W. Nijgh

Differentiaalmeetkunde via schoven

Bachelorscriptie

30 augustus 2019

Scriptiebegeleider: dr. D. Holmes

Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Inhoudsopgave

Introductie

In de differentiaalmeetkunde bestuderen we manifolds. Dit zijn topologische ruimten met extra structuur, waardoor we in tegenstelling tot de topoloog het verschil kunnen zien tussen een bol en een kubus. Deze extra structuur wordt traditioneel aangebracht via kaarten, atlassen en transitie-afbeeldingen. In deze scriptie zal deze structuur op een alternatieve manier aangebracht worden, namelijk via schoven. Daarbij laten we zien dat deze constructie een equivalente manier geeft om manifolds te definiëren.

Nadat we manifolds op deze manier gedefinieerd hebben, zullen we twee verschillende definities geven van een raakruimte. Een raakruimte op een punt van een manifold is een vectorruimte van dezelfde dimensie als de dimensie van de manifold. De eerste definitie die we geven is een meer intuïtieve definitie via krommen. De tweede definitie maakt gebruik van schoven en geeft een algebraïsche constructie van de raakruimte waarbij we gebruik maken van de schoof. Hierbij laten we zien dat de constructies van beide vectorruimten natuurlijk isomorf zijn.

Als laatste zullen we kijken naar vezelproducten en deformaties van manifolds. Deformatietheorie is de studie naar kleine veranderingen. We zullen een korte introductie geven hoe we deze studie in het geval van manifolds zouden kunnen opzetten.

Het doel van dit onderzoek is om een opzet te geven van de studie van manifolds via schoven. De lezer die niet bekend is met de definities van manifolds via kaarten en atlassen kan zich wenden tot bijlage B. In het onderzoek worden ook verbanden gelegd met categorische constructies en worden enige resultaten uit de categorietheorie gebruikt. De lezer vindt in bijlage A een korte introductie in deze theorie en de belangrijkste resultaten die hiervan in dit onderzoek gebruikt zullen worden.

Voor de lezer die na dit alles nog niet genoeg heeft gehad, is er in de laatste bijlage, bijlage C, nog een derde definitie van raakruimte opgenomen. Deze raakruimte wordt gedefinieerd via lokaal geringde ruimten en de ring van duale getallen.

1 Differentieerbare manifolds via schoven

In dit hoofdstuk zullen we via een algebraïsche benadering een differentieerbare structuur definiëren op een topologische manifold. Dit zal gedaan worden aan de hand van schoven. Deze definitie is minder intuïtief dan de gebruikelijke definitie met atlassen en kaarten, maar in veel aspecten stukken eleganter. De definities in dit hoofdstuk zijn gebaseerd op de definities uit het eerste hoofdstuk van Ramanan 2005.

1.1 Schoven

In de algebraïsche meetkunde zijn sinds de tweede helft van de vorige eeuw schoven onmisbaar geworden. Er zijn verschillende manieren om een definitie van een schoof te geven maar in essentie komen ze vaak op hetzelfde neer. Hieronder de definities die wij hier zullen gebruiken, te beginnen met een definitie van een preschoof.

Definitie 1.1 (Ramanan 2005, Def 1.1.1)**.** *Zij X een topologische ruimte. Een **preschoof** $\mathcal{F}$ is een toewijzing aan elke open verzameling $U \subset X$ van een verzameling $\mathcal{F}(U)$ en voor elke open deelverzameling $V \subset U$ een **restrictieafbeelding** $\mathrm{res}_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ met de eigenschap dat voor elk tripel open verzamelingen $W \subset V \subset U$ geldt dat $\mathrm{res}_{VW} \circ \mathrm{res}_{UV} = \mathrm{res}_{UW}$ en $\mathrm{res}_{UU} = \mathrm{id}_U$.*

Als voor alle open $U \subset X$ geldt dat $\mathcal{F}(U)$ groepen zijn, en de restrictie afbeeldingen zijn groepshomomorfismen, dan zeggen we dat $\mathcal{F}$ een preschoof van groepen is. Op een zelfde manier kan men preschoven van ringen, vectorruimten, algebra's, etc. definiëren.

De bijbehorende afbeeldingen tussen preschoven worden als volgt gedefinieerd.

Definitie 1.2 (Ramanan 2005, Def 1.1.9)**.** *Zij X een topologische ruimte en $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ twee preschoven op X. Een **morfisme van preschoven** $f \colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ is een associatie bij elke open deelverzameling $U \subset X$ van een homomorfisme $f(U) \colon \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U)$ zodanig dat wanneer $V \subset U$ open is dat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"] & \mathcal{F}_2(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"] \\
\mathcal{F}_1(V) \arrow[r, "f(V)"] & \mathcal{F}_2(V)
\end{tikzcd}$$

Hiermee vormen preschoven een categorie. Als preschoven, preschoven van groepen zijn, dan hebben we als extra eis dat deze afbeeldingen groepshomomorfismen zijn. Analoge eisen gelden voor ringen, vectorruimten, algebra's, etc. Voor $\mathcal{F}$ een preschoof en $U \subset X$ een open deelverzameling worden de elementen van $\mathcal{F}(U)$ ook wel **de secties van $\mathcal{F}$ over U** genoemd.

Opmerking 1.3. Equivalent kan men een preschoof als een functor definiëren op de volgende manier: Een preschoof is een functor $\mathcal{F} \colon \mathbf{Op}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ waarbij $\mathbf{Op}(X)$ de categorie vormt van open deelverzamelingen van X met als morfismen de inclusieafbeeldingen en waarbij $\mathcal{C}$ een willekeurige categorie is. De morfismen van preschoven worden dan morfismen van functoren oftewel natuurlijke transformaties.

Hieronder geven we een eerste voorbeeld van een preschoof.

Voorbeeld 1.4. Zij X een topologische ruimte en A een verzameling. Dan is de toewijzing van A aan elke open deelverzameling $U \subset X$ met als restrictieafbeeldingen de identiteit van $A \to A$ een preschoof op X. Elke preschoof van deze vorm noemen we een **constante preschoof**. Indien A bijvoorbeeld een abelse groep is dan geeft deze constructie een preschoof van abelse groepen.

Het bovenstaande voorbeeld is een voor de hand liggend voorbeeld van een preschoof. Een ander belangrijk voorbeeld van een preschoof is dat we een preschoof op X altijd kunnen beperken tot iedere open verzameling $U \subset X$ op de te verwachten manier. Interessanter zijn de voorbeelden 1.8 en 1.9. Deze preschoven bezitten echter meer structuur, welke aanleiding geven tot de volgende definitie:

Definitie 1.5 (Ramanan 2005, Def 1.1.2)**.** *We noemen een preschoof een* ***schoof*** *als deze voldoet aan de volgende eigenschappen. Zij* $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ *een open overdekking van een open verzameling* $U \subset X$*. Dan geldt:*

1. *twee elementen* $s, t \in \mathcal{F}(U)$ *zijn gelijk als* $\mathrm{res}_{UU_i}\, s = \mathrm{res}_{UU_i}\, t$ *voor alle* $i \in I$*;*
2. *als de collectie* $\{s_i\}_{i \in I}$ *met* $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ *voldoet aan* $\mathrm{res}_{U_i U_i \cap U_j}\, s_i = \mathrm{res}_{U_j U_i \cap U_j}\, s_j$ *voor alle* $i, j \in I$*, dan bestaat er een* $s \in \mathcal{F}(U)$ *zodanig dat* $\mathrm{res}_{UU_i}\, s = s_i$ *voor alle* $i \in I$*.*

Een schoof wordt hiermee een preschoof die aan twee 'mooie' eigenschappen voldoet. Een morfisme van schoven is hetzelfde als een morfisme van preschoven tussen twee schoven. Hiermee vormen schoven met deze morfismen ook een categorie.

Een gevolg van de bovenstaande definitie is dat voor een schoof de toewijzing van de lege verzameling uit één element bestaat.

Lemma 1.6. *Zij* $\mathcal{F}$ *een schoof. Dan bestaat* $\mathcal{F}(\emptyset)$ *uit één element.*

Bewijs. We laten eerst zien dat $\mathcal{F}(\emptyset) \neq \emptyset$. De lege overdekking is een open overdekking van $\emptyset$. Per definitie van deze lege overdekking wordt aan eigenschap 2 van de schoof voldaan, want $I = \emptyset$. We concluderen dat er een element $s \in \mathcal{F}(\emptyset)$ bestaat.

Zij nu $s, t \in \mathcal{F}(\emptyset)$ gegeven. Vanwege eigenschap (1) van een schoof geldt dat twee elementen gelijk zijn als $\mathrm{res}_{UU_i}\, s = \mathrm{res}_{UU_i}\, t$ voor alle $i \in I$ met I een indexverzameling voor een open overdekking van U. Hier geldt dat de open overdekking leeg is en dus is de indexverzameling ook leeg en dus is eigenschap 1 per definitie waar. Kortom $s = t$. $\square$

Opmerking 1.7. Ook deze definitie kunnen we anders formuleren in de gevallen dat de preschoof een toewijzing is naar een categorie $\mathcal{C}$ waarin (alle) producten bestaan, dan is de bovenstaande definitie equivalent met eisen dat voor elke open overdekking $\bigcup_{i \in I} U_i$ in het volgende diagram $\mathcal{F}(U)$ tezamen met het eerste morfisme een equalizer (zie definitie A.17) is

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Hierbij wordt het eerste morfisme gegeven door het product van $\mathrm{res}_{UU_i} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_i)$ en de andere twee morfismen worden gegeven door het product van $\mathrm{res}_{U_i(U_i \cap U_j)} \colon \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ respectievelijk $\mathrm{res}_{U_j(U_I \cap U_j)} \colon \mathcal{F}(U_j) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

Hieronder zullen we twee voorbeelden geven van schoven op topologische ruimten. Het tweede voorbeeld blijkt in het bijzonder van belang te zijn voor het definiëren van een differentieerbare manifold met behulp van schoven.

Voorbeeld 1.8 (Ramanan 2005, Def 1.1.3: 5)**.** Zij X en Y twee topologische ruimten. De toewijzing aan elke open deelverzameling $U \subset X$ van de verzameling $\mathcal{F}(U)$ van continue afbeeldingen van U naar Y met de beperking als restrictie afbeelding vormt **de schoof van continue afbeeldingen naar Y op X.**

Bewijs. We dienen te laten zien dat deze toewijzing $\mathcal{F}$ voldoet aan de voorwaarden van definities 1.1 en 1.5. We merken op dat de toewijzing met de bijbehorende restrictie welgedefinieerd is.

Allereerst controleren we of aan de voorwaarde van een preschoof wordt voldaan. Zij $W \subset V \subset U$ een tripel open verzamelingen van M en zij $f \in \mathcal{F}(U)$ willekeurig gegeven. Er geldt dat

$\mathrm{res}_{UW}(f) = f|_W$ en omdat een restrictie continu is, geldt $f|_W \in \mathcal{F}(W)$. Verder geldt ook dat $\mathrm{res}_{VW} \circ \mathrm{res}_{UV}(f) = (f|_V)|_W = f|_W$, omdat eerst beperken op V en dan op W dezelfde restrictie geeft en dus zijn beide afbeeldingen gelijk. We concluderen dat de restrictieafbeelding voldoet aan de eigenschap van een preschoof en dus is $\mathcal{F}$ een preschoof op X.

Vervolgens controleren we of aan de voorwaarden van de schoof wordt voldaan. Zij $U \subset X$ een open verzameling en $\bigcup_{i\in I} U_i$ een open overdekking van U. Zij $f, g \in \mathcal{F}(U)$ willekeurig gegeven en stel $\mathrm{res}_{UU_i} f = f|_{U_i} = g|_{U_i} = \mathrm{res}_{UU_i} g$ voor alle $i \in I$. Zij nu $x \in U$ willekeurig gegeven. Dan geldt $x \in U_i$ voor een $i \in I$. En dus geldt dan hier dat $f(x) = f|_{U_i}(x) = g|_{U_i}(x) = g(x)$. En dus geldt $f = g$ en wordt aan de eerste voorwaarde voldaan.

Zij nu voor alle $i \in I$ een $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ waarvoor geldt dat voor alle $i, j \in I$ geldt dat $f_i|_{U_i\cap U_j} = \mathrm{res}_{U_iU_i\cap U_j} f_i = \mathrm{res}_{U_jU_i\cap U_j} f_j = f_j|_{U_i\cap U_j}$. Dan definiëren we de afbeelding $f(x) = f|_{U_i}(x)$ als $x \in U_i$. Omdat $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ geldt voor elke $x \in U$ dat er altijd een $i \in I$ zodanig dat $x \in U_i$ en dus is de afbeelding gedefinieerd voor heel U. Deze afbeelding is goed gedefinieerd vanwege de gelijkheid $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$. Verder merken we op dat voor $V \subset Y$ open geldt dat $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$ open is, omdat $f_i^{-1}(V)$ open is voor alle $i \in I$. Kortom f is continu en dus geldt $f \in \mathcal{F}(U)$.

Omdat $\mathcal{F}$ een preschoof is en aan beide voorwaarden van een schoof worden voldaan concluderen we dat $\mathcal{F}$ een schoof is op X. □

Voorbeeld 1.9 (Ramanan 2005, Def 1.1.3: 1)**.** Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ een open deelruimte en zij $k \geq 1$ of $k = \infty$. De toewijzing aan elke open deelverzameling $U \subset X$ van de verzameling $\mathcal{F}(U)$ van C^k-differentieerbare functies $f\colon U \to \mathbb{R}$ met de natuurlijke restrictie van functies als de restrictie afbeelding een schoof. Deze schoof noemen we **de schoof van C^k-differentieerbare functies op** X. We noteren deze schoof als $\mathcal{C}^k|_X$

Bewijs. Omdat differentieerbaarheid een lokale eigenschap is, is de restrictieafbeelding welgedefinieerd. Omdat deze restrictieafbeelding dezelfde is als in voorbeeld 1.8 en omdat elke toewijzing aan U een deelverzameling is van de toewijzing in voorbeeld 1.8, volgt daaruit dat aan de eigenschap van de preschoof en de eerste eigenschap van de schoof wordt voldaan. Doordat differentieerbaarheid een lokale eigenschap is, volgt uit dat voorbeeld dat ook aan de tweede eigenschap van de schoof wordt voldaan. □

De bovenstaande schoof is tevens een schoof van $\mathbb{R}$-algebra's, omdat vanwege Propositie B.3 elke verzameling $\mathcal{F}(U)$ een $\mathbb{R}$-algebra is en de restrictieafbeeldingen $\mathbb{R}$-algebra homomorfismen zijn. De bovenstaande schoof zal in de volgende paragraaf gebruikt worden om een differentieerbare manifold te construeren.

1.2 De categorie Man van differentieerbare manifolds via schoven

In deze paragraaf zullen we de objecten en morfismen in de categorie van differentieerbare manifolds definiëren. Allereerst geven we een definitie van een topologische manifold om vervolgens op deze manifolds een differentieerbare structuur te definiëren.

1.2.1 Objecten in Man

We zullen hieronder de volgende definitie gebruiken van een topologische manifold.

Definitie 1.10 (John M. Lee 2013, p2-3)**.** *Zij M een topologische ruimte en $n \geq 0$. We noemen M een **topologische manifold van dimensie** n of een **topologische n-manifold** als het voldoet aan de volgende voorwaarde:*

> *voor iedere $x \in M$ bestaat er een open omgeving U van x zodanig dat er een open deelverzameling $X \subset \mathbb{R}^n$ bestaat zodat U homeomorf is met X, i.e. M is lokaal Euclidisch van dimensie n.*

Vaak worden nog aanvullende eisen gesteld aan een topologische manifold om dit lijken op Euclidische ruimten meer specifiek te maken (c.q. John M. Lee 2013, Ramanan 2005). Vaak wordt geëist dat een manifold Hausdorff is, in andere woorden dat voor elke twee punten in een manifold er omgevingen zijn zodat de doorsnede leeg is. Een andere veel voorkomende eis is dat een manifold second-countable is, i.e. dat de manifold een aftelbare basis heeft voor de topologie of de iets minder strenge eis dat elk samenhangscomponent van de manifold een aftelbare basis heeft voor de topologie. Voor onze doeleinden zijn deze eigenschappen voor de meeste constructies niet nodig en vandaar dat wij deze meer algemene definitie zullen hanteren.

Merk op dat in deze definitie wel wordt aangenomen dat voor elk punt $x \in M$ de omgeving homeomorf is met $\mathbb{R}^n$ voor een vaste n. We sluiten daarmee topologische ruimten uit die samenhangscomponenten hebben die voldoen aan deze eigenschap maar een verschillende dimensie hebben waardoor het niet aan de bovenstaande definitie voldoet. Men zou deze definitie kunnen veralgemeniseren, maar hierbij moet men in sommige definities en bewijzen rekening houden met de verschillende samenhangscomponenten.

