en de oriëntatie van een star lichaam. De beweging van een star lichaam wordt dus beschreven door zes bewegingsvergelijkingen, namelijk, drie voor de rotatiebeweging en drie voor de translatiebeweging. Als een voorbeeld hiervan wordt de translatiebeweging van het massamiddelpunt ten opzichte van een inertiaal coördinatenstelsel beschreven door

$$\mathbf{F}^{\text{extern}} = \dot{\mathbf{P}}$$

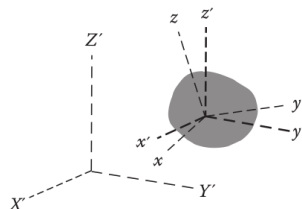
en de rotatiebeweging rondom het zwaartepunt bepaald door

$$\mathbf{N}^{\text{extern}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Hieruit volgt dat het massamiddelpunt met een constante snelheid beweegt als de totale externe kracht gelijk is aan nul. Als juist het totale krachtmoment gelijk is aan nul vertoont het impulsmoment en dus de rotatiebeweging rondom het massamiddelpunt geen variatie. Dat wil zeggen dat het starre lichaam zich in evenwicht bevindt. Voor het statische evenwicht van een star lichaam is het dus nodig dat het massamiddelpunt in eerste instantie in rust is en het totale impulsmoment eromheen gelijk aan nul.

3 De Euler hoeken

Er zijn in totaal zes onafhankelijke coördinaten nodig voor het beschrijven van de beweging van een star lichaam. Eerst selecteren we een Carthesisch stelsel $Oxyz$, dat we het lichaamsstelsel zullen noemen, waarvan de oorsprong zich in een vast punt van het starre lichaam bevindt. Het probleem is opgelost als dit stelsel is gerelateerd aan een extern vast Carthesisch systeem $O'X'Y'Z'$. Drie van de zes gegeneraliseerde coördinaten dienen voor het plaatsbepalen, ten opzichte van O' , van O . De overige coördinaten geven de oriëntatie, ten opzichte van het externe systeem (of ten opzichte van het vaste stelsel $Ox'y'z'$ waarvan de assen parallel zijn aan die van het externe systeem als in Figuur 1), van het lichaamsstelsel.

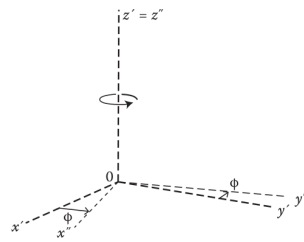


Figuur 1: X', Y' en Z' representeren de assen van een extern stelsel en x, y en z de assen van een lichaamsstelsel.

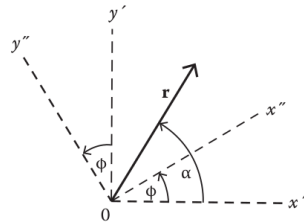
Voor het relateren van de lichaamsassen x, y en z aan de vaste (of de externe) assen x', y' en z' gebruiken we drie hoeken. Van de in de literatuur beschreven

verzamelingen van hoeken zijn de Euler (L. Euler, 1707-1783) hoeken de meest algemene en gebruikelijke. De definities van de Euler hoeken verschillen weinig van de ene text naar de andere. We nemen de Definities van Goldstein (1980) aan. Dat wil zeggen dat de Euler hoeken door de volgende drie opeenvolgende rotatiehoeken worden voortgebracht:

1. Roteer de x' -, y' - en z' -assen linksom over een hoek van ϕ om de z' -as dat de tussenvolgende verzameling van assen x'' , y'' en z'' (hetzelfde als z') in Figuur 2 vormt. De, in Figuur 3 geproduceerde, $x''y''$ - en $x'y'$ -vlakken zijn coplanair.



Figuur 2: De rotatie die de rotatiehoek ϕ definieert.



Figuur 3: De $x''y''$ - en $x'y'$ -vlakken van Figuur 2.

Nu drukken we x' , y' , x'' en y'' in de vlakke bolcoördinaten r en α uit als

$$\begin{aligned} x'' &= r \cos(\alpha - \phi) \\ x' &= r \cos \alpha, & &= r(\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi) \quad \text{en} \\ y' &= r \sin \alpha, & &= r \sin(\alpha - \phi) \\ & & &= r(\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi). \end{aligned} \quad (1)$$

Combineren van (1) en $z'' = z'$ geeft de transformaties

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \phi + y' \sin \phi \quad \text{en} \\ y'' &= y' \cos \phi - x' \sin \phi \end{aligned} \quad (2)$$

voor de rotatie. Deze kunnen in matrix-notatie worden uitgedrukt als

$$\mathbf{X}'' = D\mathbf{X}' \quad (3)$$

waarbij \mathbf{X}'' en \mathbf{X}' de kolommatrices

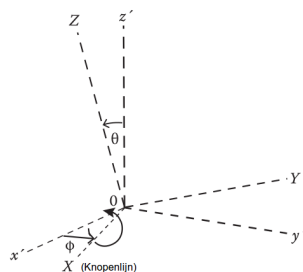
$$\mathbf{X}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

zijn en D de transformatiematrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is.

2. Roteer de x'' -, y'' - en z'' -assen linksom over een hoek van θ om de x'' -as dat de X -, Y - en Z -assen in Figuur 4 produceert. De x'' - (X'' -) as is de slijlijn, die de knopenlijn wordt genoemd, van de $x''y''$ - en XY -vlakken.



Figuur 4: De rotatie die de rotatiehoek θ definieert.

Door het toepassen van een soortgelijke procedure dat in Stap 1 is gebruikt voor het verkrijgen van (2) komen we nu aan bij

$$\begin{aligned} X &= x'' \\ Y &= y'' \cos \theta + z'' \sin \theta \\ Z &= z'' \cos \theta - y'' \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

oftewel, in matrix-notatie, bij

$$\mathbf{X} = C\mathbf{x}'' \quad \text{waarbij} \quad (5)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

3. Roteer de X -, Y - en Z -assen linksom over een hoek van ψ om de Z -as dat de verlangde x -, y - en z -assen in Figuur 5 produceert. We hebben nu dat

$$\begin{aligned} x &= X \cos \psi + Y \sin \psi \\ y &= Y \cos \psi - X \sin \psi \\ z &= Z \end{aligned} \quad (6)$$

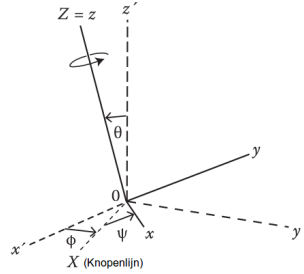
of, in matrix-notatie, dat

$$\mathbf{x} = B\mathbf{X} \quad (7)$$

waarbij de transformatiematrices

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en D dezelfde vorm hebben.



Figuur 5: De rotatie die de rotatiehoek ψ definieert.

Elke van de drie lineaire transformaties bij (2), (4) en (6) is orthogonaal en dus zijn B, C en D orthogonale rotatiematrices.

Substitutie van (3) en (5) in (7) geeft de complete transformatie

$$\mathbf{x} = B\mathbf{X} = BC\mathbf{x}'' = BCD\mathbf{x}' = A\mathbf{x}'$$

van de x' -, y' - en z' -assen naar de lichaamsassen x, y en z . Hierbij is

$$A = BCD$$

de productmatrix (of de volledige rotatiematrix) met

$$A_{ij} = \sum_{k,l} B_{ik}C_{kl}D_{lj} = \begin{pmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & c\psi s\phi + s\psi c\theta c\phi & s\psi s\theta \\ -s\psi c\phi - c\psi c\theta s\phi & -s\psi s\phi + c\psi c\theta c\phi & c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & -s\theta c\phi & c\theta \end{pmatrix}$$

als matrix-elementen waarbij $c := \cos$ en $s := \sin$. Voor orthogonale matrices is de getransponeerde gelijk aan de inverse en dus is de inverse transformatie bij

$$\mathbf{x}' = A^{-1}\mathbf{x}$$

gegeven door de getransponeerde ervan.

4 Beweging in niet-inertiële systemen

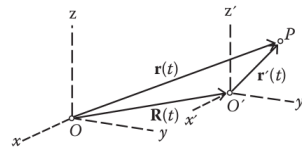
Het introduceren van niet-inertiële systemen zorgt voor veel vereenvoudiging van problemen. Bovendien stelt het beschouwen hiervan ons in staat sommige conceptuele moeilijkheden van de klassieke mechanica te onderzoeken.

De beweging van een niet-inertieel systeem mag of een versnelde translatie, of rotationeel of een combinatie van beide zijn. Het is vaak erg geschikt of soms noodzakelijk het gedrag van een dynamisch systeem in een versneld stelsel te bestuderen. Een vast systeem op de aardbol, bijvoorbeeld, is het meest geschikt voor het beschrijven van de beweging van een deeltje dat zich nabij het aardoppervlak bevindt.

De lezer dient op te merken dat de Galileïsche transformaties alleen terugslaan op waarnemingen in verschillende inertiële systemen. Volgens de Galileïsche transformaties zijn alle systemen die uniform transleren, ten opzichte van een inertieel systeem, zelf inertieel.

4.1 Versnelde translationele systemen

Beschouw de coördinatensystemen O en O' waarvan de oriëntaties in de ruimte vast zijn en de resp. coördinatenassen parallel zijn aan elkaar als in Figuur 6.



Figuur 6: De inertiële en versnelde systemen.

In het inertiële O -systeem is de bewegingswet van Newton geldig. De positievectoren $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$ en $\mathbf{R}(t)$ zijn door

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \quad (8)$$

aan elkaar gerelateerd.

Als O' ten opzichte van O , die we vast nemen, beweegt, dan wordt de relatie tussen de snelheden ten opzichte van de systemen verkregen door (8) als bij

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad \text{of} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (9)$$

te differentiëren waarbij \mathbf{v} en \mathbf{v}' de snelheden van P ten opzichte van resp. O en O' zijn en \mathbf{V} de snelheid van O' ten opzichte van O is. Door het differentiëren van (9) verkrijgen we de relatie

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad \text{of} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A} \quad (10)$$

waarbij \mathbf{a} en \mathbf{a}' de versnellingen van P ten opzichte van resp. O en O' zijn en \mathbf{A} de versnelling van O' ten opzichte van O is.

De wetten van Newton worden alleen in inertiële referentiesystemen toegepast. Hierna zullen we zien dat in niet-inertiële systemen de bewegingsvergelijking

van Newton, de tweede wet van Newton, verandert door een extra term die voortvloeit uit het niet-inertiële karakter.