Belangrijke voorbeelden van topologische manifolds zijn de eenheidsbollen S^n. Zo is de rand van de eenheidsbol in $\mathbb{R}^3$, S^2, een topologische manifold van dimensie 2. Dat dit een topologische manifold is duidelijk uit het feit dat elke strikte open deelverzameling van S^n homeomorf is met een open deelverzameling $X \subset \mathbb{R}^n$. Andere voorbeelden zijn de torus, de Klein-fles en de projectieve ruimten $\mathbb{P}^n$. Ook elke open deelverzameling $U \subset M$ van een manifold zelf is een topologische manifold.

Lemma 1.11. *Zij M een topologische manifold van dimensie n en zij $U \subset M$ een open deelverzameling. Dan is U een topologische manifold van dimensie n.*

Bewijs. Zij $U \subset M$ een willekeurige open deelverzameling van M. Voor elke $x \in U \subset M$ bestaat er een open omgeving $V \subset M$ zodanig dat V homeomorf is met $X \subset \mathbb{R}^n$. Er is dus een homeomorfisme $\varphi\colon V \to X$. Nu vormt $W = U \cap V \subset U$ een open omgeving van $x \in U$. Definieer $Y = \varphi(W)$. De afbeelding $\varphi|_W\colon W \to Y$ geeft een homeomorfisme, omdat het de beperking is van een homeomorfisme φ. Via deze constructie krijgen we voor elk punt $x \in U$ een open omgeving W bestaat die homeomorf is met $Y \subset \mathbb{R}^n$ en dus is U een topologische manifold van dimensie n. $\square$

De eventuele aanvullende eisen als Hausdorff en second-countable zijn allen topologische eigenschappen welke deze deelverzamelingen U erven. Ook in meer strikte definities wordt daarmee elke open deelverzameling U een topologische manifold.

Een opmerking betreffende de lege verzameling is hier misschien op zijn plaats. Wie definitie 1.10 goed leest, komt tot de conclusie dat de lege verzameling voldoet aan deze definitie voor elke willekeurige dimensie n. Daarmee is de lege verzameling een manifold en deze noemen we dan ook wel de lege-manifold.

Een belangrijke stelling over topologische manifolds is dat de dimensie invariant is. Het bewijs hiervan gebruikt homologiegroepen en gaat buiten het bereik van deze scriptie.

Stelling 1.12 (John M. Lee 2013, Thm 1.2)**.** *Zij M een niet-lege topologische manifold van dimensie n. Dan is M niet homeomorf met een topologische manifold van dimensie m tenzij $m = n$.*

We zullen nu met behulp van schoven een differentieerbare structuur op een manifold definiëren.

Definitie 1.13 (Ramanan 2005, Def 1.3.1)**.** *Zij M een topologische n-manifold. Zij $\mathcal{F}$ een schoof van deelalgebra's van de schoof van continue functies op M. In andere woorden, voor elke $U \subset M$ open geldt dat $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{C}_M(U)$ een deelalgebra is, waarbij $\mathcal{C}_M$ de schoof van continue afbeeldingen van M naar $\mathbb{R}$ is en dat de restrictieafbeeldingen van $\mathcal{F}$ hetzelfde zijn als de restrictieafbeeldingen van $\mathcal{C}_M$. We noemen $(M, \mathcal{F})$ een **C^k-differentieerbare manifold van dimensie** n (of C^k-manifold) als het voldoet aan de volgende voorwaarde:*

> *voor elke $x \in M$ bestaat er een open omgeving U van x zodanig dat er een open deelverzameling $X \subset \mathbb{R}^n$ en een homeomorfisme $\varphi\colon U \to X$ bestaat, waarvoor voor elke*

open $V \subset U$ geldt dat $\mathcal{F}(V) = \{f \circ \varphi|_V : f \in \mathcal{C}^k|_X(\varphi(V))\}$ waarbij $\mathcal{C}^k|_X$ de schoof van k-differentieerbare functies op X is.

We noemen een homeomorfisme $\varphi\colon U \to X$ dat aan de bovenstaande definitie voldoet een ***kaart*** *van M.*

(N.B. Deze definitie wijkt deels af van de definitie van Ramanan. Zijn constructie gaat via het inverse beeld van een schoof. De constructie van Ramanan lijkt echter niet geheel juist. Dit inverse beeld geeft namelijk een schoof van functies van $\mathbb{R}^n \supset V \to \mathbb{R}$ op de manifold en geen functies van $U \to \mathbb{R}$ voor open deelverzamelingen $U \subset M$. Vandaar dat we hier een meer expliciete definitie hebben gegeven.)

Voor de hand liggende voorbeelden van differentieerbare manifolds worden hiermee de open deelverzamelingen in $X \subset \mathbb{R}^n$ met de schoof $\mathcal{C}^k|_X$. Ook elke open deelverzameling $U \subset M$ van een differentieerbare manifold met als schoof de beperking van de schoof van M op U wordt op de gebruikelijke wijze een manifold.

De bovenstaande definitie zegt dat voor elke $x \in M$ een homeomorfisme $\varphi\colon U \to M$ bestaat waarvoor de schoof $\mathcal{F}|_U$ via φ correspondeert met de schoof $\mathcal{C}^k_X$. In andere woorden voor iedere functie $f \in \mathcal{F}(V)$ kunnen we een functie $g \in \mathcal{C}^k(\varphi(V))$ vinden zodanig dat $f = g \circ \varphi|_{\varphi(V)}$ en dus omdat φ een homeomorfisme is vinden we ook dat elke $g \in \mathcal{C}^k(\varphi(V))$ te schrijven is als $g = f \circ \varphi^{-1}|_V$. Op deze manier is er voor elke $V \subset M$ die binnen een kaart $\varphi\colon U \to X$ een natuurlijke bijectie tussen $\mathcal{F}(V) \leftrightarrow \mathcal{C}^k(\varphi(V))$. Deze bijectie geeft de volgende voor de hand liggende benaming van de secties:

Definitie 1.14 (Ramanan 2005, Def 1.3.6)**.** *Zij $(M, \mathcal{F})$ een C^k-manifold. De secties van $\mathcal{F}$ op een open verzameling $U \subset M$ noemen we de* ***C^k-differentieerbare functies van*** *U.*

Ook voor de deelverzamelingen $U \subset M$ die niet bevat zijn in een kaart is de bovenstaande benaming voor de handliggend. Hierna zullen we de bijbehorende morfismen van manifolds definiëren, de C^k-differentieerbare afbeeldingen. Met deze definitie kan worden nagegaan dat de bovenstaande functies precies de C^k-differentieerbare afbeeldingen zijn tussen de manifolds $(U, \mathcal{F}|_U)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{C}^k)$.

Opmerking 1.15. Sommige auteurs die manifolds via schoven definiëren kiezen ervoor dit te doen via lokaal geringde ruimten (c.q. Navarro González en Sancho de Salas 2003). Hiermee wordt de categorie van manifolds een deelcategorie van de categorie van lokaal geringde ruimten. In bijlage C vindt men hier een aantal aantekeningen over.

1.2.2 Morfismen in Man

Definitie 1.16 (Ramanan 2005, Def 1.3.7)**.** *Zij $(M, \mathcal{F}_M)$ en $(N, \mathcal{F}_N)$ twee C^k-manifolds en zij $F\colon M \to N$ een continue afbeelding. We zeggen dat F* ***C^k-differentieerbaar*** *is als voor elke $x \in M$ en elke differentieerbare functie f in een omgeving V van $F(x) \in N$ geldt dat de samenstelling $f \circ F$ een C^k-differentieerbare functie is op $F^{-1}(V)$.*

Uit de definitie is direct in te zien dat elke beperking van een C^k-differentieerbare afbeelding ook C^k-differentieerbaar is. Wat niet direct duidelijk is, is dat deze definitie op $\mathbb{R}^n$ overeenkomt met de bekende definitie van een C^k-differentieerbare afbeelding. Het volgende bewijs laat zien dat dit wel het geval is.

Lemma 1.17. *Zij $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ en $F\colon X \to Y$ een afbeelding. Dan is F een C^k-differentieerbare afbeelding van manifolds $(X, \mathcal{C}^k|_X)$ naar $(Y, \mathcal{C}^k|_Y)$ dan en slechts dan als F een C^k-differentieerbare afbeelding is als afbeelding van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^n$.*

Bewijs. Om het onderscheid in het bewijs duidelijk te maken, zullen we het hieronder over C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbaar en C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar hebben.

Stel F is C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbaar. Dan geldt voor alle $x \in X$, elke omgeving $V \subset Y$ van $F(x)$ en elke $f \in \mathcal{C}^k|_Y(V)$ dat $f \circ F$ C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbaar is vanwege Propositie B.2(d) en dus $f \circ F \in \mathcal{C}^k|_X(f^{-1}(V))$. We concluderen dat F C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar is.

Stel F is C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar. Zij $p_i \colon Y \to \mathbb{R}$ de projectieafbeelding van de i-de coördinaat van Y. We merken op dat deze afbeelding C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbaar is. Nu geldt voor $x \in X$ en iedere open omgeving $V \subset Y$ van $F(x)$ dat $p_i \in \mathcal{C}^k|_Y(V)$. Tevens geldt nu omdat F C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar is dat $p_i \circ F|_{F^{-1}(V)} \in \mathcal{C}^k|_X(F^{-1}(V))$. Dit betekent dat $p_i \circ F|_{F^{-1}(V)}$ een C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare afbeelding is van $F^{-1}(V) \to \mathbb{R}$. We merken op dat $F|_{F^{-1}(V)}$ componentsgewijs te schrijven is als $F|_{F^{-1}(V)}(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$. Hieruit wordt duidelijk dat $p_i \circ F|_{F^{-1}(V)} = F_i$. We concluderen dat iedere f_i een C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare afbeelding en omdat iedere component C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbaar is, geldt daarom dat $F|_{F^{-1}(V)}$ een C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare afbeelding is. En omdat F differentieerbaar is voor iedere $x \in M$ concluderen we dat F een C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare afbeelding is. □

Lemma 1.18. *Zij $(L, \mathcal{F}_L)$, $(M, \mathcal{F}_M)$ en $(N, \mathcal{F}_N)$ drie C^k-manifolds en zij $F \colon L \to M$ en $G \colon M \to N$ twee C^k-differentieerbare afbeeldingen. Dan is de samenstelling $G \circ F \colon L \to N$ een C^k-differentieerbare afbeelding.*

Bewijs. Voor elke $F(x) \in M$ en elke omgeving V van $G(F(x)) \in N$ geldt voor elke $f \in \mathcal{F}_N(V)$ dat $G \circ f$ een C^k-differentieerbare functie is op $G^{-1}(V)$. En omdat $G^{-1}(V)$ een omgeving is van $F(x)$ volgt dat $f \circ G \circ F$ een C^k-differentieerbare functie is op $F^{-1} \circ G^{-1}(V) = (G \circ F)^{-1}(V)$. □

Uit dit resultaat volgt dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en $k = \infty$ deze objecten en morfismen een categorie vormen, welke we aanzullen duiden als $\mathbf{Man}_k$. De isomorfismen in deze categorieën noemen we diffeomorfismen en deze worden als volgt gedefinieerd:

Definitie 1.19 (Ramanan 2005, Def 1.3.9)**.** *Zij $(M, \mathcal{F}_M)$ en $(N, \mathcal{F}_N)$ twee C^k-manifolds en zij $F \colon M \to N$ een homeomorfisme. We zeggen dat F een C^k-**diffeomorfisme** is, als zowel F als F^{-1} C^k-differentieerbaar zijn. Als er een F bestaat met deze eigenschap noemen we $(M, \mathcal{F}_M)$ en $(N, \mathcal{F}_N)$ C^k-**diffeomorf**.*

In het bijzonder krijgen we via deze definitie dat iedere kaart $\varphi \colon U \to X$ van een manifold een diffeomorfisme is:

Lemma 1.20. *Zij $(M, \mathcal{F}_M)$ een C^k-manifold. Dan geldt voor iedere kaart $\varphi \colon U \to X$ dat φ een C^k-diffeomorfisme is van $(U, \mathcal{F}_M|_U) \to (X, \mathcal{C}^k_X)$.*

Bewijs. Er geldt voor iedere open $Y \subset X$ en iedere $f \in \mathcal{C}^k_X(Y)$ dat $f \circ \varphi \in \mathcal{F}_M(\varphi^{-1}(Y))$ per definitie van een manifold (definitie 1.13). Kortom φ is C^k-differentieerbaar.

Voor φ^{-1} geldt voor iedere open $V \subset U$ en iedere $f \circ \mathcal{F}_M(V)$ dat f vanwege definitie 1.13 te schrijven is als $g \circ \varphi$ met $g \in \mathcal{C}^k_X(\varphi(V))$. Nu volgt $f \circ \varphi = (g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = g$ en dus is φ^{-1} C^k-differentieerbaar. □

1.3 Correspondentie tussen schoven en atlassen

In dit hoofdstuk zullen we laten zien dat de bovenstaande definitie van manifolds via schoven, welke we in deze paragraaf aan zullen duiden als $\mathcal{F}$-manifolds, correspondeert met de definitie via atlassen, hier aangeduid als $\mathcal{A}$-manifolds. De definitie van een $\mathcal{A}$-manifold die we hierbij gebruiken is de volgende: we noemen $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold als M een topologische manifold is (volgens definitie 1.10) en $\mathcal{A}_M$ een maximale C^k-differentieerbare atlas is. (Voor een gedetailleerde behandeling van manifolds via atlassen kan men zich wenden tot bijlage B.)

We merken op dat wederom geen aanvullende eisen zoals second-countable en Hausdorff op deze topologische manifold hebben. Mocht men deze voorwaarden wel in de definitie van een manifold willen hebben, dan laat het onderstaande bewijs zich één op één vertalen naar deze situatie, mits men deze voorwaarden voor beide, dus zowel $\mathcal{A}$- als $\mathcal{F}$-manifolds, eist.

Bij de aanduiding $\mathcal{F}$-manifolds en $\mathcal{A}$-manifolds bedoelen we met $\mathcal{A}_M$ een atlas op een manifold M en met $\mathcal{F}_M$ een schoof op M. Daarbij zullen we als we het in dit hoofdstuk over kaarten hebben, de kaarten van een atlas $\mathcal{A}_M$ bedoelen, tenzij anders vermeldt. (N.b. uit de resultaten van dit hoofdstuk kan men afleiden dat ook de definities van kaarten corresponderen.) Ook zullen we onderscheid maken tussen C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare, C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare en C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare afbeeldingen, waarmee voor de lezer duidelijk wordt over welke vorm van differentieerbaarheid we het hebben.

We zullen allereerst laten zien hoe uit een atlas een schoof gemaakt kan worden en vervolgens hoe uit een schoof een atlas gemaakt wordt. Een interessante vraag is wat er gebeurt als we deze constructie tweemaal toepassen: krijgen we dezelfde atlas/schoof terug? Het antwoord op deze vraag blijkt ja te zijn. Daarmee geven deze constructies aanleiding tot functoren welke isomorfismen van categorieën zijn. (Voor de definitie van een isomorfisme van categorieën, zie bijlage A.)

1.3.1 Van atlas naar schoof

We definiëren allereerst aan de hand van de atlas op een $\mathcal{A}$-manifold een schoof op deze manifold.

Propositie 1.21. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold van dimensie n. Definieer voor elke open deelverzameling $U \subset M$ de verzameling*

$$\mathcal{F}_M(U) = \{f \colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is } C^k\text{-}\mathcal{A}\text{-differentieerbaar}\}$$

*en definieer voor elke open verzameling $V \subset U$ de restrictieafbeelding $\mathrm{res}\colon \mathcal{F}_M(U) \to \mathcal{F}_M(V)$ door $\mathrm{res}(f) := f|_V \colon V \to \mathbb{R}$. Dan is de hierboven gedefinieerde toewijzing $\mathcal{F}_M$ een schoof op M. We noemen dit de **schoof op M geïnduceerd door de atlas $\mathcal{A}_M$**.*

Bewijs. We dienen te laten zien dat $\mathcal{F}_M$ voldoet aan de voorwaarden van definities 1.1 en 1.5. Het is duidelijk dat $\mathcal{F}_M$ aan elke open verzameling $U \subset X$ een set $\mathcal{F}_M(U)$ en een restrictieafbeelding toewijst. We laten allereerst zien dat deze restrictieafbeelding welgedefinieerd is. Zij $V \subset U \subset M$ twee open deelverzamelingen en zij $f \in \mathcal{F}_M(U)$ willekeurig gegeven. Dan geldt dat de afbeelding $f|_V \colon V \to \mathbb{R}$ C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar is vanwege Lemma B.20. Dus $f \in \mathcal{F}_M(V)$ en daarmee is res welgedefinieerd.

Aangezien alle afbeeldingen in het bijzonder continu zijn volgt uit het bewijs van de schoof van continue functies uit voorbeeld 1.8 dat wordt voldaan aan de eigenschap van de preschoof en aan eigenschap één van de schoof. We dienen daarom te bewijzen dat ook aan de tweede eigenschap van de schoof wordt voldaan.

Zij $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ een open overdekking van een open verzameling $U \subset X$. Zij voor alle $i \in I$ een $f_i \in \mathcal{F}_M(U_i)$ waarvoor geldt dat voor alle $i, j \in I$ geldt dat $\mathrm{res}_{U_i U_i \cap U_j} f_i = \mathrm{res}_{U_j U_i \cap U_j} f_j$. Dan definiëren we de afbeelding $f(x) = f|_i(x)$ als $x \in U_i$. In voorbeeld 1.8 hebben we laten zien dat deze afbeelding goed gedefinieerd is. We dienen nu te bewijzen dat $f \in \mathcal{F}_M(U)$. Zij $x \in U$ dan geldt $x \in U_i$ voor een $i \in I$. Tevens is er een kaart $(V, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M|_{U_i}$ zodanig dat $f \circ \varphi^{-1}$ C^k-differentieerbaar is. Omdat $(V, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M|_{U_i}$ geldt dat $(V, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M|_U$. Kortom voor elke $x \in U$ kunnen we een omgeving vinden met deze eigenschap en dus volgt $f \in \mathcal{F}_M(U)$.

Omdat $\mathcal{F}_M$ een preschoof is en aan beide voorwaarden van een schoof worden voldaan concluderen we dat $\mathcal{F}_M$ een schoof is op M. □

De bovenstaande schoof die we gemaakt hebben uit de atlas op de $\mathcal{A}$-manifold, maakt van deze manifold een $\mathcal{F}$-manifold.

Stelling 1.22. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold van dimensie n. Zij $\mathcal{F}_M$ de schoof op M geïnduceerd door de atlas $\mathcal{A}_M$. Dan is $(M, \mathcal{F}_M)$ een C^k-$\mathcal{F}$-manifold van dimensie n.*

Bewijs. We zullen bewijzen dat voor elke $x \in M$ er een open omgeving U van x bestaat met $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^n$ een homeomorfisme en X open zodanig dat de restrictie van $\mathcal{F}_M$ op U het inverse beeld is van de schoof $\mathcal{C}^k|_X$ van C^k-differentieerbare functies op X.

Zij $x \in M$ willekeurig gegeven en laat (U, φ, X) een kaart van $\mathcal{A}_M$ zijn zodanig dat $x \in U$. We laten zien dat voor alle $V \subset U$ geldt dat $\mathcal{F}_M(V) = \{f \circ \varphi|_\varphi \mid f \in \mathcal{C}^k|_X(\varphi(V))\}$.

Zij $V \subset U$ open en $Y = \varphi(V)$. Zij $g \in \mathcal{F}_M(V)$. Dan geldt dat g een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare functie is per constructie. Vanwege Lemma B.17 volgt nu dat $g \circ \varphi^{-1}|_Y$ een C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare functie is. Dus voor $f = g \circ \varphi^{-1}|_Y$ vinden we $f \in \mathcal{C}^k|_X(V)$ en nu volgt dat $g = f \circ \varphi|_V$ en dus is $\mathcal{F}_M(V) \subset \{f \circ \varphi|_\varphi \mid f \in \mathcal{C}^k|_X(\varphi(V))\}$. Voor de ander kant merken we op dat voor $f \in \mathcal{C}^k|_X(V)$ dat $f \circ \varphi^{-1}|_Y$ een samenstelling is van $\mathcal{C}^k$-$\mathcal{A}$-differentieerbare functies en dus per definitie $f \in \mathcal{F}_M|_U(U_i)$. Kortom $\{f \circ \varphi|_\varphi \mid f \in \mathcal{C}^k|_X(\varphi(V))\} \subset \mathcal{F}_M(V)$.

We concluderen dat $\mathcal{F}_M(V) = \{f \circ \varphi|_\varphi \mid f \in \mathcal{C}^k|_X(\varphi(V))\}$ voor alle $V \subset U$ open. Omdat we voor elke $x \in M$ een kaart hebben in $\mathcal{A}_M$ per definitie van de atlas en dit voor elke kaart geldt, concluderen we dat $(M, \mathcal{F}_M)$ een C^k-$\mathcal{F}$-manifold is. □

De bovenstaande stelling geeft voor elk object in de categorie van C^k-$\mathcal{A}$-manifolds een object in de categorie C^k-$\mathcal{F}$-manifolds. We laten nu zien dat de bijbehorende morfismen, morfismen geven in de categorie C^k-$\mathcal{F}$-manifolds.

Stelling 1.23. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ twee C^k-$\mathcal{A}$-manifolds van dimensie m respectievelijk n. Zij $\mathcal{F}_M$ en $\mathcal{F}_N$ de schoven geïnduceerd door de atlassen $\mathcal{A}_M$ respectievelijk $\mathcal{A}_N$. En zij $F\colon M \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding. Dan is F een C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare afbeelding.*

Bewijs. Zij $U \subset N$ een open deelverzameling. Dan is $F^{-1}(U) \subset M$ een open deelverzameling. Nu volgt uit Lemma B.20 dat $F|_{F^{-1}(U)}$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding is. Zij nu $f \in \mathcal{F}_N(U)$ willekeurig gegeven. Dan is $f\colon U \to \mathbb{R}$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding per constructie uit 1.21. Vanwege Lemma B.17 volgt nu dat $f \circ F|_{F^{-1}(U)}\colon F^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding is. En dus geldt per constructie uit 1.21 dat $f \circ F \in \mathcal{F}_M(f^{-1}(U))$. Omdat dit geldt voor elke open deelverzameling $U \subset N$ en elke $\varphi \in \mathcal{F}_N(U)$ concluderen we dat F een C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare afbeelding is. □

1.3.2 Van schoof naar atlas

Propositie 1.24. *Zij $(M, \mathcal{F}_M)$ een C^k-$\mathcal{F}$-manifold van dimensie n. Definieer de collectie kaarten*

$$\mathcal{A}_M = \{(U, \varphi, X) \mid U \subset M \text{ open}, \ X \subset \mathbb{R}^n, \ \varphi : U \to X \text{ is een } C^k\text{-}\mathcal{F}\text{-diffeomorfisme}\}.$$

Dan is de hierboven gedefinieerde collectie $\mathcal{A}_M$ een C^k-differentieerbare atlas op M. We noemen dit de ***atlas op M geïnduceerd door de schoof $\mathcal{F}_M$****.*

Bewijs. We merken allereerst op dat we φ beschouwen als afbeelding van de $\mathcal{F}$-manifold $(U, \mathcal{F}_M|_U)$ naar de $\mathcal{F}$-manifold $(X, \mathcal{C}^k|_X)$. We dienen twee zaken te bewijzen. Allereerst dat deze collectie een overdekking van M vormt en daarnaast dat elk tweetal kaarten in $\mathcal{A}_M$ C^k-verenigbaar is.

Voor iedere $x \in M$ is er per definitie van een $\mathcal{F}$-manifold een kaart (U, φ, X) zodanig dat $\mathcal{F}_M|_U$ het inverse beeld is van de schoof $\mathcal{C}^k|_X$. Dit maakt van φ per definitie een C^k-$\mathcal{F}$-diffeomorfisme. Dus voor iedere $x \in M$ is er een kaart en dit maakt $\mathcal{A}_M$ een overdekking van M.

Zij (U, φ, X) en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_M$ twee kaarten. Als $U \cap V = \emptyset$ dan zijn ze per definitie C^k-verenigbaar dus stel dat $U \cap V \neq \emptyset$. Dan geldt vanwege Lemma 1.18 dat de transitieafbeelding $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar en dus vanwege Lemma 1.17 ook C^k-differentieerbaar. Analoog vinden we dat $\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$ C^k-differentieerbaar is. We concluderen dat de transitieafbeelding een C^k-diffeomorfisme is en dus zijn de kaarten C^k-differentieerbaar.

Omdat $\mathcal{A}_M$ een overdekking is en alle kaarten C^k-verenigbaar zijn, is $\mathcal{A}_M$ een C^k-differentieerbare atlas op M. □

In het volgende bewijs zullen we laten zien dat deze atlas maximaal is en dat daarmee $(M, \mathcal{A}_M)$ een $\mathcal{F}$-manifold is.

Stelling 1.25. *Zij* $(M, \mathcal{F}_M)$ *een* C^k*-*$\mathcal{F}$*-manifold van dimensie* n *en zij* $\mathcal{A}_M$ *de atlas op* M *geïnduceerd door de schoof* $\mathcal{F}_M$*. Dan is* $(M, \mathcal{A}_M)$ *een* C^k*-*$\mathcal{A}$*-manifold van dimensie* n*.*

Bewijs. We zullen laten zien dat de atlas $\mathcal{A}_M$ maximaal is. Zij (U, φ, X) een kaart die C^k-verenigbaar is met alle kaarten in $\mathcal{A}_M$. Dan is φ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding en dus vanwege Stelling 1.23 C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare afbeelding.

Het volgende wat we zullen nagaan is dat ook φ^{-1} een C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare afbeelding is. Zij $x \in X$ een punt. Dan is er een kaart $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_M$ zodat V een open omgeving van $\varphi^{-1}(x)$ is. Nu geldt dat $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar is. Tevens is $\psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)})$ een samenstelling van C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare functies. Kortom $\psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)}) = \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)}$ is een C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare functie. Aangezien we een dergelijke omgeving voor elke $x \in X$ kunnen vinden, volgt hieruit dat $\varphi^{-1}\colon X \to U$ C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar is.

Omdat φ tevens een homeomorfisme is, concluderen we dat φ een C^k-$\mathcal{F}$-diffeomorfisme is. Vanwege de constructie uit 1.24 volgt dat $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ en dus concluderen we dat $\mathcal{A}_M$ maximaal is. Daarmee is $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold. □

Wederom hebben we hiermee laten zien dat elk object in de categorie van C^k-$\mathcal{F}$-manifolds een object in de categorie C^k-$\mathcal{A}$-manifolds geeft. Ook de bijbehorende morfismen geven zoals te verwachten morfismen in de categorie C^k-$\mathcal{A}$-manifolds.

Stelling 1.26. *Zij* $(M, \mathcal{F}_M)$ *en* $(N, \mathcal{F}_N)$ *twee* C^k*-*$\mathcal{F}$*-manifolds van dimensie* m *respectievelijk* n*. Zij* $\mathcal{A}_M$ *en* $\mathcal{A}_N$ *de maximale atlassen geïnduceerd door de schoven* $\mathcal{F}_M$ *respectievelijk* $\mathcal{F}_N$*. En zij* $F\colon M \to N$ *een* C^k*-*$\mathcal{F}$*-differentieerbare afbeelding. Dan is* F *een* C^k*-*$\mathcal{A}$*-differentieerbare afbeelding.*

Bewijs. Zij $x \in M$. Dan zijn er kaarten $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_N$ met $x \in U$ en $F(x) \in V$. Nu geldt $F(U) \cap V \subset N$ en we definiëren $U_i = F^{-1}(F(U) \cap V) \subset U$ en $X_i = \mathrm{Im}(\varphi|_{U_i})$. We bekijken nu de kaart $(U_i, \varphi|_{U_i}, X_i)$. Omdat deze kaart een beperking is van de kaart $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ geldt $(U_i, \varphi|_{U_i}, X_i) \in \mathcal{A}_M$. Tevens geldt $F(U_i) = F(U) \cap V \subset V$ en dus is $\psi \circ F \circ (\varphi|_{U_i})^{-1}$ een afbeelding tussen manifolds $(X_i, \mathcal{C}^k|_{X_i})$ en $(Y, \mathcal{C}^k|_Y)$. Omdat zowel ψ, F en $(\varphi|_{U_i})^{-1}$ allen C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar zijn, volgt uit Lemma 1.18 dat de compositie C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbaar is. Uit Lemma 1.17 volgt nu dat $\psi \circ F \circ (\varphi|_{U_i})^{-1}$ C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbaar is.

Omdat voor elke $x \in M$ er kaarten te vinden zijn waarvoor dit geldt, concluderen we dat F een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding is. □

1.3.3 Isomorfisme van categorieën

Met de hierboven genoemde stellingen kunnen twee functoren worden gedefinieerd tussen de categorie $\mathcal{C}^k$-$\mathcal{A}$-manifolds welke we zullen aanduiden met $\mathcal{A}$-$\mathbf{Man}_k$ en de categorie $\mathcal{C}^k$-$\mathcal{F}$-manifolds $\mathcal{F}$-$\mathbf{Man}_k$.

De functor $F\colon \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k \to \mathcal{F}\text{-}\mathbf{Man}_k$ definiëren we als volgt: F stuurt een object $(M, \mathcal{A}_M)$ in $\mathcal{A}$-$\mathbf{Man}_k$ naar de manifold $(M, \mathcal{F}_M)$ in $\mathcal{F}$-$\mathbf{Man}_k$ waarbij M topologisch dezelfde ruimte is en waarbij $\mathcal{F}_M$ de schoof geïnduceerd door de atlas $\mathcal{A}_M$ is uit Propositie 1.21. De afbeeldingen tussen de objecten blijven onder deze functor topologisch dezelfde afbeeldingen. Deze functor is welgedefinieerd vanwege Stelling 1.22 en Stelling 1.23. Verder kan men nagaan dat F inderdaad voldoet aan de functoriële eigenschappen $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ en $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ omdat de afbeeldingen topologisch hetzelfde blijven.

De functor $G\colon \mathcal{F}\text{-}\mathbf{Man}_k \to \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k$ definiëren we op een zelfde manier: G stuurt een object $(M, \mathcal{F}_M)$ in $\mathcal{A}$-$\mathbf{Man}_k$ naar de manifold $(M, \mathcal{A}_M)$ in $\mathcal{F}$-$\mathbf{Man}_k$ waarbij $\mathcal{A}_M$ de atlas geïnduceerd door de schoof $\mathcal{F}_M$ is uit Propositie 1.24. En wederom blijven de afbeeldingen topologisch dezelfde afbeeldingen. Dit is welgedefinieerd vanwege Stellingen 1.25 en 1.26 en ook G voldoet aan de functoriële eigenschappen.

Vervolgens kunnen we laten zien dat deze functoren een isomorfisme van categorieën tussen $\mathcal{A}$-$\mathbf{Man}_k$ en $\mathcal{F}$-$\mathbf{Man}_k$ geeft.

Stelling 1.27. *De functor $F\colon \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k \to \mathcal{F}\text{-}\mathbf{Man}_k$ is een isomorfisme van categorieën.*

Bewijs. We laten allereerst zien dat de functor $G \circ F$ gelijk is met de identiteitsfunctor $\mathrm{id}_{\mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k}\colon \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k \to \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k$. We merken daarbij op dat per constructie van de functoren de onderliggende topologische ruimte hetzelfde blijft. Doordat de afbeeldingen topologisch gezien hetzelfde blijven onder de functoren is duidelijk dat voor alle morfismen f geldt dat $G \circ F(f) = f$. En dus volgt hieruit dat het genoeg is om na te gaan dat $\mathcal{A}_M = G \circ F(\mathcal{A}_M)$, waarbij we met $G \circ F(\mathcal{A}_M)$ de atlas bedoelen die geconstrueerd wordt door het toepassen van de functor G na F.

Voor $x \in M$ geldt dat er een kaart $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ is. Per constructie geldt voor de manifold $(M, G \circ F(\mathcal{A}_M))$ dat er een kaart (V, ψ, Y) in de atlas van deze manifold is zodanig dat ψ een C^k-$\mathcal{F}$-diffeomorfisme is. Als gevolg van Stelling 1.26 is deze ψ ook een C^k-$\mathcal{A}$-diffeomorfisme. Zij $W = U \cap V$ en $Z = \varphi(W)$ dan geldt dat $(W, \varphi|_W, Z) \in \mathcal{A}_M$. We merken op dat $\varphi|_W^{-1}$ C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar is omdat $\mathcal{A}_M$ een C^k-differentieerbare atlas is. Hieruit volgt dat de samenstelling $\psi \circ \varphi|_W^{-1}$ ook C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar is. Uit Lemma B.17 volgt dat $\psi \circ \varphi|_W^{-1}$ C^k-differentieerbaar is. Er volgt dat alle kaarten uit beide atlassen C^k-verenigbaar zijn en vanwege de maximaliteit van beide atlassen zijn deze atlassen identiek. Kortom $\mathcal{A}_M = G \circ F(\mathcal{A}_M)$ en we concluderen dat de functor $G \circ F$ gelijk is met de identiteitsfunctor $\mathrm{id}_{\mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k}$.

Voor het bewijs dat de functor $F \circ G$ gelijk is met de identiteitsfunctor $\mathrm{id}_{\mathcal{F}\text{-}\mathbf{Man}_k}$ is het wederom genoeg om te laten zien dat de schoof $\mathcal{F}_M = F \circ G(\mathcal{F}_M)$.