De bewegingswet

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (11)$$

van Newton is geldig in het O -systeem waarbij \mathbf{F} de resulterende fysische kracht is dat op het deeltje P werkt. Substitutie van (10) in (11) geeft

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} \quad \text{oftewel}$$

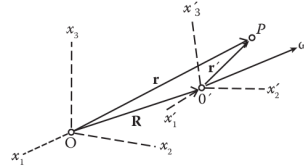
$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}.$$

Dat wil zeggen dat de tweede wet van Newton is gewijzigd door een extra term $-m\mathbf{A}$ in het O' -systeem. Deze wordt een fictieve (of inertiële) kracht genoemd en is alleen te veranderen of te verwijderen door de toestand van de waarnemer, oftewel door de keuze van het systeem te veranderen.

In tegenstelling tot dit zijn reële fysische krachten niet te elimineren door de keuze van het systeem. Zij zijn de resultaten van wisselwerkingen met andere objecten en onafhankelijk van de toestand van de waarnemer of het systeem waarin de beweging wordt beschreven.

4.2 Dynamica van roterende systemen

Nu beschouwen we de beweging van het deeltje P dat, ten opzichte van een systeem $O'x'_1x'_2x'_3$ is beschreven, een hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ en een translatie \mathbf{R} , ten opzichte van een systeem $Ox_1x_2x_3$, ondervindt als in Figuur 7.



Figuur 7: De translerende en roterende systemen.

De eenheidsvectoren \hat{e}_i die niet zijn aangegeven in Figuur 7 associëren we met resp. de x'_i -assen. Zij veranderen niet in grootte maar in richting als $O'x'_1x'_2x'_3$ roteert. Inspectie van Figuur 7 laat zien dat \mathbf{r} en \mathbf{r}' door de vergelijking

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' = \mathbf{R} + \sum_{j=1}^3 x'_j \hat{e}'_j$$

aan elkaar zijn gerelateerd.

Na differentiatie verkrijgen we

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_O &= \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_O + \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_O \\ &= \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_O + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\hat{e}'_j dx'_j}{dt}\right)_O + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{x'_j d\hat{e}'_j}{dt}\right)_O \end{aligned} \quad (12)$$

waarbij de aanwijzing O expliciet aangeeft dat de grootheid tussen de haken is gemeten in het inertiaële $Ox_1x_2x_3$ -systeem. De tweede term

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{O'} = \sum_{j=1}^3 \frac{dx'_j}{dt} \hat{e}'_j = \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t}$$

in het rechterlid is de snelheid van het deeltje P , ten opzichte van het roterende $O'x'_1x'_2x'_3$ -systeem, volgens een waarnemer in dit stelsel.

Vanaf nu zullen we de notatie ' $\delta/\delta t$ ' reserveren voor het roterende $O'x'_1x'_2x'_3$ -systeem.

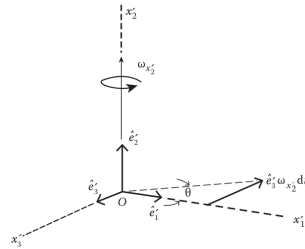
De derde term in het rechterlid is de schijnbare snelheid van het deeltje P dat resulteert uit de rotatie van de x_i -assen en kan in de vertrouwdere vorm $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ worden gezet. Dit tonen we aan door eerst de hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ in termen van haar componenten te schrijven als

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^3 \omega_{x'_j} \hat{e}'_j$$

waarbij $\omega_{x'_j}$ de hoeksnelheid is waarmee voor

$$i \neq k \quad \text{en} \quad i, k \neq j$$

de x'_i - en x'_k -assen om een vaste as in de x'_j -richting roteren. De hoeksnelheid $\omega_{x'_1}$ laat de richting van de eenheidsvector \hat{e}'_1 onverandert en $\omega_{x'_2}$ brengt in een korte tijd dt een verandering $-\hat{e}'_3\omega_{x'_2}dt$ voort in de negatieve x'_3 -richting als is afgebeeld in Figuur 8.



Figuur 8: De rotatie om de x'_2 -richting verandert de eenheidsvector \hat{e}'_1 in de negatieve x'_1 -richting.

Evenzo is $\hat{e}'_2\omega_{x'_3}dt$ de verandering in \hat{e}'_1 in een korte tijd dt dat resulteert uit $\omega_{x'_3}$. Dus is $d\hat{e}'_1 = (\hat{e}'_2\omega_{x'_3} - \hat{e}'_3\omega_{x'_2})dt$ de totale verandering in \hat{e}'_1 in een korte

tijd dt , oftewel

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_1}{dt} = \hat{\mathbf{e}}_2\omega_{x'_3} - \hat{\mathbf{e}}_3\omega_{x'_2} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_1. \quad (13)$$

Op dezelfde manier is

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_2}{dt} = \hat{\mathbf{e}}_3\omega_{x'_1} - \hat{\mathbf{e}}_1\omega_{x'_3} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_2 \quad \text{en} \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_3}{dt} = \hat{\mathbf{e}}_1\omega_{x'_2} - \hat{\mathbf{e}}_2\omega_{x'_1} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}'_3 \quad (15)$$

Door het substitueren van (13)-(15) in de derde term in het rechterlid van (12) verkrijgen we

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{x'_j d\hat{\mathbf{e}}'_j}{dt} \right)_O = \boldsymbol{\omega} \times \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_j x'_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (16)$$

Het combineren van (16) en (12) geeft

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_O &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}'_j dx'_j}{dt} \right)_O + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{x'_j d\hat{\mathbf{e}}'_j}{dt} \right)_O \\ &= \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{en} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_O &= \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_O + \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_O \\ &= \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_O + \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (18)$$

Dus kunnen we (18) schrijven als

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

waarbij \mathbf{v}_0 en $\mathbf{v}' = \delta\mathbf{r}'/\delta t$ de snelheden zijn van P , $\mathbf{V} = (d\mathbf{R}/dt)_O$ de snelheid is van de bewegende oorsprong en $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ de snelheid is van P als is gemeten in het $Ox_1x_2x_3$ -systeem dat resulteert uit de rotatie van het $O'x'_1x'_2x'_3$ -systeem.

Het is opmerkelijk te herkennen dat de vectorvergelijking (17) een algemeen resultaat is. Voor elke willekeurige vector \mathbf{Q} dat wordt gebruikt in plaats van de straalvector \mathbf{r} zal het resultaat de vorm

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_O = \frac{\delta\mathbf{Q}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}$$

aannemen.

Hieruit volgt dat

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_O = \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t},$$

oftewel dat de hoekversnelling dezelfde is in beide systemen.

5 De hoeksnelheid

In het vervolg concentreren we ons op de rotatie van een star lichaam om een zekere as. De rotatie-as mag door elk punt gaan (worden gekozen). De energie en het impulsmoment van een star lichaam (een veel-deeltjes systeem) kunnen worden uitgedrukt als de som van de twee bijdragen van de beweging van het massamiddelpunt en de beweging eromheen. De rotatie-as kunnen we door het zwaartepunt kiezen (laten gaan). Deze keuze zal resulteren in een volledige scheiding van de translationele en de rotationele bewegingen. Hierna zullen we de oorsprong van het lichaamssysteem altijd in het massamiddelpunt plaatsen. Dit zal altijd, tenzij er een geschikter vast punt is, als het geval worden opgevat.

De studie van de rotationele beweging van starre lichamen begint met een onderzoek naar de manier waarop vectoren zich gedragen onder rotaties. Beschouw een vast snelheidsvector \mathbf{V} dat schijnbaar zal veranderen als van het lichaam wordt waargenomen dat hij roteert. De vraag is hoe de afgeleide ervan in het lichaamssysteem is gerelateerd aan haar afgeleide ten opzichte van de x -, y - en z -assen. Als \mathbf{V} varieert in het roterende systeem en we haar afgeleide, dat ten opzichte van dit stelsel is gemeten, aanduiden door $\partial\mathbf{V}/\partial t$, dan is de afgeleide van \mathbf{V} in het vaste stelsel gegeven door

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{vast}} = \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\right)_{\text{lichaam}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \quad (19)$$

waarbij $\boldsymbol{\omega}$ de hoeksnelheidsvector van het roterende lichaam is en langs de rotatie-as is gericht. Dit resultaat werd afgeleid in het voorgaande deel en zal hierna veelvuldig worden gebruikt. Er werden geen verdere voorwaarden op de vector \mathbf{V} gelegd bij de afleiding ervan.

De hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ drukken we meestal uit in termen van de Euler hoeken en hun tijdsafgeleiden. De algemene infinitesimale rotatie, dat is geassocieerd met $\boldsymbol{\omega}$, is te beschouwen als een rotatie dat bestaat uit drie opeenvolgende infinitesimale rotaties met de hoeksnelheden $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\phi = \dot{\phi}$ en $\omega_\psi = \dot{\psi}$.

Een hoeksnelheidsvector is, in een rechts geöriënteerde stelsel, langs de rotatie-as gericht als in Figuur 5. De hoeksnelheden $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ en $\dot{\psi}$ zijn vectoren langs resp. Oz' , Ox en Oz . Resteert het vinden van de componenten ervan langs resp. de x -, y - en z -assen.

Hiervoor gebruiken we de transformatiematrices A , B , C en D . In het $Ox'y'z'$ -systeem zijn de componenten van $\dot{\phi}$ gelijk aan

$$\dot{\phi}_{x'} = 0, \quad \dot{\phi}_{y'} = 0 \quad \text{en} \quad \dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi}.$$

De vraag is wat de componenten ervan zijn in het $Oxyz$ -systeem. Deze worden verkregen door eerst A op $\dot{\phi}$ toe te passen, oftewel door

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \cos \theta \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De hoeksnelheid $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ is langs de knopenlijn gericht. Voor het verkrijgen van de componenten ervan in het $Oxyz$ -systeem hebben we de transformatiematrix B nodig. Toepassen hiervan op $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ geeft

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Doordat $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ parallel is aan de z - (lichaams-) as is er geen transformatie nodig en geldt

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \\ \dot{\psi}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Combineren van de individuele componenten van $\boldsymbol{\omega}$ levert uiteindelijk

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_x &= \dot{\phi}_x + \dot{\theta}_x + \dot{\psi}_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \omega_y &= \dot{\phi}_y + \dot{\theta}_y + \dot{\psi}_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \omega_z &= \dot{\phi}_z + \dot{\theta}_z + \dot{\psi}_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (20)$$

5.1 De uniciteit van $\boldsymbol{\omega}$

In dit deel laten we zien dat de hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ een intrinsieke eigenschap is van een roterend star lichaam. Dat wil zeggen dat alle deeltjes ervan dezelfde momentane hoeksnelheid hebben ten opzichte van elkaar. Dit maakt dat er een unieke hoeksnelheid bestaat.

Stelling 1. *De hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ is een intrinsieke eigenschap van een roterend star lichaam en dus uniek.*

Bewijs. Allereerst kiezen we een vast punt \mathbf{R}_0 en roteren er de punten \mathbf{r}'_0 en \mathbf{R}_1 , waarbij $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_0$, met een hoeksnelheid van $\boldsymbol{\omega}$ omheen. Hieruit volgen de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'_0}{dt} &= \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}_0) \\ &= \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0 \quad \text{en} \\ \frac{d\mathbf{R}_1}{dt} &= \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \\ &= \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \end{aligned} \quad (21)$$

die de translaties van de punten \mathbf{r}'_0 en \mathbf{R}_1 over \mathbf{R}_0 en de rotaties ervan eromheen beschrijven. Vervolgens trekken we de tweede vergelijking bij (21) van de eerste

af, oftewel

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}'_0}{dt} - \frac{d\mathbf{R}_1}{dt} &= (\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_0) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}_0) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \\
 &= \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times ((\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}_0) - (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)) \\
 &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}_1), \quad \text{dus} \\
 \frac{d\mathbf{r}'_0}{dt} &= \frac{d\mathbf{R}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}_1) \\
 &= \mathbf{V}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{R}_1).
 \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat de beweging ook te beschrijven is door middel van een translatie over een vast punt \mathbf{R}_1 en een rotatie eromheen met eenzelfde hoeksnelheid van $\boldsymbol{\omega}$.

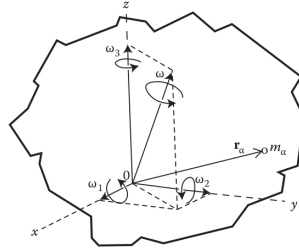
In het algemeen geldt dus dat de beweging van een star lichaam is samen te stellen uit een translatie van een willekeurig vastgekozen punt en een rotatie erom heen met een unieke hoeksnelheid. \square

6 T_{rotatie} en L

We beschouwen een star lichaam als een verzameling van n deeltjes

$$m_\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Als het lichaam met een instantane hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ om een zekere as, dat door het massamiddelpunt gaat als in Figuur 9, roteert, dan kan de snelheid van een deeltje in het vaste coördinatensysteem worden verkregen uit (19).



Figuur 9: Een roterend star lichaam.

Voor starre lichamen geldt $(\partial\mathbf{r}/\partial t)_{\text{rotatie}} = \mathbf{0}$ en (19) geeft

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

We zullen nu zien dat alle snelheden zijn gemeten in het vaste stelsel en, doordat het lichaam star is, ten opzichte van het roterende stelsel gelijk moeten zijn aan

nul. De rotationele kinetische energie T_{rotatie} is gegeven door

$$\begin{aligned} T_{\text{rotatie}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} [\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2] \end{aligned}$$

waarbij we, in de laatste stap, de vectoridentiteit

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$

hebben gebruikt.

We drukken nu

$$T_{\text{rotatie}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left[\left(\sum_i \omega_i^2 \right) \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha,i} \right) \left(\sum_j \omega_j x_{\alpha,j} \right) \right]$$

uit in termen van de componenten $x_{\alpha,j}$ en ω_j van resp. \mathbf{r}_{α} en $\boldsymbol{\omega}$.

Dit kan als

$$\begin{aligned} T_{\text{rotatie}} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha,k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (22) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad \text{waarbij} \end{aligned}$$

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (23)$$

worden vereenvoudigd waarbij δ de Kroneckerdelta is.

In matrix-notatie hebben we

$$\begin{aligned} T_{\text{rotatie}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{\top} I \boldsymbol{\omega} \quad \text{waarbij} \quad (24) \\ \boldsymbol{\omega}^{\top} &= (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3), \quad I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Het object I is bekend als de traagheidstensor (de matrix-representatie van de traagheidstensor). Haar constanten hangen af van de meetkundige eigenschappen van het lichaam, de locatie van de oorsprong en de oriëntatie van

de lichaamsassen. De algemene eigenschappen van de traagheidstensor worden besproken in het volgende deel.

Het impulsmoment van een lichaam kan op dezelfde manier, in termen van de traagheidstensor, worden uitgedrukt. Het impulsmoment \mathbf{L} om de oorsprong O wordt beschreven door

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}).$$

Na het uitbreiden hiervan door het gebruiken van de vectoridentiteit

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

verkrijgen we uiteindelijk

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

Evenzo kunnen we de impulsmomentvector \mathbf{L} in termen van de componenten van de vectoren \mathbf{r}_{α} en $\boldsymbol{\omega}$ uitdrukken. De i -de component L_i van \mathbf{L} is

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\omega_i \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} \omega_j \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_j \left[\omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \omega_j \right] \\ &= \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \\ &= \sum_i I_{ij} \omega_j. \end{aligned} \tag{25}$$

In matrix-notatie hebben we

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}. \tag{26}$$

In het algemeen is \mathbf{L} niet noodzakelijk parallel aan $\boldsymbol{\omega}$. Door het vergelijken van (26) en (24) vinden we dat de rotationele kinetische energie is uit te drukken als

$$T_{\text{rotatie}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \tag{27}$$

De bewegingsvergelijking voor de algemene rotatie van een star lichaam om zijn zwaartepunt of een vast punt in de ruimte is

$$\mathbf{N}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad \text{oftewel} \quad N_j^{\text{ext}} = \frac{dL_j}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}(I_{jk} \omega_k), \tag{28}$$

die aanzienlijk vereenvoudigt in het geval van de rotatie om een enkele vaste as. Voor alle duidelijkheid kiezen we de z -as als de rotatie-as, oftewel $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$. Dan zijn

$$L_x = I_{xz} \omega_z, \quad L_y = I_{yz} \omega_z \quad \text{en} \quad L_z = I_{zz} \omega_z$$

de componenten van (27) en reduceren de bewegingsvergelijkingen bij (28) naar

$$N_x^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(I_{xz}\omega_z), \quad N_y^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(I_{yz}\omega_z) \quad \text{en} \quad N_z^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(I_{zz}\omega_z). \quad (29)$$

Als het lichaam symmetrisch is om de z -as hebben we uit (23) dat

$$I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad \text{en} \quad I_{zz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} R_{\alpha}^2$$

waarbij R_{α} de loodrechte afstand is van de rotatie-as naar het massa-element α en wordt soms de hefboom (of de arm van het moment) van het element ten opzichte van de rotatie-as genoemd. De krachtmomenten τ_x^{extern} en τ_y^{extern} in (29) zijn dan gelijk aan nul. Als I_{xz} of I_{yz} niet-nul is, dan is het starre lichaam ongebalanceerd en moet de arm van het moment, voor het stoppen van de beweging van de rotatie-as, de krachtmomenten τ_x^{extern} en τ_y^{extern} leveren.

De bewegingsvergelijking voor de z -component in (29) reduceert, omdat I_{zz} tijdsafhankelijk is, naar

$$\tau_z^{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I_{zz}\dot{\omega}_z$$

die hetzelfde resultaat geeft als de vergelijking voor de lineaire beweging in een dimensie. In het algemene geval echter dienen we terug te gaan naar (28) indien \mathbf{L} en $\boldsymbol{\omega}$ niet noodzakelijk parallel zijn.

De analogie tussen de fysische grootheden voor de lineaire beweging en de draai-beweging om een vaste as is hieronder weergegeven.

Tabel 1

de rotatiebeweging	de lineaire beweging
het traagheidsmoment I_{zz}	de massa m
een bolcoördinaat θ	een lineaire coördinaat z
de hoeksnelheid $\omega_z = \frac{d\theta}{dt}$	de lineaire snelheid $v_z = \frac{dz}{dt}$
de hoekversnelling $\dot{\omega}_z$	de lineaire versnelling $a_z = \dot{v}_z$
het impulsmoment $L_z = I_{zz}\omega_z$	het lineair moment $p_z = mv_z$
de kinetische energie $T_{\text{rotatie}, z} = \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2$	de kinetische energie $T_z = \frac{1}{2}mv_z^2$
het krachtmoment τ_z	de kracht F_z

7 De traagheidstensor

Bij het beschouwen van fysische fenomenen komen we verschillende typen grootheden tegen. Twee bekende typen die we vaak hebben gebruikt zijn scalaires en vectoren. De grootheid I is een tensor. Hierna behandelen we tensoren binnen rechtshandige Carthesische coördinatensystemen. Zulke tensoren zijn bekend als Carthesische tensoren.

Alle grootheden die we gebruiken zijn te beschouwen als tensor-grootheden van het een of ander type. De verschillende typen grootheden worden geklassificeerd naargelang de orde (of rang en valentie). Het aantal vrije (ongesommeerde) indices geeft de orde van een tensor aan. Bij afwezigheid hiervan, oftewel bij een nulde-orde tensor, hebben we scalar-grootheid. Bij een vrije index, dat wil zeggen een vector-grootheid, is de grootheid een eerste-orde tensor enz.

Een nulde orde tensor (een scalar) representeert slechts een getal, welke reëel of complex kan zijn. Een eerste-orde Carthesische tensor representeert drie getallen die de magnituden van de Carthesische componenten van een vector-grootheid zijn. We schrijven deze lijst van getallen als $(A_1 \ A_2 \ A_3)$ als een rij-matrix of als $(A_1 \ A_2 \ A_3)^\top$ als een kolom-matrix. Een tweede-orde tensor representeert een lijst van negen getallen omdat elk van de twee ongesommeerde indices de waarden 1, 2 of 3 kunnen aannemen. We schrijven deze negen scalaire grootheden in een matrix-rangschikking als

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

en het is de matrix-representatie van de tweede-orde tensor A .

In wat volgt, zullen we het woord ‘tensor’ gebruiken voor een Carthesische tensor van orde twee. Tensoren komen het meest voor wanneer een vector, bijvoorbeeld \mathbf{B} , gegeven is als een lineaire functie van een andere vector, bijvoorbeeld \mathbf{A} , oftewel

$$\begin{aligned} B_x &= T_{xx}A_x + T_{xy}A_y + T_{xz}A_z \\ B_y &= T_{yx}A_x + T_{yy}A_y + T_{yz}A_z \\ B_z &= T_{zx}A_x + T_{zy}A_y + T_{zz}A_z \end{aligned}$$

Deze drie vergelijkingen kunnen compact geschreven worden in termen van een enkele uitdrukking, namelijk

$$B_i = \sum_k T_{ik}A_k \quad \text{waarbij } i = x, y \text{ en } z. \quad (30)$$

Door aan te nemen dat $i = x$ en een sommatie uit te voeren met de subscript k opeenvolgend met de waarden x, y en z krijgen we de eerste vergelijking van (30) terwijl door aan te nemen dat $i = y$ we de tweede krijgen, enz. In matrix-notatie hebben we

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}.$$

De negen grootheden T_{ij} zijn de componenten van een tensor, welke we zullen noteren door T . Een voorbeeld is de relatie (25) tussen de impulsmomentvector \mathbf{L} en de hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega}$ van een star lichaam in het meest algemene geval. Voor $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$ en $\mathbf{B} = \mathbf{L}$ krijgen we de traagheidstensor $T = I$.