Zij $U \subset M$ en zij $f \in \mathcal{F}_M(U)$. Dan is f een C^k-$\mathcal{F}$-differentieerbare functie van $U \to \mathbb{R}$. Daarmee is f ook een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare functie vanwege stelling 1.26 en per constructie van propositie 1.21 zit f daarmee in $F \circ G(\mathcal{F}_M)(U)$.

Voor de andere kant checken we dat het geldt voor elke 'kleine' omgeving van $x \in M$. Uit de eigenschappen van een schoof volgt dan dat het moet gelden voor elke open verzameling $U \subset M$. Zij $x \in M$ en $\varphi\colon U \to X$ met $x \in U$ een kaart volgens de definitie van een $\mathcal{F}$-manifold. In het bijzonder is φ dan ook een C^k-$\mathcal{A}$-diffeomorfisme. Zij nu $V \subset U$ open en zij $f \in F \circ G(\mathcal{F}_M)(U)$. Dan is f per constructie van propositie 1.21 een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding. Verder is $f \circ \varphi_i^{-1}$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding en daarmee een C^k-$\mathbb{R}$-differentieerbare afbeelding. Hieruit volgt dat $f \circ \varphi_i^{-1} \in \mathcal{C}_X^k(\varphi(V))$ en dus $f \in \mathcal{F}_M(V)$. We concluderen daarom dat $\mathcal{F}_M = F \circ G(\mathcal{F}_M)$.

Hiermee zien we dat $F \circ G$ isomorf is met $\mathrm{id}_{\mathcal{F}\text{-}\mathbf{Man}_k}$ en concluderen we dat de functor $F\colon \mathcal{A}\text{-}\mathbf{Man}_k \to \mathcal{F}\text{-}\mathbf{Man}_k$ isomorfisme van categorieën is. □

2 Twee definities van raakruimten

In dit hoofdstuk geven we twee definities van raakruimten op een manifold. De eerste definitie gaat via krommen en geeft een intuïtieve methode om raakruimten te definiëren. In deze definitie heeft de verzameling die we krijgen geen vectorruimtestructuur en moeten we deze aanbrengen. De tweede definitie gaat via schoven. Deze laatste definitie werkt alleen in het geval dat $k = \infty$. We zullen we laten zien dat beide definities voor $k = \infty$ equivalent zijn.

2.1 Raakruimten via krommen

De onderstaande definities zijn gebaseerd op Jeffrey M. Lee 2009, paragraaf 2.1. Daar wordt echter de definitie via atlassen gebruikt. Waar nodig zijn daarom de definities hier aangepast om aan te sluiten bij de definitie van een manifold via schoven.

We nemen voor deze gehele paragraaf aan dat $(M, \mathcal{F})$ een C^k-manifold van dimensie n is met $k \geq 1$ en dat $p \in M$. We beginnen met het definiëren van de verzameling van differentieerbare krommen op een kaart $\varphi : U \to X$ en definiëren een equivalentierelatie op deze krommen.

Definitie 2.1. *Zij $\varphi\colon U \to X$ een kaart van M met $p \in U$. We definiëren $\mathcal{S}_{U,p}$ als de verzameling van krommen $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$, zodanig dat $\gamma(0) = p$ en $f \circ \gamma$ C^1-differentieerbaar is voor alle $f \in \mathcal{F}(U)$.*

Definitie 2.2. *Zij $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}_{U,p}$ gegeven. We zeggen dat γ_1 **raakt** aan γ_2 als de afgeleiden van de samenstellingen $\varphi \circ \gamma_1(t)$ en $\varphi \circ \gamma_2(t)$ gelijk zijn op $t = 0$, i.e. $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. Dit definieert een equivalentierelatie op de verzameling $\mathcal{S}_{U,p}$.*

Men gaat gemakkelijk na dat de bovenstaande relatie inderdaad een equivalentierelatie definieert op $\mathcal{S}_{U,p}$. Deze relatie geeft aanleiding tot de definitie van een raakvector op p.

Definitie 2.3. *Een equivalentieklasse op $\mathcal{S}_{U,p}$ onder de bovenstaande relatie noemen we een **raakvector op** p. De verzameling van alle raakvectoren op p noemen we de **raakruimte** T_pM_{curv}, i.e. $T_pM_{\text{curv}} := \mathcal{S}_{U,p}/\sim$.*

De bovenstaande definitie is onafhankelijk van de keuze van de kaart $\varphi\colon U \to X$. Om dit te bewijzen zullen we het volgende lemma gebruiken.

Lemma 2.4. *Zij $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}_{U,p}$ willekeurig gegeven en zij $V \subset U \subset M$ een open omgeving van p. Dan geldt dat $\gamma_1 \sim \gamma_2$ dan en slechts dan als $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ voor alle $f \in \mathcal{F}(V)$.*

Bewijs. Stel $\gamma_1 \sim \gamma_2$. We merken op dat er voor iedere $f \in \mathcal{F}(V)$ een unieke $g \in \mathcal{C}^k(\varphi(V))$ zodat $f = g \circ \varphi$. Er geldt nu vanwege de kettingregel dat als $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ dat $(g \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = g'(\varphi(p))(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = g'(\varphi(p))(\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (g \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0)$ voor alle $g \in \mathcal{C}^k(\varphi(V))$. Kortom $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ voor alle $f \in \mathcal{F}(V)$.

Andersom, stel dat $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ voor alle $f \in \mathcal{F}(V)$. We merken op dat de afbeeldingen $\varphi \circ \gamma_i$ afbeeldingen zijn van een deelverzameling van $\mathbb{R}$ naar een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. We kunnen daarom beide $\varphi \circ \gamma_i$ schrijven in componenten, i.e. $\varphi \circ \gamma_i = ((\varphi \circ \gamma_i)_1, (\varphi \circ \gamma_i)_2, \cdots, (\varphi \circ \gamma_i)_n)$. Omdat de projectieafbeeldingen $\pi_j : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}$ C^k-differentieerbaar zijn, geldt $\pi_j \in \mathcal{C}^k(X)$ voor alle j en dus $\pi_j \circ \varphi \in \mathcal{F}(V)$. Er volgt nu dat $(\varphi \circ \gamma_1)_j = \pi_j(\varphi \circ \gamma_1) = \pi_j(\varphi \circ \gamma_2) = (\varphi \circ \gamma_2)_j$ voor alle j en dus $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. □

Lemma 2.5. *De definitie van T_pM_{curv} is onafhankelijk van de keuze van de kaart $\varphi\colon U \to X$.*

Bewijs. Zij $\psi\colon V \to Y$ een ander homeomorfismen dat voldoet aan de eigenschap van een differentieerbare manifold met V een omgeving van p. Dan is $U \cap V$ ook een open omgeving van p. Zij nu $\gamma_1 \sim \gamma_2$ in $S_{U,p}$. Dan geldt vanwege lemma 2.4 dat $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ voor alle

$f \in \mathcal{F}(U \cap V)$. Door nogmaals lemma 2.4 toe te passen zien we dat $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$ en dus $\gamma_1 \sim \gamma_2$ in $S_{V,p}$. Andersom is het argument analoog en dus is de definitie van T_pM_{curv} onafhankelijk van de keuze van het homeomorfisme. $\square$

De bovenstaande definitie geeft een intuïtieve manier om na te denken over de raakruimte. Op deze manier is de raakruimte een verzameling van vectoren die de oplossingsruimte zijn voor hoe 'snel' en in welke richting een kromme $\gamma \in \mathcal{S}_p$ het punt p passeert. Het voordeel van deze definitie is dat deze geometrisch gezien erg inzichtelijk is. Het nadeel is dat niet duidelijk is dat deze raakruimte op een natuurlijke manier voorzien kan worden van een vectorruimtestructuur.

Deze vectorruimtestructuur zullen we aanbrengen via de kaart $\varphi\colon U \to X$. We zullen daarbij laten zien dat deze structuur onafhankelijk is van de gekozen kaart.

Propositie 2.6. *Gegeven de hierboven genoemde voorwaarden:*

a *De afbeelding $\psi_\varphi\colon \mathbb{R}^n \to T_pM_{\text{curv}}$ gegeven door $\psi_\varphi(v) = [\gamma_v]$ met $\gamma_v\colon t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ is een bijectie.*

b *De operaties $[\gamma_1] + [\gamma_2] = \psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2]))$ en $\lambda[\gamma] = \psi_\varphi(\lambda\psi_\varphi^{-1}([\gamma]))$ definiëren een vectorruimtestructuur op T_pM_{curv}.*

c *De bovenstaande vectorruimtestructuur is onafhankelijk van de gekozen open omgeving U en kaart $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^n$.*

Bewijs. Voor het bewijs van (a) laten we allereerst zien dat de afbeelding ψ_φ een injectief is. Stel $v, w \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat $\psi_\varphi(v) = \psi_\varphi(w)$. Dan geldt vanwege de definitie van γ_v dat $(\varphi \circ \gamma_v)'(0) = (\varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv))'(0) = (\varphi(p) + tv)'(0) = v$. Uit lemma 2.4 volgt nu dat $v = (\varphi \circ \gamma_v)'(0) = (\varphi \circ \gamma_w)'(0) = w$. Dus ψ_φ is injectief.

Zij $[\gamma] \in T_pM_{\text{curv}}$ met γ een representant. Definieer $v := (\varphi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt dat $\psi_\varphi(v) = [\gamma_v]$ met $\gamma_v\colon t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p)+tv)$. Ook geldt $(\varphi\circ\gamma_v)'(0) = v$ en dus $(\varphi\circ\gamma)'(0) = (\varphi\circ\gamma_v)'(0)$. Kortom $\gamma \sim \gamma_v$ en we concluderen dat ψ_φ surjectief en dus bijectief is. Dit bewijst (a).

Voor (b) merken we op dat aan de axioma's van de vectorruimtestructuur wordt voldaan omdat hieraan voldaan wordt in $\mathbb{R}^n$. Het bewijs vinden we door heen en weer te gaan langs de bijectieve afbeelding ψ_φ. Ter illustratie bewijzen we één van de distributieve eigenschappen. Zij $\lambda \in \mathbb{R}$ en $[\gamma_v], [\gamma_w] \in T_pM_{\text{curv}}$ willekeurig gegeven. Dan geldt dat:

$$\begin{aligned}
\lambda([\gamma_1] + [\gamma_2]) &= \lambda(\psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2]))) \\
&= \psi_\varphi(\lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}(\psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2])))) \\
&= \psi_\varphi(\lambda \cdot (\psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2]))) \\
&= \psi_\varphi(\lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]) + \lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2])) \\
&= \psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1}(\psi_\varphi(\lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]))) + \psi_\varphi^{-1}(\psi_\varphi(\lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2])))) \\
&= \psi_\varphi(\lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}([\gamma_1])) + \psi_\varphi(\lambda \cdot \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2])) \\
&= \lambda[\gamma_1] + \lambda[\gamma_2]
\end{aligned}$$

We concluderen dat $\lambda([\gamma_1] + [\gamma_2]) = \lambda[\gamma_1] + \lambda[\gamma_2]$ en dus geldt deze distributieve eigenschap. De andere axioma's kunnen op dezelfde manier worden nagegaan.

Voor het bewijs van (c) nemen we een andere open omgeving V van p met een homeomorfisme $\chi\colon V \to Y \subset \mathbb{R}^n$ dat aan de definiërende eigenschap van een differentieerbare manifold voldoet aan. Dan definiëren we de bijectie ψ_χ zoals in (a). Er geldt nu dat

$$(\psi_\chi^{-1} \circ \psi_\varphi)(v) = \psi_\chi^{-1}([\gamma_v]) = (\chi \circ \gamma_v)'(0).$$

Nu merken we op dat $\chi \circ \gamma_v(t) = (\chi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + tv)$. De kettingregel geeft nu

$$(\psi_\chi^{-1} \circ \psi_\varphi)(v) = (\chi \circ \gamma_v)'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\chi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + tv) = D(\chi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\, v$$

Omdat φ en χ C^k-diffeomorfismen zijn, dit volgt uit Lemma 1.18, is ook $\chi \circ \varphi^{-1}$ een C^k-diffeomorfisme. Daarmee is duidelijk dat $D(\chi \circ \varphi^{-1})$ bestaat. Hieruit volgt dat $\psi_\chi^{-1} \circ \psi_\varphi = D(\chi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ een linear isomorfisme is.

We vinden nu het volgende voor de gedefinieerde optelling:

$$\begin{aligned}
[\gamma_1] + [\gamma_2] &= \psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\varphi^{-1}([\gamma_2])) \\
&= \psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1} \circ \psi_\chi \circ \psi_\chi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\varphi^{-1} \circ \psi_\chi \circ \psi_\chi^{-1}([\gamma_2])) \\
&= \psi_\varphi \circ \psi_\varphi^{-1} \circ \psi_\chi(\psi_\chi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\chi^{-1}([\gamma_2])) \\
&= \psi_\chi(\psi_\chi^{-1}([\gamma_1]) + \psi_\chi^{-1}([\gamma_2]))
\end{aligned}$$

Het argument voor de scalaire vermenigvuldiging is analoog. En hieruit concluderen we dat beide homeomorfismen dezelfde vectorruimtestructuur definiëren. □

De bovenstaande constructie geeft voor ieder punt $p \in M$ een raakruimte $T_p M_{\mathrm{curv}}$, welke vanwege propositie 2.6 een vectorruimte is.

2.2 Raakruimten via de staak

Een andere manier om de raakruimte te definiëren is via de staken van een schoof. De raakruimte die we hierdoor krijgen heeft zelf een natuurlijke vectorruimtestructuur. Deze constructie werkt zoals gezegd alleen voor $k = \infty$ en we zullen daarom laten zien wat er mis gaat voor $k \neq \infty$.

We beginnen met het definiëren van staken van een (pre)schoof.

Definitie 2.7. *Zij $\mathcal{F}$ een (pre)schoof op X en $p \in X$ een punt. We definiëren op de verzameling van paren $\{(U, f) \mid U \subset X$ open omgeving van $p, f \in \mathcal{F}(U)\}$ de volgende equivalentierelatie: we zeggen dat $(U, f) \sim (V, g)$ als er een open omgeving $W \subset U \cap V$ van p bestaat zodanig dat $f|_W = g|_W$. De **staak van $\mathcal{F}$ op** p, notatie $\mathcal{F}_p$, is de quotientverzameling onder deze equivalentierelatie.*

Men gaat eenvoudig na dat de bovenstaande relatie inderdaad een equivalentierelatie geeft op de verzameling van paren (U, f).

Opmerking 2.8. Equivalent kan de staak van $\mathcal{F}$ op p gedefinieerd worden via categorietheorie als een directe limiet $\mathcal{F}_p := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$ (mits deze limiet bestaat).

In het geval dat $\mathcal{F}$ een schoof is op een manifold wordt de staak eveneens een $\mathbb{R}$-algebra. We zullen dit hieronder bewijzen vanuit de definitie die we in 2.7 hebben gegeven.

Lemma 2.9. *Zij $(M, \mathcal{F})$ een C^k-manifold en $p \in M$ een punt. Dan is de staak $\mathcal{F}_p$ met de geïnduceerde operaties*

$$\begin{aligned}
[(U, f)] + [(V, g)] &= [(U \cap V, f + g)], \\
\lambda[(U, f)] &= [(U, \lambda f)], \\
[(U, f)] \cdot [(V, g)] &= [(U \cap V, fg)],
\end{aligned}$$

een commutatieve $\mathbb{R}$-algebra.

Bewijs. We laten zien dat de operaties van de verzamelingen $\mathcal{F}(U)$ operaties induceren op $\mathcal{F}_p$ en dat deze representant onafhankelijk zijn. Zij (U, f) en (V, g) twee representanten van equivalentieklassen in $\mathcal{F}_p$. Dan geldt dat $f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V} \in \mathcal{F}(U \cap V)$ en $f|_{U \cap V} g|_{U \cap V} \in \mathcal{F}(U \cap V)$. Dus er zijn equivalentieklassen $[(U \cap V, f + g)]$ en $[(U \cap V, fg)]$.

Stel $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ en $(V_1, g_1) \sim (V_2, g_2)$. Dan zijn er $h_i \in \mathcal{F}(U_i \cap V_i)$ zodat $h_i = f_i|_{U_i \cap V_i} + g_i|_{U_i \cap V_i}$. Nu willen we laten zien dat $(U_1 \cap V_1, h_1) \sim (U_2 \cap V_2, h_2)$. We merken daarvoor op dat

$(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ en dus is er een $W_U \subset U_1 \cap U_2$ zodanig dat $f = f_1|_{W_U} = f_2|_{W_U}$. Zo ook is er een $W_V \subset V_1 \cap V_2$ zodat $g = g_1|_{W_V} = g_2|_{W_V}$. Nu krijgen we $h = f|_{W_U \cap W_V} + g|_{W_U \cap W_V} \in \mathcal{F}(W_U \cap W_V)$. Verder geldt dat $W_U \cap W_V = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \subset U_i \cap V_i$ en dus

$$h_i|_{W_U \cap W_V} = (f_i|_{U_i \cap V_i} + g_i|_{U_i \cap V_i})|_{W_U \cap W_V} = f_i|_{W_U \cap W_V} + g_i|_{W_U \cap W_V} = f|_{W_U \cap W_V} + g|_{W_U \cap W_V} = h.$$

Kortom $h_i \sim h$ en dus concluderen we dat de optelling representant onafhankelijk is.