Met het begrip ‘traagheidstensor’ bedoelen we de matrix representatie ervan. De waarheid van onze claim dat I een tensor is, hangt af van het vastleggen van zijn

gedrag onder een coördinatentransformatie. Onder een coördinatentransformatie dienen zijn negen componenten volgens de volgende regel

$$I'_{ij} = \sum_{k,m} \lambda_{ik} \lambda_{jm} I_{km} \quad (31)$$

te transformeren waarbij λ_{ik} de componenten zijn van een zekere transformatiematrix λ . Voor het bewijzen hiervan, keren we terug naar vergelijking (25), oftewel naar

$$L_k = \sum_{ki} I_{ki} \omega_i. \quad (25)$$

Doordat dit een vector-relatie is, dient er een geheel analoge uitdrukking te bestaan in elke roterende coördinatensysteem ten opzichte van het systeem dat in vergelijking (25) van toepassing is, namelijk

$$L'_k = \sum_{ki} I'_{ki} \omega'_i. \quad (25a)$$

Hier duiden de geaccentueerde grootheden het geroteerde systeem aan. Nu respecteren de corresponderende vectoren in de twee systemen een orthogonale transformatie en dus schrijven we

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk} L'_m \quad \text{en} \quad \omega_i = \sum_j \lambda_{ji} \omega'_j.$$

Substitueren hiervan in vergelijking (25) geeft

$$\sum_m \lambda_{mk} L'_m = \sum_i I_{ki} \sum_j \lambda_{ji} \omega'_j.$$

Vermenigvuldig beide leden van deze vergelijking met λ_{ik} en sommeer over k . Het resultaat is na een geschikte herschikking

$$\sum_m \left(\sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L'_m = \sum_j \left(\sum_{k,j} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \lambda_{kl} \right) \omega'_j$$

en wordt

$$\sum_m \delta_{im} L'_m = \sum_j \left(\sum_{k,j} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \lambda_{kl} \right) \omega'_j.$$

Sommeren over m geeft

$$L'_i = \sum_j \left(\sum_{k,j} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \lambda_{kl} \right) \omega'_j.$$

Door het vergelijken hiervan met vergelijking (25a) verkrijgen we de verlangde transformatieregel bij vergelijking (31), namelijk

$$I'_{ij} = \sum_{k,m} \lambda_{ik} \lambda_{jm} I_{km}.$$

7.1 Traagheidsmomenten en producten

De ij -de component van de tensor I wordt in vergelijking (23) gedefinieerd door

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right). \quad (32)$$

Doordat voor alle i en j geldt $I_{ij} = I_{ji}$ is deze symmetrisch en dus zijn er zes onafhankelijke componenten, namelijk

$$I_{xx} = I_{11} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha,1}^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2)$$

$$I_{yy} = I_{22} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha,2}^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - y_{\alpha}^2)$$

$$I_{zz} = I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha,3}^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - z_{\alpha}^2)$$

en

$$I_{21} = I_{12} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} = I_{xy} = I_{yx}$$

$$I_{31} = I_{13} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} = I_{zx} = I_{xz}$$

$$I_{32} = I_{23} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} = I_{zy} = I_{yz}.$$

De diagonaalelementen I_{ii} zijn de traagheidsmomenten om de corresponderende assen x_i . Net als de rol van de massa bij translationele bewegingen speelt een traagheidsmoment een rol bij rotationele bewegingen. De overige elementen I_{ij} zijn de traagheidsproducten. Alle componenten worden collectief aangeduid als de traagheidsparameters van het systeem.

Voor lichamen met continue massaverdelingen waarvan de dichtheid op positie \mathbf{r} wordt gegeven door $\rho = \rho(\mathbf{r})$ gaat de som bij (32) over in de integraal

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) dV$$

over het volume V van het lichaam waarbij $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ het volume-element op positie \mathbf{r} is.

Elke reële symmetrische matrix neemt een diagonaalvorm aan ten opzichte van een zekere basis. In het volgende deel zien we dat toepassen hiervan op de matrix representatie van de traagheidstensor laat zien dat de eigenwaarden ervan de hoofdtraagheidsmomenten zijn en de corresponderende eigenvectoren langs de hoofdasen zijn gericht.

7.2 De hoofdtraagheidsassen

De uitdrukkingen voor de rotationele kinetische energie en het impulsmoment vereenvoudigen aanzienlijk als we een coördinatensysteem invoeren ten opzichte

waarvan de traagheidsproducten gelijk zijn aan nul. In dat geval is de matrix representatie van de traagheidstensor diagonaal en hebben we

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (33)$$

De hoofdassen van dit systeem zijn de assen van het lichaamssysteem. De traagheidsmomenten I_{ii} hierlangs zijn de hoofdtraagheidsmomenten I_i . Later zien we dat als een lichaam om een hoofdass door zijn massamiddelpunt roteert er geen resulterende kracht of koppel op werkt.

De algemene formules voor T_{rotatie} en \mathbf{L} , resp. de vergelijkingen (22) en (25), reduceren ten opzichte van de hoofdassen naar

$$T_{\text{rotatie}} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad \text{en} \quad (34)$$

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3 \quad (35)$$

waarbij de basisvectoren \hat{e}_i langs de hoofdassen zijn gericht. De vergelijking voor T_{rotatie} is vergelijkbaar met de vergelijking voor $T_{\text{translatie}}$, namelijk

$$T_{\text{translatie}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}.$$

Het verschil ertussen is dat de massa geen richtingseigenschap heeft zodat de coëfficiënten van v_i^2 aan elkaar gelijk zijn.

Als alternatief hebben we uit (34) en (35) dat geldt

$$T_{\text{rotatie}} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}. \quad (36)$$

Het systeem van de hoofdassen bestaat, in feite, voor elk star lichaam en voor elk punt dat als oorsprong wordt genomen. Het probleem van het vinden van de richtingen van de hoofdassen in een gegeven situatie is het roteren van het coördinatensysteem zo dat de traagheidsproducten worden geëlimineerd. Stel dat dit is gedaan en het lichaam roteert om een van zijn hoofdassen, bijvoorbeeld de z -as. Door het nemen van de hoofdassen als de coördinaatassen hebben we $\omega_x = \omega_y = 0$ en $\omega_z = \omega$. Omdat de traagheidstensor de vorm van vergelijking (33) heeft wanneer de coördinatenassen op deze manier worden gekozen, geeft vergelijking (25) de waarden

$$L_x = L_y = 0 \quad \text{en} \quad L_z = I_z\omega$$

voor de componenten van het impulsmoment van het lichaam. Op consequente wijze heeft \mathbf{L} dezelfde richting als $\boldsymbol{\omega}$. Hetzelfde resultaat wordt verkregen voor de rotatie van een lichaam om andere hoofdassen. In al deze gevallen komen we aan bij de relatie $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ waarbij I bestaat uit de corresponderende hoofdtraagheidsmomenten van het lichaam.

Laten we nu aannemen dat we op willekeurige wijze een verzameling van x , y en z -assen hebben gekozen en de traagheidsmomenten en de traagheidsproducten

ten opzichte van hen hebben berekend. Dan moeten we, aangezien het impuls-moment \mathbf{L} en de hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ dezelfde richting hebben uit vergelijking (26)

$$\begin{aligned} L_1 &= I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = I\omega_1 \\ L_2 &= I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 = I\omega_2 \\ L_3 &= I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 = I\omega_3 \end{aligned}$$

oftewel dat

$$\begin{aligned} (I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 &= 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 &= 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Als deze vergelijkingen een niet triviale oplossing hebben voor de verhoudingen $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ dan is de determinant van de coëfficiënt nul:

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0.$$

De uitschrijving van deze determinant leidt tot een derdegraads vergelijking in I wiens oplossingen we zullen aanduiden met I_1, I_2 en I_3 . Deze zijn de hoofdtraagheidsmomenten.

De richtingen van de hoofdtraagheidsmomenten kunnen nu worden gevonden uit vergelijking (37). De componenten ω_1, ω_2 en ω_3 definiëren een richting voor de hoeksnelheidsvector ten opzichte van de coördinaatassen. Omdat voor de rotatie om een hoofdas, de hoeksnelheid samenvalt met deze as, zal de verzameling van getallen ω_1, ω_2 en ω_3 die voldoen aan vergelijking (37), in overeenstemming zijn met de richtingsgetallen van de assen. Als voorbeeld, als het lichaam om een as dat correspondeert met het traagheidsmoment I_1 roteert, kunnen we de richting van deze hoofdas bepalen door I_1 in de vergelijking (37) voor I te substitueren:

$$\begin{aligned} (I_{11} - I)\omega_{11} + I_{12}\omega_{21} + I_{13}\omega_{31} &= 0 \\ I_{21}\omega_{11} + (I_{22} - I)\omega_{21} + I_{23}\omega_{31} &= 0 \\ I_{31}\omega_{11} + I_{32}\omega_{21} + (I_{33} - I)\omega_{31} &= 0 \end{aligned}$$

waarbij de tweede subscript 1 bij de ω_{i1} er op wijst dat we de hoofdas dat geassocieerd is met I_1 beschouwen. Deze vergelijkingen kunnen worden opgelost voor de verhoudingen $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ welke de richtingsgetallen zijn voor de hoofdassen corresponderende met I_1 . Deze hoofdas is daarbij relatief aan de originele coördinatensysteem gedefinieerd. De richtingen die corresponderen met I_2 en I_3 kunnen op soortgelijke wijze worden gevonden.

8 De bewegingsvergelijkingen van Euler

De voorgaande delen hebben het gehad over de inertiaële eigenschappen van een star lichaam. We komen nu aan bij wat we de essentiële natuurkunde van de

mechanica van starre lichamen kunnen noemen, namelijk, de dynamica van zijn rotationele beweging om een vaste punt onder de werking van externe krachten. In deel 2 zagen we dat de rotatie van een star lichaam wordt omschreven door de rotationele analogie van de tweede wet van Newton: de mate van verandering van het totale impulsmoment is gelijk aan het toegepaste krachtmoment:

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (38)$$

waarin $\boldsymbol{\tau}^{\text{ext}}$ de totale externe krachtmoment is en \mathbf{L} het impulsmoment. Als het starre lichaam ook een translationele beweging heeft, geeft de tweede wet van Newton een beschrijving van de beweging van zijn massacentrum:

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

waarbij de afgeleiden moeten worden geëvalueerd in een inertiaal stelsel. Deze twee verzamelingen van bewegingsvergelijkingen zijn equivalent aan Lagrange's vergelijking voor de coördinaten van het massacentrum.

Omdat het impulsmoment \mathbf{L} de inertiale parameters inhoudt, houdt een berekening van $d\mathbf{L}/dt$ zowel de tijdsafgeleide van de inertiale parameters als de afgeleide van $\boldsymbol{\omega}$ in. Echter, als we de hoofdasen van het lichaam als het referentiesysteem kiezen, zijn de traagheidsmomenten ten opzichte van deze assen vast, welke de berekening van $d\mathbf{L}/dt$ vereenvoudigen. Dus voeren we in het algemeen een coördinatensysteem in dat vast is in het lichaam en ermee roteert. Dit lichaamssysteem is niet inertiaal. Laten we nu vergelijking (38) ten opzichte van de lichaamsassen schrijven. De tijdsafgeleide van de impulsmomentvector in een vaste (inertiële) systeem versus een roterende systeem is gegeven door vergelijking (19):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

waar $\partial/\partial t$ de afgeleide in het roterende (lichaams) kader is. Dus is de bewegingsvergelijking in het lichaamssysteem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad \text{of} \\ \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial t} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (39)$$

Het is hier te zien dat de term $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ in het rechterlid van vergelijking (39) als fictieve krachtmoment lijkt te verschijnen wegens de niet-inertiële karakter van de lichaamsassen.

Omdat I constant is ten opzichte van de lichaamsassen, kunnen we nu vergelijking (25), met de hulp van het feit dat $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = d\boldsymbol{\omega}/dt$, substitueren voor het verkrijgen van

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (40)$$

Een aanzienlijke vereenvoudiging van deze vergelijkingen treedt op als we de lichaamsassen als de hoofdasen van het lichaam kiezen; dan, wegens vergelijking

(35), wordt vergelijking (40)

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) + \tau_1 \\
I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) + \tau_2 \\
I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) + \tau_3.
\end{aligned} \tag{41}$$

Dit zijn de Euler vergelijkingen van de beweging van een star lichaam in een krachtveld. Er is een restrictie op hen gebruik: als een punt in het lichaam wordt vastgehouden dient dat punt als oorsprong van de lichaamsassen te worden genomen, en de traagheidsmomenten I_1, I_2 en I_3 en de krachtmomenten τ_1, τ_2 en τ_3 zijn relatief ten opzichte van dat punt. Als er geen restricties op het lichaam zijn gelegd wordt het massamiddelpunt van het lichaam als de oorsprong van de lichaamsassen genomen. Een ander punt dient ook te worden opgemerkt: als de hoofdasen in het lichaam worden vastgenomen dient een externe toegepaste kracht te resulteren langs deze assen in de richting waarin het lichaam beweegt.

De Euler vergelijkingen zijn niet-lineaire vergelijkingen en, daarvoor, moeilijk op te lossen in het algemene geval. In de afwezigheid van externe krachtmomenten reduceren de Euler vergelijkingen naar de eenvoudigere vormen:

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\
I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\
I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2).
\end{aligned} \tag{42}$$

Als voorbeeld zijn de externe krachtmomenten op de aarde zo zwak dat de rotationele beweging te beschouwen is als relatief krachtmoment-vrij.

Vergelijking (42) kan worden opgelost in termen van elliptische integralen. De oplossing kan dan worden geschreven in termen van de constanten van de beweging, het impulsmoment en de kinetische energie. Maar dit is te gecompliceerd om te beschouwen. In plaats daarvan, zullen we, in de volgende delen, enkele bekende gevallen waar axiale symmetrie directe integratie van vergelijking (42) toestaat beschouwen.

In het algemeen, is het impulsmoment niet proportioneel met en parallel aan de hoeksnelheid. Dus, alhoewel, het impulsmoment een constante kan zijn van de beweging is de hoeksnelheid dat niet. In het algemeen, zal de hoeksnelheidsvector om het impulsmoment precederen, en de hoek tussen hen zal variëren in de tijd. Dit is bekend als nutatie.

9 $I = I_1 = I_2$ en $\tau = \mathbf{0}$

Als een toepassing van de Euler vergelijkingen beschouwen we de beweging van een krachtmoment-vrije symmetrische tol. Dit is de vrije rotatie van een zware symmetrische tol om haar symmetrie-as, onder invloed van een, door haar eigen gewicht voortgebrachte, krachtmoment.

Een symmetrische tol bezit een symmetrie-as zo dat twee van haar hoofdtraagheidsmomenten gelijk zijn. We nemen aan dat de symmetrie-as de z -as is en

wijzen I_3 aan als het moment langs de symmetrie-as en $I = I_1 = I_2$ als het moment langs de x - of y -as.

Voor een kracht-vrije beweging begeeft het massamiddelpunt zich ofwel in rust ofwel in een uniforme beweging ten opzichte van het externe inertiaële systeem. Daarom kunnen we de oorsprong van dit stelsel in het zwaartepunt van het lichaam plaatsen. Nu wordt (42) gelijk aan

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Men dient op te merken dat $\boldsymbol{\omega}$, in het algemeen, niet samenvalt met de symmetrie-as, doordat het probleem anders triviaal is. Dan is de beweging namelijk een vaste rotatie om de symmetrie-as.

De derde vergelijking van (43) zegt ons dat ω_3 constant is in de tijd, oftewel

$$\omega_3(t) = \text{constant}.$$

Door het definiëren van een constante k als

$$k = \omega_3 \frac{I_3 - I}{I}$$

kunnen we de eerste twee vergelijkingen van (43) schrijven in de vormen

$$\dot{\omega}_1 = -k\omega_2 \quad \text{en} \quad \dot{\omega}_2 = k\omega_1.$$

Door het differentiëren van de eerste en het substitueren hierin van de tweede krijgen we

$$\ddot{\omega}_1 = -k^2 \omega_1. \quad (44)$$

Doordat geldt $k^2 \geq 0$ is (44) een harmonische bewegingsvergelijking met als oplossing

$$\omega_1(t) = A \cos(kt + \phi_0) \quad \text{en} \quad \omega_2(t) = A \sin(kt + \phi_0) \quad (45)$$

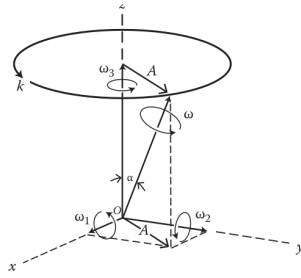
waarbij A de, in de tijd constante, magnitude van ω_1 is en ϕ_0 een fase-constante.

De vergelijkingen bij (45) parametriseren een cirkel met straal A in het x, y -vlak. De projectie van $\boldsymbol{\omega}$ op dit vlak roteert om de z -as met een constante hoeksnelheid k . Het is duidelijk dat

$$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2}$$

een constante is gedurende de beweging. Figuur 10 illustreert de meetkundige relatie tussen ω_1 en ω_2 op een bepaald moment. De parametrisaties bij (45) laten zien dat, als de fase-constante ϕ_0 wordt gelijkgesteld aan nul, op $t = 0$, geldt dat $\omega_1 = A$ en $\omega_2 = 0$, oftewel dat bij toename van t , er sprake is van afname bij ω_1 en toename bij ω_2 . Dit laat zien dat de rotatie-as, door linksom de z -as (de symmetrie-as) te precederen met een hoeksnelheid k , een kegel (een lichaamskegel) beschrijft. De frequentie f_p en periode T_p van de precessie zijn gegeven door

$$f_p = \frac{k}{2} \quad \text{en} \quad T_p = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi I}{(I_3 - I)\omega_3}. \quad (46)$$



Figuur 10: De hoeksnelheid bij een vrije-rotatie.

9.1 De Chandler wobble

De rotatie van de aarde is te beschouwen als de beweging van een star lichaam van het zojuist besproken type. Haar symmetrie-as wijkt lichtjes af van haar rotatie-as. De hoeksnelheid van de aarde is 7.29×10^{-5} rad/s. Door het invullen van de astronomisch bepaalde grootheid

$$\frac{I_3 - I}{I} = 0.00329$$

in (46) vinden we dat $T_p = 305$ dagen.

Deze periodische cirkelbeweging van $\boldsymbol{\omega}$ om de symmetrie-as van de aarde is bekend als de variatie van de breedtegraad. Het meten van T_p is erg moeilijk doordat de diameter van de cirkel (de doorsnede van de lichaamskegel met het aardoppervlak) slechts een paar tientallen centimeters is. Het meest recent geobserveerde periode van de precessie van de rotatie-as van de aarde om de polen is ongeveer 433 dagen. Het verschil met de zojuist berekende waarde wordt toegeschreven aan het feit dat de aarde geen perfect starre lichaam is.

9.2 Vervolg 1

Het is duidelijk dat, in geval van axiale symmetrie, voor de impulsmomentvector geldt

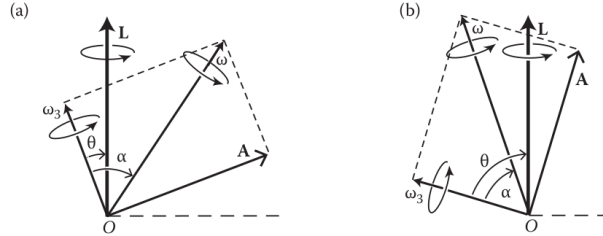
$$\mathbf{L} = I(\omega_1 \hat{\mathbf{i}} + \omega_2 \hat{\mathbf{j}}) + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{k}}. \quad (47)$$

Dus bevindt het zich in het vlak dat wordt opgespannen door ω_3 en $\boldsymbol{\omega}$. Haar positie ten opzichte van $\boldsymbol{\omega}$ hangt af van de waarden van I en I_3 . In Figuur 11 duiden we de hoek tussen ω_3 en $\boldsymbol{\omega}$ aan met α en de hoek tussen ω_3 en \mathbf{L} met θ .

Door het in acht nemen van de projectie \mathbf{A} van $\boldsymbol{\omega}$ op het x, y -vlak krijgen we

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{A}}}{L_3} = \frac{I \mathbf{A}}{I_3 \omega_3} = \frac{I}{I_3} \tan \alpha \quad \text{waarbij} \\ \hat{\mathbf{A}} &= \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{\mathbf{A}}{A} \end{aligned} \quad (48)$$

en L_3 de component van \mathbf{L} langs ω_3 is. In Figuur 11a is te zien dat, als $I < I_3$, geldt $\theta < \alpha$ en \mathbf{L} tussen ω_3 en $\boldsymbol{\omega}$ ligt. Als I juist groter is dan I_3 als in Figuur 11b geldt dat $\theta > \alpha$ en ligt \mathbf{L} verder weg van ω_3 dan van $\boldsymbol{\omega}$.



Figuur 11: (a) Het geval waarbij $I < I_3$. (b) Het geval waarbij $I > I_3$.