Het bewijs voor de andere operaties gaat analoog. Eigenschappen zoals de associativiteit, commutativiteit en distributiviteit volgen uit de geïnduceerde operaties. Hieruit volgt dat $\mathcal{F}_p$ een commutatieve $\mathbb{R}$-algebra is. $\square$

In het geval dat $\mathcal{F}$ een schoof is van een manifold is de staak ook een lokale ring.

Lemma 2.10. *Zij $(M, \mathcal{F})$ een C^k-manifold en zij $\mathcal{F}_p$ de staak op $p \in X$. Dan is de verzameling*

$$\mathfrak{M}_p = \{[(U, f)] \in \mathcal{F}_p \mid f(p) = 0\}$$

het unieke maximale ideaal van $\mathcal{F}_p$, i.e. $\mathcal{F}_p$ is een ***lokale ring****.*

Bewijs. We merken allereerst op dat de verzameling representant onafhankelijk is en daarmee goed gedefinieerd is. Het is tevens de kern van het ringhomomorfisme $\mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$, gegeven door $[(U, f)] \mapsto f(p)$. Dit ringhomomorfisme is surjectief en vanwege de isomorfiestelling vinden we dat $\mathcal{F}_p/\mathfrak{M}_p \cong \mathbb{R}$. Omdat $\mathbb{R}$ een lichaam is, volgt hieruit dat $\mathfrak{M}_p$ een maximaal ideaal is.

Stel dat I een ideaal is met een element $[(U, f)] \notin \mathfrak{M}_p$. Dan geldt dat $f(p) \neq 0$. Vanwege de continuïteit van f is er nu een omgeving $V \subset U$ rond p zodanig dat $1/f$ gedefinieerd is rond deze omgeving. Kortom $[(V, 1/f)] \in \mathcal{F}_p$. Dus er geldt dat $[(U, f)][(V, 1/f)] = [(V, \mathrm{id})] \in I$. Kortom $[(V, \mathrm{id})] = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_p} \in I$ en dus geldt $I = \mathcal{F}_p$. Dus voor ieder ideaal $I \not\subset \mathfrak{M}_p$ geldt dat $I = \mathcal{F}_p$. Hieruit volgt dat $\mathfrak{M}_p$ het unieke maximale ideaal is. $\square$

Het unieke maximale ideaal dat we hierboven hebben gevonden, geeft ons voor C^∞-manifolds een alternatieve manier om de raakruimte te definiëren. Het quotiënt $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ is in dit geval namelijk een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte en de duale van deze ruimte is op een natuurlijke manier isomorf met T_pM_{curv}. Om te bewijzen dat $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ een $\mathbb{R}$-vectorruimte is, hebben we het onderstaande lemma nodig.

Lemma 2.11. *Zij $F\colon (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{G})$ een C^k-differentieerbare afbeelding tussen manifolds. Dan induceert F $\mathbb{R}$-algebra morfismen $F_p^*\colon \mathcal{G}_{F(p)} \to \mathcal{F}_p$ voor alle $p \in M$. In het bijzonder geldt dat als F een diffeomorfisme is dat dan elke F_p^* een isomorfisme is.*

Bewijs. We merken allereerst op dat vanwege de eigenschap van een C^k-differentieerbare afbeelding geldt dat voor $p \in M$ geldt dat voor elke differentieerbare functie f in een omgeving van V van $F(x)$ geldt dat $f \circ F$ een C^k-differentieerbare functie is op $F^{-1}(V)$. Op de volgende manier krijgen we nu een geïnduceerde afbeelding $F_p^*\colon \mathcal{G}_{F(p)} \to \mathcal{F}_p$:

Zij $[(U, f)] \in \mathcal{G}_{f(p)}$, dan geldt dat f een differentieerbare functie f in een omgeving van V van $F(x)$ en dus dat $f \circ F$ een C^k-differentieerbare functie is op $F^{-1}(V)$. Hiermee vinden we dat $[(F^{-1}(V), f \circ F)] \in \mathcal{F}_p$. Het is duidelijk dat als we de afbeelding F_p^* op deze manier definiëren dat deze representant onafhankelijk is. Ook kan worden nagegaan dat deze afbeelding een $\mathbb{R}$-algebra morfisme is. Deze bewijzen gaan analoog aan de twee vorige bewijzen.

Om in te zien dat de afbeelding een isomorfisme wordt in het geval dat F een diffeomorfisme is, merken we op dat uit de bovenstaande constructie volgt dat $(F^{-1})_p^* = (F_p^*)^{-1}$. $\square$

Propositie 2.12. *Zij $(M, \mathcal{F})$ een C^∞-manifold van dimensie n en zij $\mathcal{F}_p$ de staak op $p \in X$. Dan is het quotiënt $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte.*

Bewijs. We definiëren de afbeelding $\Delta\colon \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}^{n*}$ door $\Delta([(V,f)]) = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ (de lineaire benadering, c.q. totale afgeleide van $f \circ \varphi^{-1}$ in het punt $\varphi(p)$) met $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^n$ een kaart en $\mathcal{C}^\infty_X$ de schoof van C^∞-differentieerbare functies. Dan geldt $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty_X(\varphi(V))$ en omdat differentieerbaarheid een lokale eigenschap is, is deze definitie representant onafhankelijk en dus is de afbeelding goed gedefinieerd.

Er geldt

$$\begin{aligned}
\Delta([(V,f)] + [(W,g)]) &= D((f+g) \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= D(f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + D(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= \Delta([(V,f)]) + \Delta([(W,g)]) \\
\Delta([(\lambda f, V)]) &= D((\lambda f) \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= D(\lambda(f \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)) \\
&= \lambda D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= \lambda \Delta([(V,f)])
\end{aligned}$$

De afbeelding is daarmee linear. Ook is de afbeelding surjectief omdat geldt dat de afbeelding $g_i\colon X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto p_i(x) - p_i(\varphi(p))$ met p_i de projectieafbeelding op de i-de coördinaat een C^∞-differentieerbare afbeelding is en dus geldt dat $g_i \in \mathcal{C}^\infty_X(X)$. Vanwege φ is er nu een $f_i \in \mathcal{F}(U)$ zodat $g_i = f_i \circ \varphi^{-1}$. Tevens geldt dat $f_i(p) = g_i(\varphi(p)) = 0$ en dus $f_i \in \mathfrak{M}_p$. Ook geldt dat $D(g_i)(\varphi(p)) = (0\ \dots\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0)$ met 1 op de i-de plaats. Omdat deze afbeelding bestaat voor elke i volgt hieruit de surjectiviteit van Δ.

We willen nu bewijzen dat $\ker(\Delta) = \mathfrak{M}_p^2$. Allereerst geldt voor $[(V,f)] \in \mathfrak{M}_p^2$ dat $[(V,f)]$ te schijven is als $[(V,f)] = \sum_{i=1}^n [(V_{i1}, f_{i1})][(V_{i2}, f_{i2})]$ met $[(V_{ij}, f_{ij})] \in \mathfrak{M}_p$ voor alle $1 \leq i \leq n$ en $j = 1,2$. Vanwege de productregel volgt nu

$$\begin{aligned}
\Delta([(V,f)]) &= D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= D\left(\sum_{i=1}^n (f_1 \circ \varphi^{-1}) \cdot (f_2 \circ \varphi^{-1})\right)(\varphi(p)) \\
&= \sum_{i=1}^n D(f_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot (f_2 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + (f_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot D(f_2 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= \sum_{i=1}^n D(f_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot f_2(p) + f_1(p) \cdot (D(f_2 \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))) = 0.
\end{aligned}$$

Dus $\mathfrak{M}_p^2 \subset \ker(\Delta)$. Zij nu $[(V,f)] \in \ker(\Delta)$. Dan geldt zowel $f(p) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = 0$ als $D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = 0$. Vanwege de stelling van Taylor (c.q. Folland g.d., p66) geldt dat $f \circ \varphi^{-1}\colon X \to \mathbb{R}$ te schrijven is als

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(x_i - \varphi(p)_i) + R_2(x) = R_2(x)$$

met $R_2(x)$ de restterm. Deze restterm kunnen we schrijven als

$$R_2(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_i - \varphi(p)_i)(x_j - \varphi(p)_j) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial_i \partial_j}(\varphi(p) + t(x - \varphi(p)))dt$$

met n de dimensie van de manifold. (N.B. we gaan er hier vanuit dat de omgeving waarvoor dit geldt klein genoeg is zodat het Taylorpolynoom overal gedefinieerd is. Mocht dit niet het geval zijn, dan kunnen we zonder verlies van algemeenheid het gebied V klein genoeg kiezen.) Hieraan zien we dat alle termen uit deze som te schrijven zijn als drie elementen, namelijk een integraal en de termen $g_{ij}(x) = x_i - \varphi(p)_i$ en $h_{ij}(x) = x_j - \varphi(p)_j$. Beiden termen zijn gedefinieerd op heel $\mathbb{R}^n$ en dus in het bijzonder in de omgeving $\varphi(V)$ van $\varphi(p)$ en men kan inzien dat $[(\varphi(V), g_i)], [(\varphi(V), h_i)] \in \mathfrak{M}_{\varphi(p)}$ voor alle i. Verder geldt dat de integraal oneindig differentieerbaar moet zijn. Hieruit volgt dat $[\varphi(V), (f \circ \varphi)] \in \mathfrak{M}^2_{\varphi(p)}$.

Omdat φ een diffeomorfisme is, volgt nu uit lemma 2.11 dat $[(V, f)] \in \mathfrak{M}^2_p$. We concluderen dat $\ker(\Delta) = \mathfrak{M}^2_p$ en uit de isomorfiestelling volgt nu dat ${}^{\mathfrak{M}_p}\!/\!_{\mathfrak{M}^2_p} \cong \mathbb{R}^{n*}$. □

Voor het geval $k \neq \infty$ gaat het bewijs niet op omdat de kern van de afbeelding Δ dan groter is. Men kan een 'makkelijk' tegenvoorbeeld construeren op de C^k-manifold $(\mathbb{R}, \mathcal{C}^k)$ en het punt 0. Beijk de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{k!} x^k$. Dan is f een C^k-differentieerbare functie met $f^{(k)}(x) = |x|$. Dit geeft dat $f \in \mathcal{C}^k(U)$ voor alle $U \subset \mathbb{R}$ open. Verder geldt $f(0) = 0$ en dus $[(U, f)] \in \mathfrak{M}_0$. Ook geldt dat $[(U, f)] \in \ker(\Delta)$, want $\Delta([(U, f)]) = f'(0) = 0$. Om te laten zien dat $[(U, f)] \notin \mathfrak{M}^2_0$ merkt men op dat als dit wel het geval zou zijn dat $f = \sum_{i=1}^n g_i h_i$ moet gelden met $[(V_i, g_i)], [(W_i, h_i)] \in \mathfrak{M}_0$. Nu volgt dat

$$|x| = f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g_i^{(j)}(x) h_i^{(k-j)}(x).$$

We merken op dat $g_i(0) h_i^{(k)}(0) = 0$ en $g_i^{(k)}(0) h_i(0) = 0$ vanwege onze aanname. Maar omdat alle g_i en h_i C^k-differentieerbaar zijn volgt hieruit dat $f^{(k)} = |x|$ differentieerbaar is. Dit geeft een tegenspraak en dus geldt $f \notin \mathfrak{M}^2_0$.

Propositie 2.12 geeft aanleiding tot de volgende definitie:

Definitie 2.13. *Zij $(M, \mathcal{F})$ een C^∞-manifold en $p \in M$ een punt. De* ***co-raakruimte van*** *p is de vectorruimte ${}^{\mathfrak{M}_p}\!/\!_{\mathfrak{M}^2_p}$. De duale van deze ruimte*

$$T_p M_{\text{cot}} := \left({}^{\mathfrak{M}_p}\!/\!_{\mathfrak{M}^2_p}\right)^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left({}^{\mathfrak{M}_p}\!/\!_{\mathfrak{M}^2_p}, \mathbb{R}\right)$$

noemen we de ***raakruimte van*** *p.*

We zullen laten zien dat deze definitie in het geval dat C^∞-manifolds equivalent is met de eerder gegeven definitie.

2.3 Equivalentie tussen definities

Stelling 2.14. *Zij $(M, \mathcal{F})$ een C^∞-manifold van dimensie n. Dan is er een natuurlijk isomorfisme tussen $T_p M_{\text{curv}}$ en $T_p M_{\text{cot}}$.*

Bewijs. We definiëren de afbeelding $\Phi\colon T_p M_{\text{curv}} \to T_p M_{\text{cot}}$ door $\Phi([\gamma]) \mapsto \left(\overline{[(U, f)]} \mapsto (f \circ \gamma)'(0)\right)$. We checken allereerst of de afbeelding goed gedefinieerd is. Hiervoor laten we zien dat $\left(\overline{[(U, f)]} \mapsto (f \circ \gamma)'(0)\right) \in T_p M_{\text{cot}}$. De onafhankelijkheid van de keuze van γ volgt in dit geval uit het bewijs van lemma 2.4.

We merken op dat $[(U, f)] \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ een functie definieert van $\mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}$. Tevens geldt dat de afgeleide $(f \circ \gamma)'(0)$ representant onafhankelijk is voor $[(U, f)] \in \mathfrak{M}_p$ omdat rond p elke representant dezelfde functie definieert. Ook geldt voor $[(U, f)] \in \mathfrak{M}^2_p$ dat $[(U, f)] = \sum_{i=1}^n [(U, g_i)] \cdot [(U, h_i)]$ voor $[(U, g_i)], [(U, h_i)] \in \mathfrak{M}_p$. Vanwege de productregel volgt nu:

$$
\begin{aligned}
(f\circ\gamma)'(0) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(g_i\cdot h_i)\circ\gamma\right)'(0)\\
&= \sum_{i=1}^{n}((g_i\circ\gamma)\cdot(h_i\circ\gamma))'(0)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(g_i\circ\gamma)'(0)\cdot(h_i\circ\gamma)(0)+(g_i\circ\gamma)(0)\cdot(h_i\circ\gamma)'(0)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(g_i\circ\gamma)'(0)\cdot h_i(p)+g_i(p)\cdot(h_i\circ\gamma)'(0)=0
\end{aligned}
$$

Daarmee is dit een goed gedefinieerde functie van ${}^{\mathfrak{M}_p}\!/\!_{\mathfrak{M}_p^2} \to \mathbb{R}$. Het is daarbij duidelijk dat de functie lineair is en daarmee vinden we dat $\left(\overline{[(U,f)]} \mapsto (f\circ\gamma)'(0)\right) \in T_pM_{\mathrm{cot}}$.

Het volgende wat we willen laten zien is dat de afbeelding Φ een lineair isomorfisme is. Allereerst is Φ linear. Vanwege lemma 2.6 kunnen we elke equivalentieklasse $[\gamma]$ representeren met γ_v gedefinieerd door $\gamma_v(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+tv)$ met $v\in\mathbb{R}^n$ en $\varphi\colon U\to X\subset\mathbb{R}^n$ een kaart. Er geldt:

$$
\begin{aligned}
\Phi([\gamma_v]+[\gamma_w])(\overline{[(U,f)]}) &= \Phi\left(\psi_\varphi(\psi_\varphi^{-1}([\gamma_v])+\psi_\varphi^{-1}([\gamma_w]))\right)([f,U])\\
&= \left(f\circ\varphi^{-1}(\varphi(p)+t(v+w))\right)'(0)\\
&= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))\cdot(v+w)(0)\\
&= D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))\cdot v(0)+(f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))\cdot w(0)\\
&= (f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)+tv)'(0)+(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)+tw)'(0)\\
&= (f\circ\gamma_v)'(0)+(f\circ\gamma_w)'(0)\\
&= \Phi([\gamma_1])(\overline{[(U,f)]})+\Phi([\gamma_2])(\overline{[(U,f)]})
\end{aligned}
$$

Hieraan zien we dat $\Phi([\gamma_1]+[\gamma_2])=\Phi([\gamma_1])+\Phi([\gamma_2])$. Op een zelfde manier kan worden nagegaan dat $\Phi(\lambda[\gamma])=\lambda\Phi([\gamma])$ en dus is Φ lineair.