Tot nog toe is de precessie van $\boldsymbol{\omega}$ om een vaste as in het lichaam besproken. Voor het beschrijven van de beweging ten opzichte van een waarnemer buiten het lichaam gebruiken we een externe vaste as in de ruimte. In een dergelijk systeem hebben we

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{vast}} = \boldsymbol{\tau}$$

waarbij de subscript ‘vast’ aangeeft dat deze rotatie-analogie van de tweede wet van Newton alleen in dit systeem geldt. Dus is \mathbf{L} , voor een kracht-vrije beweging, in dit stelsel stationair en constant in de tijd. Deze, in magnitude constante, vector definieert de lijn die de invariabele lijn wordt genoemd. De kinetische energie voor de rotatie is de tweede constante van de beweging. Door de eerste van (41) te vermenigvuldigen met ω_1 , de tweede met ω_2 en de derde met ω_3 krijgen we

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \right] = \tau_1 \omega_1 + \tau_2 \omega_2 + \tau_3 \omega_3$$

als som.

Het linkerlid beschrijft de verandering van de kinetische energie en het rechterlid de mate van de werking van het toegepaste krachtmoment. Dus is de kinetische energie, in afwezigheid van een extern krachtmoment, constant.

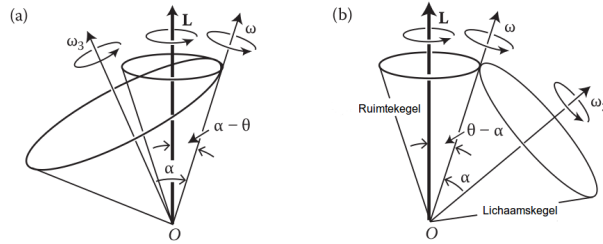
De rotationele kinetische energie is uit te drukken als

$$T_{\text{rotatie}} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Dit betekent dat, gedurende de beweging, $\boldsymbol{\omega}$ zo verandert dat haar projectie op het stationaire \mathbf{L} constant is. Dus beschrijft $\boldsymbol{\omega}$, door te precederen onder een constante hoek met \mathbf{L} , een kegel (de lichaamskegel).

Het besproken type beweging is meetkundig te representeren door het rollen van een kegel om een andere kegel als in de Figuren 12a en b. De kegel met haar symmetrie-as langs \mathbf{L} en semi-verticale hoek θ ligt vast in de ruimte en wordt

de ruimtekegel genoemd. De kegel met haar symmetrie-as langs ω_3 en semi-verticale hoek α ligt vast in het lichaam en wordt de lichaamskegel genoemd. Voor een waarnemer in het lichaamssysteem lijkt ω de ruimtekegel te traceren. In beide gevallen blijven ω_3 , ω en L , als de ene kegel om de andere rolt, in hetzelfde ruimtelijke vlak. De precessiesnelheid van ω om de invariabele lijn is als volgt te berekenen.

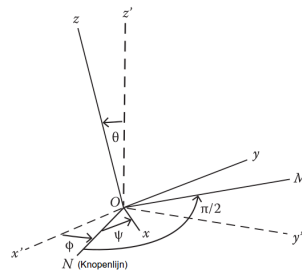


Figuur 12: (a) Een ruimte- en lichaamskegel waarbij $I_3 > I$. (b) Een ruimte- en lichaamskegel waarbij $I_3 < I$.

In Figuur 13 heeft het $Ox'y'z'$ -systeem een vaste oriëntatie in de ruimte en kiezen we L langs de z' -as. Het $Oxyz$ -systeem bestaat uit de hoofdassen van het lichaam en de z -as is de symmetrie-as van het lichaam. De lijn ON is de knopenlijn (de doorsnede van het x, y -vlak met het x', y' -vlak) en θ, ϕ en ψ zijn de Euler hoeken. Construeer OM loodrecht op ON . Dan is de hoek MOy in magnitude gelijk aan ψ . Het is duidelijk dat ON, OM en de z -as een derde systeem vormen dat bestaat uit de ξ, η - en ζ -assen waarbij de ζ -as samenvalt met de z -as. De ξ, η - en ζ -assen zijn tevens de hoofdassen. Bovendien zijn de hoofdtraagheidsmomenten als bij

$$I_1 = I_2 = I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I \quad \text{en} \quad I_3 = I_{\zeta\zeta}$$

hetzelfde.



Figuur 13: Het $Ox'y'z'$ -systeem is een externe verzameling van assen en het $Oxyz$ -systeem is een verzameling van lichaamsassen.

Beschouw nu de rotatie van het η, ζ -vlak. We zien dat de hoeksnelheid van de rotatie van het η, ζ -vlak om de z' -as gelijk is aan de tijdsafgeleide van ϕ . Dus is $\dot{\phi}$, als van buitenaf het lichaam gezien, zowel de hoeksnelheid van de precessie van de rotatie-as als van de symmetrie-as om de invariabele lijn. Deze precessie

lijkt op een dobbering als te zien is bij dat van een onvolmaakte worp van een voetbal. Voor het berekenen van $\dot{\phi}$ drukken we eerst de componenten van \mathbf{L} en $\boldsymbol{\omega}$ in het $O\xi\eta\zeta$ -stelsel uit. Doordat zowel $\dot{\phi}$ (gericht langs de z -as) als $\dot{\psi}$ (gericht langs de z' -as) loodrecht staan op de ξ -as zullen zij niet bijdragen aan ω_ξ . Verder is $\dot{\theta}$ langs ON gericht zodat $\omega_\xi = \dot{\theta}$. De bijdragen van $\dot{\phi}$ aan ω_η en ω_ζ zijn, doordat zij langs de z -as is gericht, gelijk aan resp. $\dot{\phi} \sin \theta$ en $\dot{\phi} \cos \theta$. Evenzo is de bijdrage van $\dot{\psi}$ aan ω_ζ , doordat zij langs de z - (of ζ -) as is gericht, gelijk aan $\dot{\psi}$, maar heeft het geen bijdragen aan ω_ξ en ω_η . Door het optellen hiervan verkrijgen we

$$\omega_\xi = \dot{\theta}, \quad \omega_\eta = \dot{\phi} \sin \theta \quad \text{en} \quad \omega_\zeta = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (49)$$

Evenzo verkrijgen we

$$L_\xi = 0, \quad L_\eta = L \sin \theta \quad \text{en} \quad L_\zeta = L \cos \theta.$$

In (47) zagen we dat $\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}$ en ω_3 in hetzelfde vlak liggen maar ω_3 is langs de z - (of ζ -) as gericht. Dus liggen zij allemaal in het η, ζ -vlak waaruit in het bijzonder volgt dat $\omega_\xi = 0$. Door de hoek tussen $\boldsymbol{\omega}$ en ω_3 (de z -as) opnieuw aan te duiden als α hebben we de relaties

$$L_\eta = I\omega_\eta = I\omega \sin \alpha \quad \text{en} \quad L_\zeta = I_3\omega_\zeta = I_3\omega \cos \alpha \quad (50)$$

waaruit volgt dat

$$\frac{L_\eta}{L_\zeta} = \tan \theta = \frac{I}{I_3} \tan \alpha. \quad (51)$$

Hierbij geldt $L = \|\mathbf{L}\|$ en $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$.

Door het vergelijken van de Figuren 11 en 13 zien we dat de hoek θ in Figuur 11 correspondeert met de Euler hoek θ in Figuur 13. We merken ook op dat (51) equivalent is aan (48).

Uit de tweede van (49) en de eerste van (50) hebben we

$$\dot{\phi} \sin \theta = \omega \sin \alpha, \quad \text{oftewel} \quad \dot{\phi} = \frac{\omega \sin \alpha}{\sin \theta} \quad (52)$$

voor de precessiesnelheid. Deze vergelijking kunnen we in een gebruikelijkere vorm zetten. Laten we, voor dit doel, (51) eerst schrijven als

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{I}{I_3} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

waaruit we verkrijgen dat

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{I_3^2}{I^2} - 1 \right) \cos^2 \alpha}$$

en (52) wordt nu

$$\dot{\phi} = \omega \sqrt{1 + \left(\frac{I_3^2}{I^2} - 1 \right) \cos^2 \alpha}. \quad (53)$$

Voor het afleiden van een dergelijke uitdrukking voor $\dot{\psi}$ merken we eerst op dat

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\sin \theta}{\tan \theta} \\
 &= \frac{1}{L} \cdot \frac{L \sin \theta}{\frac{L \sin \theta}{L \cos \theta}} \\
 &= \frac{1}{L} \cdot \frac{L_\eta}{\frac{L_\zeta}{L}} \\
 &= \frac{1}{L} \cdot \frac{I \omega \sin \alpha}{\frac{I_3 \omega \sin \alpha}{I_3 \omega \cos \alpha}} \\
 &= \frac{I_3}{L} \omega \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Uit de derde van (49) en de tweede van (51) leiden we af dat

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \omega \cos \alpha.$$

In combinatie met (53) krijgen we

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi} &= \omega \cos \alpha - \dot{\phi} \cos \theta \\
 &= \omega \cos \alpha - \dot{\phi} \frac{I_3}{L} \omega \cos \alpha \\
 &= \left(1 - \frac{I_3}{L} \dot{\phi}\right) \omega \cos \alpha \\
 &= \left(1 - \frac{I_3}{L} \omega \sqrt{1 + \left(\frac{I_3^2}{I^2} - 1\right) \cos^2 \alpha}\right) \omega \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

Tenslotte volgt uit $\omega_\xi = 0$ dat $\dot{\theta} = 0$.

9.3 De precessie van de equinoxen

De vrije precessie van de aarde verstrekt een goede illustratieve voorbeeld van onze bovenstaande bespreking. Het is bekend dat de rotatie-as een erg kleine hoek maakt met de geografische polen die de symmetrie-as definiëren. Deze hoek is ongeveer 0.2 boogseconden, oftewel ongeveer 0.9696×10^{-6} radialen. De verhouding tussen de hoofdtraagheidsmomenten is bij benadering

$$\frac{I_3}{I} \approx 1.00329.$$

Dan geeft (53) dat

$$\dot{\phi} = 0.00329$$

en de geassocieerde periode van de dobbering van de aarde is bij benadering

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = 0.997 \text{ dagen.}$$

Deze vrije precessie van de aardas in de ruimte is boven een veel langere gyroscopische precessie van ongeveer 26.000 jaar opgelegd. De latere resulteert uit het krachtmoment dat op de aarde wordt uitgevoerd door de zon en maan.

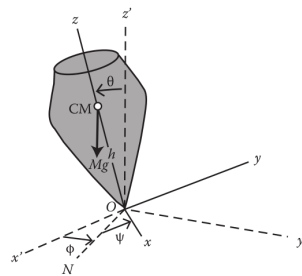
9.4 Vervolg 1

Tenslotte, benadrukken we dat de lezer niet moet worden verward door de drie basale hoeksnelheden: (1) de magnitude van de hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega}$; (2) de precessie van de rotatie-as (de richting van de hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega}$) met een hoeksnelheid k om de symmetrie-as van het lichaam en (3) de precessie van de hoeksnelheid $\dot{\phi}$ van de symmetrie-as om de invariabele lijn (de richting van de constante \mathbf{L}).