Als laatste checken we de bijectiviteit van de afbeelding. Omdat T_pM_{curv} en T_pM_{cot} beiden eindig dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimten zijn van dimensie n, hoeven we vanwege de dimensiestelling voor vectorruimten alleen te checken dat $\ker(\Phi)=0$. Zij $[\gamma_v]\in T_pM_{\mathrm{curv}}$ met $\gamma_v(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+tv)$. Dan geldt:

$$
\Phi([\gamma_v])(\overline{[(U,f)]}) = \left(f\circ\varphi^{-1}(\varphi(p)+tv)\right)'(0) = D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))v
$$

We merken op dat geldt dat $\Phi([\gamma_v])=0$ dan en slechts dan als $D(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))\cdot v(0)=0$ voor alle $\overline{[(U,f)]}\in {}^{\mathfrak{M}_p}\!/\!_{\mathfrak{M}_p^2}$. Aangezien φ^{-1} een diffeomorfisme is, volgt hieruit dat dit het geval is dan en slechts dan als $v=0$ en dus als $[\gamma_v]=0$. Kortom $\ker(\Phi)=\{0\}$ en dus is de afbeelding bijectief.

We merken op dat deze afbeelding zonder keuze van een basis gedefinieerd is en dus concluderen we dat de vectorruimten T_pM_{curv} en T_pM_{cot} natuurlijk isomorf zijn. $\square$

3 Vezelproducten en deformaties van manifolds

In dit laatste hoofdstuk zullen we vezelproducten en deformaties van manifolds bekijken. In de categorie $\mathbf{Man}_k$ blijkt een vezelproduct niet altijd te bestaan. We zullen hiervan een voorbeeld geven. Verder zullen we resultaten geven wanneer een vezelproduct wel bestaat. Verder zullen we een definitie geven van deformaties van C^k-manifolds en laten zien dat deze onder bepaalde voorwaarden 'triviaal' zijn. Maar allereerst geven we een definitie van een deelmanifold van een C^k-manifold.

(N.B. In dit hoofdstuk zullen we manifolds aanduiden met M in plaats van expliciet het paar $(M, \mathcal{F})$ te noteren. Ook zullen we in tegenstelling tot het vorige hoofdstuk kleine letters gebruiken voor afbeeldingen tussen manifolds.)

3.1 Deelmanifolds

Definitie 3.1. *Zij $f\colon M \to N$ een C^k-differentieerbare afbeelding. De **raakruimteafbeelding** van f op p is de afbeelding $Df(p)\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ gedefinieerd door $Df(p)([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. De **rang** van f op p is de rang van $Df(p)$.*

Merk op dat we in deze definitie met de raakruimte T_pM de raakruimte volgens de definitie via krommen bedoelen. Men kan nagaan dat deze definitie onafhankelijk is van de gekozen representant. We gebruiken deze definitie, omdat deze ook gedefinieerd is voor $k < \infty$.

Definitie 3.2. *Zij $f\colon M \to N$ een C^k-differentieerbare afbeelding. We noemen f een **immersie** als $Df(p)$ injectief is voor alle $p \in M$. We noemen f een **submersie** als $Df(p)$ surjectief is voor alle $p \in M$.*

Definitie 3.3. *Zij L een C^k-manifold van dimensie l en M een C^k-manifold van dimensie n. We noemen een C^k-afbeelding $f\colon X \to Y$ een **inbedding** indien f een immersie is en $f\colon X \to f(X)$ een homeomorfisme is, als we $f(X)$ beschouwen onder de deelruimtetopologie. Indien dit het geval is, noemen we L een C^k-**deelmanifold** van M. De **co-dimensie** van L is het verschil tussen de dimensie van L en de dimensie van M.*

De volgende stelling zullen we nodig hebben in het bewijs van propositie 3.6.

Stelling 3.4 (Invariantie van domein stelling, Brouwer 1912)**.** *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ een injectieve continue afbeelding. Dan geldt dat $f(U)$ open is in $\mathbb{R}^n$ en $f\colon U \to f(U)$ een homeomorfisme is, waarbij we $f(U)$ beschouwen onder de deelruimtetopologie.*

Het bewijs van deze stelling maakt gebruik van technieken uit de algebraïsche topologie en valt daarmee buiten het bereik van deze scriptie. Ook de volgende standaard stelling uit de differentiaalmeetkunde, de rangstelling, zullen we ook zonder bewijs gebruiken:

Stelling 3.5 (Rangstelling, John M. Lee 2013, Thm 4.12)**.** *Zij $f\colon M \to N$ een C^k-differentieerbare afbeelding en zij $p \in M$. Als er een open omgeving $U \subset M$ van p bestaat waarvoor geldt dat de raakruimteafbeelding $Df(q)\colon T_qM \to T_{f(q)}N$ constante rang $\operatorname{rk} Df(q) = r$ heeft voor alle $q \in U$, dan bestaan er kaarten $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^m$ en $\psi\colon V \to Y \subset \mathbb{R}^n$ met $f(U) \subset V \subset N$ zodanig dat*

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \text{ voor alle } (x_1, \ldots, x_m) \in X.$$

Het bewijs van de bovenstaande stelling komt in bijna ieder boek over manifolds terug. (N.b. ter vergelijking met het bewijs van John M. Lee 2013 dienen we ook op te merken dat daar aangenomen wordt dat alles C^∞-differentieerbaar is. Het bewijs laat zich vertalen naar C^k-differentieerbaarheid en is geheel analoog.) Het resultaat laat zich vertalen naar de definitie van een manifold via schoven door in te zien dat elke kaart (U, φ, X) in een atlas een kaart $\varphi : U \to X$ volgens de definitie via schoven geeft. De afbeelding φ is een diffeomorfisme volgens de definitie via atlassen en als gevolg van stelling 1.23 ook een diffeomorfisme via schoven. Hiermee voldoet φ aan de definitie van een kaart via schoven.

Propositie 3.6 (John M. Lee 2013, Thm 5.8)**.** *Zij L een deelverzameling van een C^k-manifold M van dimensie n. Als L een C^k-deelmanifold van co-dimensie r is, is er voor elke $p \in L$ een kaart $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^n$ van M zodanig dat $p \in U$ en*

$$L \cap U = \{x \in U \mid \varphi_{n-r+1}(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}.$$

Andersom geldt als er voor elke $p \in L$ een kaart $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^n$ van M is met de bovenstaande eigenschap dat L een topologische deelmanifold is van co-dimensie r en dat er een C^k-differentieerbare structuur bestaat, zodat L een C^k-deelmanifold van M is.

Bewijs. Stel L is een C^k-deelmanifold en $p \in L \subset M$. Dan is de inclusieafbeelding een afbeelding van constante rang. Vanwege de rangstelling zijn er nu voor $p \in L \subset M$ kaarten $\psi\colon V \to Y \subset \mathbb{R}^{n-r}$ met $p \in V \subset L$ en $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^n$ voor $p \in W \subset M$ zodanig dat $(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})(x_1, \ldots, x_{n-r}) = (x_1, \ldots, x_{n-r}, 0, \ldots, 0)$. Kortom we vinden nu dat $L \cap U \subset \{x \in U \mid \varphi_{n-r+1}(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}$.

De inclusie anderzijds hoeft niet a priori te gelden. Daarvoor moeten we mogelijk onze U verkleinen. Stel dat het namelijk niet geldt. Dan merken we op dat dat $Z := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X : x_{n-r+1} = \cdots = x_n = 0\} \subset X$ een gesloten verzameling is. Ook geldt dat $L \cap U$ open is onder de deelruimtetopologie. Uit stelling 3.4 volgt dan dat $\varphi(L \cap U) \subset Z$ open is in Z onder de deelruimtetopologie. Daarmee is $Z \setminus \varphi(L \cap U)$ gesloten in Z en dus ook gesloten in X. En dus is $U' := X \setminus (Z \setminus \varphi(L \cap U))$ open is in M. Kortom we vinden dat $\varphi|_{U'}\colon U' \to \varphi(U')$ nog steeds een kaart is en per constructie voldoet deze nu aan de bovenstaande eigenschap.

Voor de andere implicatie, neem aan dat er voor elke $p \in L \subset M$ een kaart $\varphi\colon U \to X$ van M is zodanig dat $L \cap U = \{x \in U \mid \varphi_{n-r+1}(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0\}$. We laten eerst zien dat L een topologisch manifold van dimensie $k := n - r$ is en definiëren hierop een C^k-differentieerbare structuur.

Zij $\pi_{n-r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$ de projectieafbeelding op de eerste $n - r$-coördinaten. Dan is duidelijk dat voor $p \in L$ met bijbehorende kaart $\varphi\colon U \to X$ de afbeelding $\pi_{n-r} \circ \varphi|_{L \cap U}\colon L \cap U \to \pi_{n-r} \circ \varphi(L \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ continu en bijectief is. Omdat φ een homeomorfisme is, geeft dit ook een homeomorfisme tussen $\varphi|_{L \cap U}\colon L \cap U \to \varphi(L \cap U)$ onder de deelruimtetoplogie. In het bijzonder is $\varphi(L \cap U)$ open onder deze deelruimtetopologie en vanwege stelling 3.4 volgt nu dat π_{n-r} een homeomorfisme is. Daarmee vinden we dat de afbeelding $\pi_{n-r} \circ \varphi$ een homeomorfisme is als samenstelling van twee homeomorfismen. Hiermee voldoet L aan de eigenschap van een topologische k-manifold.

We kunnen nu een schoof op L definiëren via deze kaarten. Voor iedere $x \in L$ is er een kaart $\varphi : U \to X$ voor M die voldoet aan de bovenstaande eigenschap. Hiermee krijgen we een kaart $\pi_{n-r} \circ \varphi|_{U \cap L} \to Y$ voor L met $Y \subset X$ het beeld van de afbeelding onder de deelruimtetopologie. Door nu voor elke open $V \subset U \cap L$ de verzameling $\{f \circ \varphi|_V : f \in \mathcal{C}^k_X(\varphi(V))\}$ toe te wijzen, krijgen we voor elke $x \in L$ een kaart die aan de definitie van de eigenschap van een manifold voldoet. Hiermee wordt elk zo'n $U \cap L \subset L$ een manifold. We zullen nagaan dat de schoof die nu op elke $U \subset L$ hebben gedefinieerd aanleiding geeft tot een schoof geeft op L. Hiervoor is het genoeg om te checken dat deze definitie voor open verzamelingen $V \subset L$ onafhankelijk is van de gekozen kaart.

Zij $V \subset L$ zodanig dat er homeomorfismen $\varphi : U \to X$ en $\psi : U' \to Y$ zijn met $V \subset U$ en $V \subset U'$ zoals hierboven. Dan geldt voor de samenstelling $\varphi \circ \psi^{-1}|_{\varphi(V)}$ dat deze een C^k-diffeomorfisme is. Immers komen deze kaarten af van grotere kaarten van φ' en ψ' op M welke C^k-diffeomorfismen zijn en dus is de samenstelling $\varphi \circ \psi^{-1}$ een C^k-diffeomorfisme. Hieruit is direct duidelijk dat voor elke $f \in \mathcal{C}^k_Y(\psi(V))$ geldt dat $f \circ \varphi \circ \psi^{-1}|_{\varphi(V)} \in \mathcal{C}^k_X(\varphi(V))$ en visa versa. We concluderen dat de definitie van de schoof daarmee onafhankelijk is van de keuze van de kaart.

Doordat we nu voor de gehele verzameling L lokaal een schoof hebben gedefinieerd die overeenstemmen op de doorsneden, kunnen we een schoof op heel L construeren: voor iedere $U \subset L$ open wijst men de continue functies f toe waarvoor voor elke $x \in U$ een open omgeving V van x is zodanig dat $f|_V$ in een lokale schoof bevindt. Deze schoof voldoet per constructie aan definitie 1.16 en hiermee wordt L een manifold. Men kan inzien dat via deze constructie de inclusieafbeelding een C^k-differentieerbare afbeelding wordt. Daarmee voldoet L ook aan de definitie van een C^k-deelmanifold van M. □

Propositie 3.6 geeft nu samen met de rangstelling het volgende resultaat:

Gevolg 3.7. *Zij $f\colon M \to N$ een C^k-differentieerbare afbeelding van constante rang r en zij $p \in f(M) \subset N$. Dan is $f^{-1}(p)$ met de geïnduceerde schoof een C^k-deelmanifold van co-dimensie r van M.*

Bewijs. Stel $p \in f(M)$. Dan geldt omdat de afbeelding f van constante rang r is dat er voor ieder punt $q \in f^{-1}(p)$ kaarten bestaan als in stelling 3.5. Zij $\varphi\colon U \to X \subset \mathbb{R}^m$ een kaart voor een omgeving U van $q \in f^{-1}(p)$ en $\psi\colon V \to Y$ een kaart voor een omgeving V van p die voldoen aan deze stelling, i.e. $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$. We kunnen tevens de kaarten zo kiezen dat $\varphi(q) = 0 \in X$ en $\psi(p) = 0 \in Y$. Merk op dat translaties diffeomorfismen zijn en dus zijn deze kaarten goed gedefinieerd. Kortom we krijgen dat $\varphi(f^{-1}(p) \cap U) = \{x \in X \mid x = (0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_m)\}$ en dus $f^{-1}(p) \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = (0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_m)\}$. Uit propositie 3.6 volgt nu dat $f^{-1}(p)$ een C^k-deelmanifold is van co-dimensie r van M. □

3.2 Het vezelproduct in de categorie Man

Hieronder zullen we een definitie geven van een vezelproduct. In de bijlage staat een formelere definitie via limieten (definitie A.15), die equivalent is.

Definitie 3.8. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie en X, Y, Z objecten in $\mathcal{C}$ en $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ en $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ twee morfismen. Een **vezelproduct** (of **pullback**) van f en g is een tripel (P, p, q) met P een object in $\mathcal{C}$ en p in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X)$ en q in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y)$ morfismen zodanig dat het diagram*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

commuteert en dat voor elk tripel (R, r, s) met R een object in $\mathcal{C}$, $r \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, X)$ en $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, Y)$ waarvoor geldt $f \circ r = g \circ s$ er een uniek morfisme u in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, P)$ bestaat zodanig dat het diagram

$$\begin{tikzcd} R \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "r"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\ & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

commuteert.

In de categorie **Set** van verzamelingen bestaat een vezelproduct altijd (zie bijlage: lemma A.16). Er zijn meer categorieën waarin deze altijd bestaat. In de categorie van manifolds is dit echter niet het geval. De volgende situatie is hier een voorbeeld van.

Voorbeeld 3.9. Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = xy$ en $g : \{p\} \to \mathbb{R}$ die $p \mapsto 0$ stuurt. Dan bestaat er geen vezelproduct van het volgende diagram.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "f"] \\ \{p\} \arrow[r, hook, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

We zullen geen bewijs geven dat deze niet bestaat, maar men kan dit inzien doordat een vezelproduct in de categorie van verzamelingen gegeven wordt door de verzameling $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ (met de bijbehorende afbeeldingen). Deze deelverzameling is overduidelijk geen manifold doordat de oorsprong onder de deelruimtetopologie in $\mathbb{R}^2$ niet lokaal homeomorf met $\mathbb{R}$ is. Stel dat een vezelproduct in de categorie van manifolds wel zou bestaan dan zou deze vanwege het volgende lemma wat we zullen behandelen, lemma 3.10, natuurlijk bijectief moeten zijn met het vezelproduct dat we hier hebben gevonden. Vanwege de bovenstaande constatering zal dit echter mis gaan en zullen we in deze constructie op een tegenspraak stuiten. Om hiervan een formeel bewijs te maken, is wat meer werk vereist.

Vanwege dit voorbeeld is het daarom een interessante vraag wanneer een vezelproduct in $\mathbf{Man}_k$ wel bestaat. Een behulpzaam lemma hierbij is het volgende. Het bewijs daarvan maakt gebruik van functoren en een resultaat uit de categorietheorie.

Lemma 3.10. *Als een vezelproduct in de categorie van manifolds,* $\mathbf{Man}_k$*, bestaat dan is de onderliggende verzameling een vezelproduct in de categorie van verzamelingen,* $\mathbf{Set}$*.*

Bewijs. Zij $F\colon \mathbf{Man}_k \to \mathbf{Set}$ de vergeetfunctor, i.e. de functor die elke manifold in de categorie van manifolds stuurt naar de onderliggende verzameling. Zij $D\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Man}_k$ de discrete functor, i.e. die elke verzameling X stuurt naar de vereniging van 0-dimensionale manifolds. (Merk op dat we hier nodig hebben dat onze een manifold niet per definitie second-countable is!) De schoof op deze manifold wordt gedefinieerd door voor elke deelverzameling $U \subset X$ de verzameling $\mathcal{F}(U) := \{f : U \to \mathbb{R}\}$ van alle functies van U naar $\mathbb{R}$ toe te wijzen. Het is duidelijk dat dit een schoof geeft op X. Omdat voor ieder punt $p \in X$ nu geldt dat p open is en de schoof gelijk is aan $\mathbb{R}$ voldoet deze inderdaad aan de eigenschap van een manifold. De kaart is de triviale kaart van $\{p\} \to \mathbb{R}^0$. Ook is duidelijk dat alle afbeeldingen via deze constructie per definitie differentieerbare afbeeldingen worden en daarmee is deze functor wel-gedefinieerd.

Om nu te laten zien dat de vergeetfuntor F limieten behoudt is het vanwege lemma A.22 afdoende om te bewijzen dat er een natuurlijke bijectie $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, F(M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Man}_k}(D(S), M)$ bestaat voor alle verzamelingen S in $\mathbf{Set}$ en alle manifolds M in $\mathbf{Man}_k$. Zij M een manifold en S een verzameling. Dan geldt dat elke afbeelding in $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Man}_k}(D(S), M)$ per definitie correspondeert met een unieke afbeelding $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, F(M))$. We willen dus dat er voor elke $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, F(M))$ ook zo'n $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Man}_k}(D(S), M)$ te vinden is zodat $g = F(f)$.

Zij $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Man}_k}(S, F(M))$ willekeurig gegeven. Dan willen we weten of deze g aanleiding geeft tot een differentieerbare afbeelding tussen $D(S)$ en M. Zij $U \subset M$ open en $\varphi \in \mathcal{F}_M(U)$ een differentieerbare functie op U. Dan geldt dat $g^{-1}(U) \subset D(S)$ per definitie open is, omdat D de verzameling S voorziet van de discrete topologie. Dus g is een continue afbeelding. Verder geldt dat $\varphi \circ g|_{\{p\}} \in \mathcal{F}_{D(S)}(\{p\})$ voor alle $p \in D(S)$. Uit de plakeigenschap van de schoof volgt dat $\varphi \circ g \in \mathcal{F}_{D(S)}(g^{-1}(U))$ en dus dat g een differentieerbare functie induceert tussen $D(S)$ en M.

Hieruit mogen we concluderen dat de vergeetfunctor F limieten behoudt en daarmee is het lemma bewezen. □

De volgende propositie geeft ons een situatie waarin een vezelproduct van manifolds altijd bestaat.

Propositie 3.11. *Zij $f\colon M \to N$ een C^k-differentieerbare afbeelding van constante rang en zij $p \in N$ een punt. Dan bestaat een vezelproduct van*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \\ \{p\} \arrow[r, hook, "j"] & N \end{tikzcd}$$

in de categorie $\mathbf{Man}_k$*.*

Bewijs. In de categorie van verzamelingen is het vezelproduct gelijk aan $(f^{-1}(p), i, c)$ met i de natuurlijke inclusie van $f^{-1}(p)$ in M en $c\colon f^{-1}(p) \to \{p\}$ de constante afbeelding (merk op $\{p\} \times_N$

$M \cong f^{-1}(p)$). We krijgen dus het volgende commutatieve diagram:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(p) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "c"] & M \arrow[d, "f"] \\
\{p\} \arrow[r, hook, "j"] & N
\end{tikzcd}$$

Vanwege gevolg 3.7 geldt dat $f^{-1}(p)$ een manifold is met de geïnduceerde schoof en dus een object is in de categorie van manifolds. Merk op dat dit ook geldt voor het punt $\{p\}$. Daarmee is duidelijk dat zowel de constante afbeelding c als de inbedding i van de manifold $f^{-1}(p)$ in M differentieerbare afbeeldingen zijn. Dit maakt dat alle morfismen en objecten in het diagram wel-gedefinieerd zijn in de categorie van manifolds.

Zij (P, g, d) een tripel met P een manifold, $g\colon P \to M$ een C^k-differentieerbare afbeelding en $d\colon P \to \{p\}$ de constante afbeelding zodanig dat $f \circ g = j \circ d$. Omdat dit geldt, is duidelijk dat $g(P) \subset i(f^{-1}(p)) \subset M$. Daarom is er een unieke afbeelding $u\colon P \to f^{-1}(p)$ zodanig dat $i \circ u = g$. We dienen nu na te gaan dat de afbeelding u ook C^k-differentieerbaar is. We zullen checken voor elke x op een kaart $\varphi : U \to X \subset \mathbb{R}^n$ met $U \subset f^{-1}(p)$ dat de eigenschap van differentieerbaarheid geldt. Vanwege de eigenschappen van een schoof en omdat deze kaarten een overdekking vormen van $f^{-1}(p)$, volgt hieruit dat u C^k-differentieerbaar is.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "d"'] & & \\
& f^{-1}(p) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "c"] & M \arrow[d, "f"] \\
& \{p\} \arrow[r, hook, "j"] & N
\end{tikzcd}$$

Zij $x \in f^{-1}(p)$ en $\varphi : U \to X$ een kaart met $x \in U$ zodanig dat deze van een kaart komt als in de constructie van het bewijs van propositie 3.6. Zij $V \subset U$ open en zij $\varphi \in \mathcal{F}(V)$. Laat $W = u^{-1}(V)$. We gaan na dat $\varphi \circ u \in \mathcal{F}(W)$. Merk op dat $g(W) \subset i(f^{-1}(p)) \subset M$. Omdat i de inclusieafbeelding is en $f^{-1}(p)$ de deelruimtetopologie van M heeft, is er een open omgeving $V' \subset M$ zodat $V' \cap i(f^{-1}(p)) = i(V)$. Dan geldt dat $g^{-1}(V') = W$ vanwege de commutativiteit van de afbeelding.

Vanwege de constructie van de schoof op $f^{-1}(p)$, zie het bewijs van propositie 3.6, is er een $\psi \in \mathcal{F}(V')$ zodanig dat $\psi \circ i = \varphi$. We kunnen immers de functie φ uitbreiden van V naar V' via deze lokale coordinaten, dus $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-r})$ met r de co-dimensie van $f^{-1}(p)$ in M.

Omdat g een differentieerbare afbeelding is geldt nu dat $\psi \circ g \in \mathcal{F}(W)$. En omdat $\psi \circ g = \psi \circ i \circ u = \varphi \circ u$ geldt dus dat $\varphi \circ u \in \mathcal{F}(W)$. Hiermee is de functie dus lokaal differentieerbaar voor elke x en daarmee is u een C^k-differentieerbare afbeelding.

We concluderen dat het tripel $(f^{-1}(p), i, c)$ inderdaad een vezelproduct is. $\square$

3.3 Deformaties van manifolds

In deze laatste paragraaf zullen we de categorie van deformaties van een manifold M, $\mathbf{Def}_M$ definiëren. Deformatietheorie is, in de woorden van Hartshorne *"the infinitesimal study of a family in the neighborhood of a given element"* Hartshorne 2009, p. 1. Hieronder geven we een opzet voor deze theorie in het geval van C^k-manifolds en een eerste resultaat.

Definitie 3.12. *Zij M een C^k-differentieerbare manifold. Een **deformatie** van M is een tripel (X, f, i) waarbij X een differentieerbare manifold is, f een surjectieve submersie $f\colon X \to (-1, 1)$*

en $i\colon M \hookrightarrow X$ een inbedding zodanig dat $f^{-1}(0) = i(M)$. Een ***morfisme van deformaties*** *$(X, f, i) \to (Y, g, j)$ is een differentieerbare afbeelding $\psi\colon X \to Y$ zodanig dat $f = g \circ \psi$ en $\psi \circ i = j$.*

We merken op dat in de bovenstaande definitie het tripel (M, i, c) met $c : M \to 0$ de constante afbeelding vanwege propositie 3.11 een vezelproduct is van

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & (-1,1). \end{tikzcd}$$

Het doel van deformaties is om te bekijken hoe we manifolds in een ingebedde ruimte kunnen vervormen. Daarom is het slechts interessant wat er gebeurt in een omgeving rond de manifold $i(M) \subset X$. Het kijken naar isomorfismen in deze categorie geeft daarmee een te sterke eigenschap wanneer we de deformaties van M willen classificeren. De volgende definitie lijkt daarom een betere voorwaarde te geven wanneer we twee deformaties als 'hetzelfde' willen beschouwen.

Definitie 3.13. *We noemen twee deformaties (X, f, i) en (Y, g, j)* ***equivalent*** *als er een $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat met een C^k-diffeomorfisme $\varphi\colon f^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \to g^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$, zodanig dat $f|_{f^{-1}(-\epsilon,\epsilon)} = g \circ \varphi$ en $j = \varphi \circ i$.*

In een specifiek geval blijken deformaties triviaal te zijn, namelijk als de afbeelding f een propere afbeelding is en de manifold X Hausdorff en second-countable is.

Definitie 3.14. *Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten. We noemen een afbeelding* ***proper*** *als voor elke compacte verzameling $U \subset Y$ geldt dat $f^{-1}(U)$ compact is.*

Stelling 3.15. *Zij (X, f, j) een deformatie van een C^∞-manifold M met de eigenschap dat X Hausdorff en second-countable is. Als $f\colon X \to (-1, 1)$ proper is, dan is de deformatie triviaal, i.e. (X, f, j) is equivalent met $(M \times (-1, 1), \pi_2, i_M)$, waarbij $\pi_2\colon M \times (-1, 1)$ de projectieafbeelding is op de tweede coördinaat.*

Het bewijs van deze stelling maakt gebruik van vectorvelden op manifolds en 'partitions of unity' en valt daarmee buiten het bereik van dit onderzoek. De bovenstaande stelling is een specifiek geval van propositie 1.1 in Narasimhan 1982, p196-197 en het bewijs kan hier gevonden worden.

Een interessant vervolgonderzoek zou zijn of we deze stelling algemener kunnen maken door eisen weg te laten of te verzwakken. Het bewijs lijkt bijvoorbeeld ook op te gaan voor C^k-manifolds. Tevens is in de bovenstaande setting de manifold M een compacte manifold omdat $i(M) = f^{-1}(0)$. Het lijkt daarom een interessante vraag of we de eis dat f een propere afbeelding is, kunnen verzwakken en daarmee wat kunnen zeggen over niet-compacte manifolds. Hetzelfde geldt voor de eisen van Hausdorff en second-countable.

Bijlagen

A Categorietheorie

In deze bijlage zullen we een korte introductie geven in categorietheorie. Een aantal zaken die behandeld zullen worden zijn equivalentie van categorieën, limieten en geadjungeerde functoren. De theorie uit dit hoofdstuk komt uit Stevenhagen 2012 en Holmes 2016.

A.1 Categorieën en functoren

Definitie A.1 (Stevenhagen 2012, Def 27.1). *Een categorie $\mathcal{C}$ bestaat uit objecten en, voor ieder tweetal objecten $A, B \in \mathcal{C}$, een verzameling $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ van morfismen van A naar B. Voor ieder drietal objecten $A, B, C \in \mathcal{C}$ is er tevens een samenstellingsafbeelding van morfismen*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f,g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

met de volgende twee eigenschappen:

1. *voor iedere $A \in \mathcal{C}$ bevat $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ een identiteit id_A die zich als eenheid gedraagt met betrekking tot samenstellingen;*
2. *voor morfismen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ geldt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Om verzamelingstheoretische paradoxen te vermijden, wordt in de definitie niet aangenomen dat de objecten van $\mathcal{C}$ een verzameling vormen.

De morfismen van een object naar zichzelf heten de endomorfimsen, genoteerd als $\mathrm{Hom}(A, A) = \mathrm{End}(A)$. Door het bestaan van een identiteit voor ieder object kunnen we praten over inversen van morfismen. Als een morfisme een tweezijdige inverse heeft dan noemen we deze een isomorfisme. De isomorfismen in $\mathrm{End}(A)$ noemen we de automorfismen van A, genoteerd als $\mathrm{Aut}(A)$. Deze morfismen vormen een groep onder samenstelling.

Het standaardvoorbeeld van een categorie is de categorie **Sets** van verzamelingen met als morfismen de afbeeldingen. Een ander voorbeeld is de categorie **Grp** van alle groepen waarbij de morfismen worden gegeven door de groepshomomorfismen. In deze categorieën kunnen we ook kijken naar deelcategorieën. De categorie **Ab** is bijvoorbeeld een deelcategorie van de categorie **Grp** op de manier die men zou verwachten. De topologische ruimten met als morfismen de continue afbeeldingen vormen de categorie **Top**. Hierin zijn de isomorfismen de homeomorfismen tussen de topologische ruimten.

Elke categorie $\mathcal{C}$ heeft een tegenovergestelde categorie $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$. Deze categorie heeft als objecten de objecten van $\mathcal{C}$ en als morfismen, de morfismen van $\mathcal{C}$ alleen dan in tegenovergestelde richting en waarbij de samenstelling van morfismen wordt omgedraaid.

Definitie A.2 (Stevenhagen 2012, Def 27.4). *Een* ***functor*** *$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is een afbeelding die aan elk object $A \in \mathcal{C}$ een object $F(A) \in \mathcal{D}$ toevoegt en aan elk morfisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ een morfisme $f_* = F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ met de eigenschap dat geldt dat $(\mathrm{id}_A)_* = F(\mathrm{id}_A)$ en $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

Een makkelijk voorbeeld van een functor is de zogenaamde *vergeetfunctor* [Stevenhagen 2012, vb. 27.5.4] die een deel van de structuur van een object 'vergeet'. Zo is er voor veel categorieën een functor naar de categorie **Sets** die de objecten ziet als verzamelingen en de morfismen als verzamelingstheoretische afbeeldingen. Een ander voorbeeld van een functor is de *eenhedengroepsfunctor* [Stevenhagen 2012, vb. 27.5.2] $F\colon$ **Rng** $\to$ **Grp** die een ring afbeeldt op zijn eenhedengroep in de categorie van groepen. Ieder ringhomomorfisme induceert een groepshomomorfisme op de eenhedengroep en daarmee is deze functor goed gedefinieerd.

Twee functoren $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ vormen zelf ook een categorie $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ als we de volgende morfismen van functoren, natuurlijke transformaties, definiëren:

Definitie A.3 (Stevenhagen 2012, Def 27.8)**.** *Voor functoren $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is een* ***natuurlijke transformatie*** *$F \to G$ een collectie van morfismen $\{\tau_C\colon F(C) \to G(C)\}_{C\in\mathcal{C}}$ in $\mathcal{D}$ zodanig dat voor ieder morfisme $f\colon C \to C'$ in $\mathcal{C}$ het diagram*

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"] & G(C') \end{tikzcd}$$

commuteert. Als alle morfismen τ_C isomorfismen zijn, heten de functoren F en G ***natuurlijk equivalent*** *of* ***isomorf****.*

De bovenstaande categorie van functoren geeft aanleiding tot een definitie van wanneer er sprake is van een equivalentie tussen categorieën.

Definitie A.4 (Stevenhagen 2012, Def 27.10)**.** *We noemen een functor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ een* ***equivalentie van categorieën*** *als er een functor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ bestaat zodanig dat $F \circ G$ en $G \circ F$ isomorf zijn met de identiteitsfunctor op $\mathcal{C}$ respectievelijk $\mathcal{D}$.*

In het bijzondere geval dat de functoren $F \circ G$ en $G \circ F$ niet alleen isomorf zijn, maar ook gelijk zijn aan de identiteitsfunctoren dan spreken over een **isomorfisme van categorieën** (MacLane 1971, p92).

A.2 Limieten

In deze paragraaf zullen we limieten introduceren. De definities komen uit de aantekeningen van Holmes 2016.

Definitie A.5 (Holmes 2016, 3.1)**.** *Een object T in een categorie $\mathcal{C}$ heet een* ***terminaal object*** *als er voor ieder object A in $\mathcal{C}$ één uniek morfisme $A \to T$ bestaat. Een object T in een categorie $\mathcal{C}$ heet een* ***initieel object*** *als er voor ieder object A in $\mathcal{C}$ één uniek morfisme $T \to A$ bestaat.*

Voorbeeld A.6. De onderstaande tabel geeft een aantal voorbeelden van eindige en co-eindige objecten.

	Initieel	Terminaal
Set/**Top**/**Man**	$\emptyset$	$\{pt\}$
Grp	$\{e\}$	$\{e\}$
R-**Mod**/k-**Vect**	0	0
Ring	$\mathbb{Z}$	0
(k-)**Fld**	(k)	-

Lemma A.7. *Een terminaal object is uniek op een uniek isomorfisme na.*

Bewijs. Zij T en T' twee terminale objecten. Dan bestaan er vanwege de eigenschap van een terminaal object de volgende vier morfismen:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[loop left, "\mathrm{id}_T"] \arrow[r, bend left, "u"] & T' \arrow[l, bend left, "u'"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{T'}"] \end{tikzcd}$$

Omdat id_T het unieke morfisme van T naar zichzelf is, volgt dat $u' \circ u = \mathrm{id}_T$. Analoog geldt $u \circ u' = \mathrm{id}_{T'}$. Kortom u is een isomorfisme met u' zijn inverse en deze is uniek. $\square$

We definiëren hieronder de categorie van kegels naar F. Een limiet wordt dan een terminaal object in deze categorie. De categorie wordt gedefinieerd aan de hand van een functor.