10 De beweging van een symmetrische tol met een vaste punt

In dit deel beschouwen we de beweging van een symmetrische tol dat, onder invloed van een krachtmoment dat door haar eigen gewicht wordt geproduceerd, vrij roteert om haar symmetrie-as. Hierbij nemen we een zeker vast punt O , dat verschilt van het zwaartepunt van de tol, op de symmetrie-as van de tol. Een grote variatie aan fysische systemen, van een eenvoudige speelgoed tot een gecompliceerde gyroscopische navigatie-instrument, wordt door dergelijke tollen benaderd. Deze theorie heeft zelfs toepassingen binnen de astronomie en de nucleaire fysica.

De notatie van de coördinatenassen is te zien in Figuur 14. De symmetrie-as van de tol, die we als de z -as van het lichaamssysteem kiezen, is een van de hoofdasen. Dan dienen we het hoofdtraagheidsmoment hierlangs te evalueren ten opzichte van O dat zich op een afstand h van het zwaartepunt bevindt. Verder blijft $I = I_1 = I_2$ onveranderd en wordt de oriëntatie van de tol geheel beschreven door de drie Euler hoeken als in Figuur 14.



Figuur 14: Een symmetrische tol in een homogeen zwaartekrachtsveld.

Hierin is ON de knopenlijn, θ geeft de inclinatie van de z -as met het verticaal, ϕ is de hoek die de knopenlijn en de x' -as insluiten en ψ is de hoek waarover de tol om haar symmetrie-as roteert. De veranderingen in ϕ en θ tijdens de beweging van de tol corresponderen met resp. de precessie en de nutatie.

De kinetische energie T is

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2.$$

Door gebruik van (20) is deze in termen van de Euler hoeken te schrijven als

$$T = \frac{1}{2} I(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2.$$

De potentiële energie V is

$$V = Mgh \cos \theta.$$

Voor een verzameling van deeltjes in een conservatieve krachtenveld, dat wordt beschreven door een potentiaal, geldt in inertiaële Carthesische coördinaten dat

$$m\ddot{x}_i = F_i.$$

Het linkerlid wordt bepaald door de functie voor de kinetische energie dat de afgeleide is van de impuls $p_i = \partial T / \partial \dot{x}_i$ en het rechterlid is de afgeleide van de potentiële energie $-\partial V / \partial x_i$. Doordat T onafhankelijk is van x_i en V van \dot{x}_i zijn beide leden in termen van de Lagrangiaan $\mathcal{L} = T - V$ te schrijven. De Lagrange-vergelijking wordt gegeven door

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

en is dus een functie van zowel de variabelen als hun snelheden.

Een variabele x_j is verwaarloosbaar als de Lagrangiaan er niet van afhangt. Natuurlijk willen we de Lagrangiaan er alsnog voor oplossen doordat \dot{x}_j zich alsnog in de Lagrangiaan kan bevinden en de overige variabelen kan beïnvloeden. Dan volgt uit de Lagrange-vergelijking dat

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0$$

zodat als

$$p_j := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j}$$

een gegeneraliseerde impuls definieert deze wordt behouden, oftewel $dp_j/dt = 0$.

De Lagrangiaan \mathcal{L} is

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2} I(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta. \end{aligned}$$

Het is te gecompliceerd de drie bewegingsvergelijkingen van Lagrange op te lossen voor de Euler hoeken. De nodige gegevens zijn echter te verkrijgen door de constanten van de beweging te onderzoeken. Hiertoe merken we eerst op

dat de Lagrangiaan onafhankelijk is van zowel ϕ als van ψ . De gegeneraliseerde impulsen hiervan, oftewel

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I a \quad \text{en} \quad (54)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I b, \quad (55)$$

zijn hierdoor constanten van de beweging. Hierbij zijn a en b constanten. Dit resultaat is ook af te leiden door het krachtmoment te beschouwen. De gravitatie als krachtmoment is langs de knopenlijn gericht en doordat zowel de z - als de z' -as hier loodrecht op staan is er geen component van het krachtmoment langs deze assen gericht, oftewel $\tau_\theta = Mgh \sin \theta$, $\tau_\phi = 0$ en $\tau_\psi = 0$.

Vergelijkingen (54) en (55) kunnen worden opgelost voor $\dot{\phi}$ en $\dot{\psi}$ in termen van θ . Eerst herschrijven we vergelijking (55) als

$$\dot{\psi} = \frac{I b - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3}. \quad (56)$$

Substitueren van dit resultaat in vergelijking (54) voor het elimineren van ψ geeft

$$I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I b \cos \theta = I b \quad \text{oftewel} \\ \dot{\phi} = \frac{a - b \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (57)$$

Dit levert de precessie $\dot{\phi}$ als θ bekend is. Door het gebruiken van de uitdrukking voor $\dot{\phi}$ in vergelijking (56) verkrijgen we

$$\dot{\psi} = \frac{I b}{I_3} - \cos \theta \frac{a - b \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (58)$$

Als θ bekend was als functie van de tijd konden de vergelijkingen (57) en (58) worden geïntegreerd voor het leveren van de tijdsafhankelijke ϕ en ψ .

Er is nog een bewegingsconstante beschikbaar. Als er geen wrijvingskrachten werken op de tol waarbij energieverlies optreedt, dan blijft de totale energie constant, oftewel

$$E = \frac{1}{2} (I \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgh \cos \theta = \text{constant}. \quad (59)$$

Nu blijkt uit (55) dat niet alleen E maar ook de verwaasloosbare

$$\frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

een bewegingsconstante is. Door combinatie hiervan met (59) vinden we

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} (I \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + Mgh \cos \theta = \text{constant}. \quad (60)$$

De vergelijkingen (57) en (58) kunnen worden gebruikt voor het elimineren van $\dot{\phi}$ uit deze vergelijking, dat resulteert in een differentiaalvergelijking dat alleen θ

en $\dot{\theta}$ inhoudt. Dan vonden we, uitgaande van de waarde van θ , dat (57) en (58) resp. de hoeken ϕ en ψ overlieten als functies van de tijd. Door het invullen van (57) in (60) krijgen we

$$E' = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{I(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V'(\theta) \quad \text{waarbij} \quad (61)$$

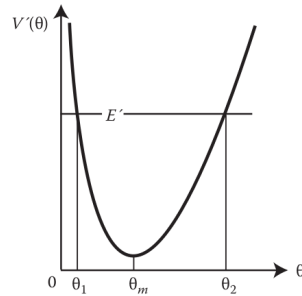
$$V' = \frac{I(a - b \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta$$

kan worden beschouwd als een ‘effectieve potentiaal’. Vergelijking (61) kan worden opgelost voor het verkrijgen van $t(\theta)$, namelijk

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2[E' - V'(\theta)]}{I}}}$$

Door deze elliptische integraal op te lossen is het mogelijk $\theta(t)$ te verkrijgen. Wegens de complexiteit hiervan richten we ons op methoden als in de volgende delen voor het verkrijgen van sommige kwalitatieve eigenschappen van de beweging.

Als we $V'(\theta)$ plotten tegen θ als in Figuur 15 tussen de fysische limietbereiken $0 \leq \theta < \pi$ hebben we een energie-diagram van de centrale kracht beweging. Voor een gegeven totaal en constante energie E , zal de beweging beperkt worden door de grenzen van θ . We duiden deze extremen aan met θ_1 en θ_2 . De symmetrie-as Oz van de tol zal heen en weer dobberen tussen de twee circulaire kegels met halve top hoeken θ_1 en θ_2 . Een stabiele of pure precessie (precessie zonder nutatie) is ook mogelijk. We zullen dit tweede geval als eerste behandelen.



Figuur 15: Een energie-diagram voor de tol.

10.1 Precessie zonder nutatie

De energie-diagram heeft een enkelvoudig minimum bij $\theta = \theta_m$. De beweging onder een dergelijke vaste inclinatie is een stabiele precessie. De waarde van θ_m kan worden gevonden door te stellen dat

$$\left. \frac{\partial V'}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_m} = 0$$

en we vinden dat

$$I \cos \theta_m B^2 - Ib \sin^2 \theta_m B - Mgh \sin^4 \theta_m = 0 \quad \text{waarbij}$$

$$B = a - b \cos \theta$$

Deze kwadratische vergelijking in B kunnen we oplossen in termen van θ_m en we verkrijgen

$$B = \frac{b \sin^2 \theta_m}{2 \cos \theta_m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgh \cos \theta_m}{Ib^2}} \right). \quad (62)$$

Voor een fysische oplossing dient B reëel te zijn. Dus kan de grootte onder het wortelteken niet negatief zijn. Als $\theta_m < 90^\circ$ hebben we

$$Ib^2 > 4Mgh \cos \theta_m, \quad \text{oftewel} \quad (Ib)^2 > 4IMgh \cos \theta_m. \quad (63)$$

Nu volgt uit (55) dat

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3\omega_3 = Ib$$

oftewel dat

$$\omega_3 = \frac{Ib}{I_3}.$$

Combineren hiervan met (63) levert

$$\omega_3 > \frac{2\sqrt{MghI \cos \theta_m}}{I_3}. \quad (64)$$

Alleen als de tol minimaal deze waarde heeft, voor de hoeksnelheid van de rotatie, is er stabiele precessie mogelijk. Voor $\theta = \theta_m$ geeft (57)

$$\dot{\phi}_m = \frac{B}{\sin^2 \theta_m}$$

wat betekent dat we twee mogelijke waarden hebben voor de precessionele hoeksnelheid: een voor elke van de waarden van B gegeven door (62). Voor een snel roterende tol is ω_3 (of Ib) veel groter dan het zojuist gegeven minimum. Dus is de tweede term onder het wortelteken van (62) relatief klein. Na uitschrijven van deze term behouden we in beide gevallen alleen de eerste niet-verdwijvende term, en vinden we, afhankelijk of we de plus- of de minteken kiezen dat

$$\begin{aligned} \text{snelle precessie: } \dot{\phi}_{m(+)} &\cong \frac{I_3\omega_3}{I \cos \theta_m} \\ \text{langzame precessie: } \dot{\phi}_{m(+)} &\cong \frac{Mgh}{I_3\omega_3}. \end{aligned}$$

Een langzame precessie is meestal waargenomen. We benadrukken dat een stabiele precessie (beweging met $\dot{\theta} = 0$ en $\dot{\phi} = \text{constant}$) alleen onder zeer bijzondere beginvoorwaarden kan optreden. De schijnbare afwezigheid van de θ -beweging in praktische gevallen is een resultaat van het feit dat de rotatie meestal erg groot(schalig) is. In dit geval, kan worden laten zien dat het bereik van de variatie van θ zeer klein zal zijn gedurende de beweging en dus, vaak nagelaten wordt.

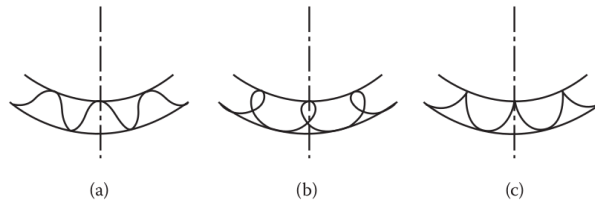
Het is algemeen bekend dat als een tol snel begint te roteren en met zijn symmetrie-as verticaal staat de as van de tol voor even in een rechtopstaande positie stabiel zal blijven. Dit geval wordt rust genoemd. Dit correspondeert met de constante waarde van nul voor θ in (64). Dus de voorwaarde voor de stabiliteit van de tol in rust is gegeven door

$$\omega_3 > \frac{2\sqrt{MghI}}{I_3}.$$

Geleidelijk aan remt wrijving de tol af zodat de zojuist gegeven conditie niet langer geldt. De tol begint dan te dalen en valt tenslotte om.

10.2 Precessie met nutatie

Voor het algemene geval, waarin $\theta_1 < \theta < \theta_2$, zal de symmetrie-as, tijdens het precederen om de Oz' -as met een hoeksnelheid $\dot{\phi}$, heen en weer dobberen tussen de rechte kegels met de halve tophoeken θ_1 en θ_2 . Als $\dot{\phi}$ niet van teken verandert, terwijl θ tussen haar limieten varieert, dan is het beschreven pad door de projectie van de symmetrie-as op de eenheidsbol, met het middelpunt in de oorsprong, een curtate cycloïde als in Figuur 16a. Dit is het pad dat wordt beschreven door een vast punt op een cirkelschijf (buiten het middelpunt en de rand ervan) dat over een recht oppervlak rolt. De horizontale cirkels zijn de doorsnedes van de kegels, met halve tophoeken θ_1 en θ_2 , met de eenheidsbol. Als $\dot{\phi}$ van teken verandert tussen de limietwaarden van θ , dan is het beschreven pad door de nutationele en precessionele symmetrie-as een prolate cycloïde als in Figuur 16b. In tegenstelling tot het curtate geval ligt het vaste punt in dit geval buiten de cirkelschijf. Als $\dot{\phi}$ bij een van de limietwaarden van θ , bijvoorbeeld bij θ_1 , gelijk is aan nul, dan leidt het tot een cycloïde als in Figuur 16c. In dit geval ligt het vaste punt op de rand van de rollende cirkelschijf.



Figuur 16: (a) $\dot{\phi}(t) \neq 0$ voor alle t , (b) $\dot{\phi}(t)$ verandert van teken voor $\phi > \phi_1$ en (c) $\dot{\phi}(t) = 0$ voor $\phi = \phi_1$.

We berekenen nu deze bewegingen voor een vaak waargenomen geval, namelijk, voor een snel roterende tol dat een langzame precessiesnelheid ($|\dot{\phi}| \approx 0$) en een kleine nutatiehoek ($\theta \approx 0$) heeft. Een benaderende oplossing voor de beweging met deze voorwaarde is niet moeilijk te vinden. We herschrijven (54) eerst als

$$I \sin^2 \theta \dot{\phi} + I_3 \omega_3 \cos \theta = I \alpha,$$

differentiëren deze dan naar de tijd en verkrijgen

$$\begin{aligned} I \sin \theta \ddot{\phi} &= I_3 \omega_3 \dot{\theta} - I \sin 2\theta \dot{\theta} \dot{\phi} \\ &\approx I_3 \omega_3 \dot{\theta} - 2I \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \\ &\approx I_3 \omega_3 \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (65)$$

Vervolgens hebben we

$$I \ddot{\theta} = (Mgh - I_3 \omega_3 \dot{\phi}) \sin \theta \quad (66)$$

uit Lagrange's vergelijking voor θ , namelijk

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

Bij het afleiden van (65) en (66) zijn de kwadratische termen in $\dot{\phi}$ en $\dot{\theta}$ verwaarloost. Als we ω_P en ω_l definiëren als

$$\omega_P := \frac{Mgh}{I_3 \omega_3} \quad \text{en} \quad \omega_l := \frac{I_3 \omega_3}{I},$$

dan worden (65) en (66) in termen hiervan geschreven als

$$\ddot{\phi} \sin \theta = \omega_l \dot{\theta} \quad \text{en} \quad \ddot{\theta} = \omega_l (\omega_P - \dot{\phi}) \sin \theta. \quad (67)$$

Als we de eerste vergelijking differentiëren naar de tijd en dan substitueren in de tweede vergelijking verkrijgen we

$$\frac{d^2 \dot{\phi}}{dt^2} + \omega_l^2 \dot{\phi} = \omega_l^2 \omega_P$$

waarbij een kwadratische term van orde $\ddot{\phi} \dot{\theta}$ is laten vallen. De oplossing van deze vergelijking is van de vorm

$$\dot{\phi}(t) = \omega_P + A \cos(\omega_l t + \alpha).$$

Voor de beginvoorwaarden $\dot{\phi} = \omega_0$, $\phi = 0$ en $\dot{\theta} = 0$ en $\theta = \theta_0$ op $t = 0$ vinden we $A = \omega_0 - \omega_P$ en $\alpha = 0$. Dus hebben we

$$\dot{\phi}(t) = \omega_P - (\omega_P - \omega_0) \cos \omega_l t \quad \text{en} \quad \phi(t) = \omega_P t - \frac{\omega_P - \omega_0}{\omega_l} \sin \omega_l t. \quad (68)$$

Voor het vinden van θ substitueren we (68) in de eerste vergelijking van (67). Dit geeft

$$\dot{\theta} = (\omega_P - \omega_0) \sin \omega_l t \sin \theta_0.$$

Bij het afleiden hiervan hebben we gebruikgemaakt van de benadering $\theta \cong \theta_0$ vanwege de smalle omvang van ω_P en ω_0 . De integratie van de voorgaande vergelijking geeft

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{\omega_P - \omega_0}{\omega_l} \sin \theta_0 (1 - \cos \omega_l t)$$

de oplossing voor θ . Dit is de vergelijking voor de nutatie van de tol tussen de limieten

$$\theta = \theta_0 \quad \text{en} \quad \theta = \theta_0 + 2 \frac{\omega_P - \omega_0}{\omega_l} \sin \theta_0$$

Het teken van $\omega_P - \omega_0$ bepaalt de onder- en bovengrens, resp. θ_1 en θ_2 . Een precessie $\phi(t)$ waar een sinusoidale beweging bovenop is geplaatst is een nutatie $\theta(t)$.

11 De stabiliteit van de rotationele beweging

In dit deel onderzoeken we de stabiliteitsvergelijking van krachts-vrije rotaties om de hoofdassen. Deze heeft belangrijke toepassingen. De stabiliteit van de beweging van een roterende satelliet is bijvoorbeeld van belang. Stabiliteit betekent dat als er een kleine verstoring wordt toegepast op het systeem, de beweging ofwel terug zal keren naar haar oorspronkelijke vorm ofwel er kleine oscillaties om heen zal uitvoeren. We zullen zien dat stabiele rotaties rond de hoofdassen corresponderende met de grootste en kleinste momenten optreden terwijl rotaties om de middelste as instabiel zijn.

We beschouwen de hoofdtraagheidsmomenten van een star lichaam waarvoor, voor $i \neq j$, geldt dat $I_i \neq I_j$ en kiezen de lichaamsassen die samenvallen met de hoofdassen. Voor lichamen die roteren om de hoofdas corresponderende met I_1 onderzoeken we het effect van verstoringen die kleine rotaties om de andere assen voortbrengen. De hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega}$ heeft nu de vorm

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

waarbij ω_2 en ω_3 kleine verstoringen zijn, waarvan het product te verwaarlozen is, in vergelijking met alle andere grootheden. Dus wordt de krachts-vrije Euler vergelijking (41) gegeven door

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 \frac{I_3 - I_1}{I_2} \quad \text{en} \quad \dot{\omega}_3 = \omega_2 \omega_1 \frac{I_1 - I_2}{I_3}.$$

De eerste vergelijking geeft aan dat $\omega_1 = \text{constant}$. Vervolgens differentiëren we de tweede vergelijking en substitueren er de derde vergelijking in en verkrijgen de benaderende vergelijking

$$\ddot{\omega}_2 + K\omega_2 = 0 \quad \text{waarbij} \\ K = (I_1 - I_3)(I_1 - I_2) \frac{\omega_1^2}{I_2 I_3}$$

voor ω_2 .

Het gedrag van ω_2 hangt voornamelijk af van het teken van K . Voor positieve K zal ω_2 een eenvoudige harmonische beweging uitvoeren met een constante amplitude en een negatieve K impliceert een exponentiële groei van ω_2 (dat wil zeggen dat het instabiel is). Dan kan de voorwaarde voor de stabiele beweging worden geschreven als

$$(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) > 0$$

die equivalent is aan

$$I_1 < I_2 \quad \text{en} \quad I_1 < I_3 \quad \text{of} \quad I_1 > I_2 \quad \text{en} \quad I_1 > I_3.$$

Evenzo levert onderzoek van ω_3 hetzelfde resultaat op. Dus concluderen we dat stabiele rotaties optreden om de hoofdassen corresponderende met de grootste en de kleinste momenten en rotaties om de hoofdas corresponderende met het middelste moment instabiel zijn.

Voor twee gelijke momenten, bijvoorbeeld $I_1 = I_2 = I$, zijn alleen rotaties om de hoofdas corresponderende met I_3 stabiel, onafhankelijk of I_3 groter of kleiner is dan I .

12 Bibliografie

12.1 Literatuur

Classical Dynamics of Particles and Systems, S.T. Thornton, and J.B. Marion, 5th edition (Brooks/Cole).

Classical Mechanics, H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko, 3rd edition (Addison Wesley), h. 4 en 5.

Introduction to Classical Mechanics, A.P. Arya, 2nd edition (Prentice-Hall), h. 9 en 13.

Classical Mechanics, Joel A. Shapiro, October 5, 2010, par. 2.1, 2.4.1 en h. 4.

Classical Dynamics, Dr. David Tong, University of Cambridge Part II Mathematical Tripos, par. 3.1.1, 3.2.2-3.4.2 en 3.5.2-3.6.4.

12.2 Figuren

De figuren zijn vervaardigt met het computeralgebrasysteem Geogebra.