Definitie A.8 (Holmes 2016, 3.2)**.** *Zij $\mathcal{C}$ en $\mathcal{I}$ twee categorieën. Een* ***diagram in $\mathcal{C}$ van vorm $\mathcal{I}$*** *is een functor $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$.*

Definitie A.9 (Holmes 2016, 3.2)**.** *Een* ***kegel naar*** *F is een object N in $\mathcal{C}$ samen met morfismen $\psi_i\colon N \to F(i)$ voor elk object i in $\mathcal{I}$, zodanig dat voor alle morfismen $g\colon i \to j$ in $\mathcal{I}$ geldt dat $\psi_j = F(g) \circ \psi_i$.*

Definitie A.10 (Holmes 2016, 3.2)**.** *Zij $(N, \{\psi_i\}_{\mathcal{I}})$ en $(M, \{\varphi_i\}_{\mathcal{I}})$ twee kegels naar F. Een* ***morfisme van*** *$(N, \{\psi_i\}_{\mathcal{I}})$* ***naar*** *$(M, \{\varphi_i\}_{\mathcal{I}})$ is een morfisme $h\colon N \to M$ in $\mathcal{C}$ zodanig dat voor elk object i in $\mathcal{I}$ geldt dat $\psi_i = \varphi_i \circ h$.*

Definitie A.11 (Holmes 2016, 3.2)**.** *Als een terminaal object in de categorie van kegels naar F bestaat dan noemen we dit object een* ***limiet van*** *F.*

Een direct gevolg van lemma A.7 is het volgende resultaat:

Gevolg A.12. *Een limiet is uniek op een uniek isomorfisme na.*

Duaal kunnen we de categorie van kegels van F definiëren. Een co-limiet van F is dan een initieel object in deze categorie.

A.2.1 Product

Misschien wel het bekendste voorbeeld is dat van een product:

Definitie A.13 (Holmes 2016, 3.2.2)**.** *Zij $\mathcal{I}$ een discrete categorie van twee objecten* **1**,**2**. *Zij $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ een diagram in $\mathcal{C}$ van vorm $\mathcal{I}$. Het limiet van F noemen we het* ***product*** *van $F(\mathbf{1})$ en $F(\mathbf{2})$.*

Dit voorbeeld laat zich het makkelijkst verhelderen in de categorie van verzamelingen:

Voorbeeld A.14. Stel $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ en dat $F(\mathbf{1}) = A$ en $F(\mathbf{2}) = B$ met A en B objecten in **Set**. Dan is het limiet van F het cartesisch product $A \times B$ met de projectieafbeeldingen $\pi_A\colon A \times B \to A$ en $\pi_B\colon A \times B \to B$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Er is dus voor ieder object (X, f, g) in de categorie van kegels over F, waarbij X een verzameling is en $f\colon X \to A$ en $g\colon X \to B$ afbeeldingen zijn, een unieke afbeelding $u\colon X \to A \times B$. Deze afbeelding wordt gegeven door $u(x) = (f(x), g(x))$.

In het geval dat de categorie **Top** is dan krijgt dit cartesisch product de producttopologie. Voor de categorie **Man** is wat meer werk nodig.

A.2.2 Vezelproduct

Definitie A.15 (Holmes 2016, 3.4)**.** *Zij $\mathcal{I}$ een categorie met drie objecten* **1**, **2**, **3** *en (naast de identiteitsmorfismen) de morfismen $f\colon \mathbf{2} \to \mathbf{1}$ en $g\colon \mathbf{3} \to \mathbf{1}$. Zij $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ een diagram van vorm*

*$\mathcal{I}$. Een limiet van F noemen we een **vezelproduct** (of **pullback**) van $F(\mathbf{2})$ en $F(\mathbf{3})$ over $F(\mathbf{1})$; notatie $F(\mathbf{2}) \times_{F(f),F(\mathbf{1}),F(g)} F(\mathbf{3})$ of, als de morfismen duidelijk zijn, $F(\mathbf{2}) \times_{F(\mathbf{1})} F(\mathbf{3})$.*

We zullen met behulp van diagrammen de bovenstaande definitie proberen te verhelderen. Zij $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ een functor als hierboven, dan is het vezelproduct een object (P, p_1, p_2, p_3) in de categorie van kegels over F waarbij P een object in $\mathcal{C}$ en $p_i\colon P \to F(i)$ morfismen zodanig dat

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, "p_3"] & \\ F(2) \arrow[r, "F(f)"'] & F(1) & F(3) \arrow[l, "F(g)"] \end{tikzcd}$$

commuteert en dat voor elk ander object (R, r_1, r_2, r_3) er een uniek morfisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, P)$ bestaat zodanig dat het diagram

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[ddl, bend right, "r_2"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[ddr, bend left, "r_3"] & \\ & P \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, "p_3"] & \\ F(2) \arrow[r, "F(f)"'] & F(1) & F(3) \arrow[l, "F(g)"] \end{tikzcd}$$

commuteert. Omdat in dit geval voor iedere kegel (R, r_1, r_2, r_3) geldt dat $r_1 = F(f) \circ r_2 = F(g) \circ r_3$ laten we vaak de afbeelding r_1 weg in het diagram en schrijven we het tripel (R, r_2, r_3) voor het vezelproduct. Daarbij laten we ook de afbeelding $p_1\colon P \to F(1)$ van het vezelproduct weg.

Lemma A.16. *Het vezelproduct in de categorie* **Set** *van verzamelingen bestaat altijd en kunnen we beschrijven door het tripel $(X \times_Z Y, i, j)$ met $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$, $i\colon X \times_Z Y \to X$ gedefinieerd door $i(x, y) = x$ en $j\colon X \times_Z Y \to Y$ door $j(x, y) = y$.*

Bewijs. Zij X, Y, Z verzamelingen met $f\colon X \to Z$ en $g\colon Y \to Z$ afbeeldingen. Het is duidelijk dat voor het tripel $(X \times_Z Y, i, j)$ geldt dat $f \circ i = g \circ j$ door hoe we $X \times_Z Y$ gedefinieerd hebben.

Zij (P, p, q) een tripel met P een verzameling en $p\colon P \to X$ en $q\colon P \to Y$ afbeelding zodanig dat $f \circ p = g \circ q$. Nu is er een natuurlijke afbeelding $u\colon P \to X \times_Z Y \subset X \times Y$ gedefinieerd door $a \in P$ $u(a) = (p(a), q(a))$. Het is duidelijk dat $i \circ u = p$ en $j \circ u = q$. De vraag is dus of deze afbeelding goed gedefinieerd is. Daarvoor merken we op dat

$$(f \circ i)(p(a), q(a)) = (f \circ i \circ u)(a) = (f \circ p)(a) = (g \circ q)(a) = (g \circ j \circ u)(a) = (g \circ j)(p(a), q(a)).$$

Hieruit volgt dat $(p(a), q(a)) \in X \times_Z Y$ en dus is de afbeelding inderdaad goed gedefinieerd.

We concluderen dat het tripel $(X \times_Z Y, i, j)$ inderdaad een vezelproduct is en via de bovenstaande constructie kunnen we deze altijd maken. □

A.2.3 Equalizer

Definitie A.17. *Zij $\mathcal{I}$ een categorie met twee objecten $\mathbf{1}$ en $\mathbf{2}$ met twee morfismen $f, g\colon \mathbf{1} \to \mathbf{2}$. Zij $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ een diagram van vorm $\mathcal{I}$. Een limiet van $\mathcal{F}$ noemen we een **equalizer** van f en g.*

In de categorie **Set** komt de equalizer overeen met de verzameling $\{x \in F(1) \mid f(x) = g(x)\}$ en is de inclusieafbeelding de bijbehorende afbeelding. Dit verklaart de naamgeving van deze limiet.

Een bekend voorbeeld van een equalizer is de kern van een homomorfisme van groepen. N.B. Men kan dit voorbeeld veralgemeniseren naar categorieën waarin er een 'nul'-afbeelding bestaat.

Voorbeeld A.18. Zij $\mathcal{I}$ een categorie met twee objecten $\mathbf{1}$,$\mathbf{2}$ en $g, h : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ twee morfismen. Zij $F \colon \mathcal{I} \to \mathbf{Grp}$ zodanig dat $F(h) = 0$. Dan is de kern van de afbeelding $F(g) \colon F(\mathbf{1}) \to F(\mathbf{2})$ (met de inclusieafbeelding en nulafbeelding) een limiet van F.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & \ker(F(g)) \arrow[dl, hook, "i"'] \arrow[dr, "0"] & \\
F(\mathbf{1}) \arrow[rr, shift left, "0"] \arrow[rr, shift right, "F(g)"'] & & F(\mathbf{2})
\end{tikzcd}$$

A.2.4 Directe limiet

De bovenstaande voorbeelden zijn allen voorbeelden van limieten. Zoals gezegd kunnen we de constructie ook omdraaien voor de constructie van co-limieten. Men definieert voor een diagram F in $\mathcal{C}$ een kegel van F als een object N in $\mathcal{C}$ samen met morfismen $\psi_i \colon F(i) \to N$ voor elk object $i \in \mathcal{I}$, zodanig dat voor alle morfismen $g \colon i \to j$ in $\mathcal{I}$ geldt dat $\psi_i = \psi_j \circ F(g)$. Analoog definieert men de morfismen op de bijbehorende manier. Een co-limiet van F is dan een initieel object in deze categorie.

Een voorbeeld van een co-limiet is het directe limiet. Hiervoor hebben we de definitie nodig van een gerichte verzameling, welke we daarom eerst zullen geven.

Definitie A.19. *Zij I een verzameling met een relatie $\leq$ die reflexief en transitief is. We noemen $(I, \leq)$ een **gerichte verzameling** indien er voor elk paar $i, j \in I$ een $k \in I$ bestaat zodanig dat $i \leq k$ en $j \leq k$.*

Definitie A.20. *Zij $(I, \leq)$ een gerichte verzameling en beschouw de categorie $\mathcal{I}$ met als objecten de elementen van I en morfismen $i \to j$ voor alle $i \leq j$ met $i, j \in I$. Zij $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ een diagram van vorm $\mathcal{I}$. Een colimiet van F noemen we een **directe limiet**.*

A.3 Geadjungeerde functoren

Definitie A.21 (Holmes 2016, 4)**.** *Zij $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ twee categorieën en $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ twee functoren. We noemen F **geadjungeerd** met G als er voor alle objecten A in $\mathcal{C}$ en B in $\mathcal{D}$ een natuurlijke bijectie bestaat tussen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$. Als dit geldt noemen we G de rechtergeadjungeerde van F en F de linkergeadjungeerde van G.*

Voor een nettere definitie, voornamelijk betreffende wat het betekent om een natuurlijke bijectie te zijn (zie MacLane 1971). We merken op dat deze relatie niet symmetrisch is. Dus een rechtergeadjungeerde is niet altijd een linkergeadjungeerde.

Lemma A.22 (Holmes 2016, 5)**.** *Zij $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{I}$ drie categorieën en zij $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ een functor, $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ de rechtergeadjungeerde en $\Phi \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, $\Psi : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ twee diagrammen van vorm $\mathcal{I}$.*

1. *Als een limiet van Ψ bestaat, dan bestaat een limiet van $G \circ \Psi$ en geldt $G(lim\ \Psi) = lim(G \circ \Psi)$.*
2. *Als colim Φ bestaat, dan bestaat colim $F \circ \Phi$ en geldt $F(colim\ \Phi) = colim(F \circ \Phi)$.*

Bewijs. Zie Holmes 2016. □

B Differentieerbaarheid via atlassen

In deze bijlage behandelen we de klassieke methode om een differentieerbare structuur op een manifold te definiëren. De motivatie van deze methode komt uit de verschillende kaarten waaruit een manifold bestaat. Op deze kaarten werken de 'gewone' definities van differentiaalmeetkunde uit $\mathbb{R}^n$. Daarvoor moeten we er wel voor zorgen dat als verschillende kaarten dezelfde punten van een manifold bevatten functies zich hier 'op een zelfde manier gedragen'. We zullen hieronder deze intuïtieve methode exact te maken met behulp van collecties van kaarten, atlassen, die met elkaar verenigbaar zijn. De definities en resultaten uit dit hoofdstuk komen voornamelijk uit John M. Lee 2013.

B.1 Differentieerbaarheid in $\mathbb{R}^n$

We herhalen allereerst een aantal resultaten uit de analyse. We beginnen met de definitie van differentieerbaarheid in $\mathbb{R}^n$ welke hier gebruikt zal worden.

Definitie B.1 (John M. Lee 2013, p11). *Zij $X \subset \mathbb{R}^m$ en $Y \subset \mathbb{R}^n$ open deelverzamelingen en $f : X \to Y$ een afbeelding. We noemen de afbeelding f C^k-**differentieerbaar** als van elke component van f de partiële afgeleiden tot en met orde k bestaan en continu zijn. Als f bijectief is en zijn inverse f^{-1} ook C^k-differentieerbaar is, dan noemen we f een C^k-**diffeomorfisme**.*

We merken op dat een functie $f : X \to Y$ componentsgewijs geschreven kan worden als $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ met n de dimensie van $Y \subset \mathbb{R}^n$. Een andere belangrijke opmerking is dat een diffeomorfisme in het bijzonder altijd een homeomorfisme is, omdat elke differentieerbare afbeelding continu is. Als f differentieerbaar is, dan noteren we de **totale afgeleide** op een punt $p \in X$ van f als $Df(p)$. Deze afgeleide is een lineaire afbeelding en geeft de lineaire benadering van f in het punt p (voor details, zie John M. Lee 2013 642-4).

Propositie B.2 (John M. Lee 2013, p643). *Zij $X \subset \mathbb{R}^m$ en $Y \subset \mathbb{R}^n$ open deelverzamelingen, $a \in X$ en $f, g : X \to Y$ twee afbeeldingen. Dan geldt:*

(a) *Als f differentieerbaar is in a, dan is f continu in a.*

(b) *Als f constant is, dan is f differentieerbaar in a en geldt $f'(a) = 0$.*

(c) *Als f en g differentieerbaar zijn in a, dan is $f + g$ differentieerbaar in a.*

(d) *Stel $Z \subset \mathbb{R}^l$ en $h : Y \to Z$. Als h differentieerbaar is in $f(a)$ en f differentieerbaar is in a, dan is de compositie $h \circ f$ differentieerbaar in h.*

Stel $n = 1$, i.e. $Y \subset \mathbb{R}$.

(e) *Als f en g differentieerbaar zijn in a, dan is fg differentieerbaar in a.*

(f) *Als f differentieerbaar is in a en $f(a) \neq 0$, dan is $1/f$ differentieerbaar in a.* □

Voor $X \subset \mathbb{R}^n$ zijn we in het bijzonder geïnteresseerd in $\mathcal{C}^k$-differentieerbare functies $f : X \to \mathbb{R}$. Deze functies, genoteerd als $C^k(X)$, vormen een $\mathbb{R}$-algebra. Het bewijs hiervan volgt direct uit Propositie B.2.

Propositie B.3 (John M. Lee 2013, p645). *Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ en zij $\mathcal{C}^k(X)$ de verzameling van C^k-differentieerbare functies van X naar $\mathbb{R}$. Zij $f, g \in \mathcal{C}^k(X)$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan definiëren we de operaties puntgewijs:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(cf)(x) = c(f(x)),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Dan vormt $\mathcal{C}^k(X)$ onder deze operaties een $\mathbb{R}$-algebra. □

B.2 Atlassen

Omdat een manifold lokaal op $\mathbb{R}^n$ lijkt, ligt het voor de hand om de gebieden waar dit gebeurt 'in kaart te brengen'. De terminologie van deze theorie maakt daarom handig gebruik van de terminologie van een atlas. Wie wel eens een atlas heeft gezien, kan aan de hand hiervan een beeld vormen bij de onderstaande definities.

Definitie B.4 (John M. Lee 2013, p4)**.** *Zij M een topologische manifold. Een **kaart** op M is een tripel (U, φ, X) met $U \subset M$ open en $\varphi : U \to X$ een homeomorfisme met $V \subset \mathbb{R}^n$ open.*

Per definitie van een topologische manifold is er voor elke $x \in M$ een kaart (U, φ, X). We zeggen dat de kaart **gecentreerd is op** x als $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Als (U, φ, X) een kaart is met $x \in U$, dan kunnen we een kaart krijgen die x als middelpunt heeft door de kaart met de constante vector $\varphi(x)$ te verplaatsen.

Omdat kaarten van manifolds afbeelden op een deelverzameling in $\mathbb{R}^n$ kunnen we het hebben over afbeeldingen tussen deze verschillende deelverzamelingen in $\mathbb{R}^n$.

Definitie B.5 (John M. Lee 2013, p12)**.** *Zij (U, φ, X) en (V, ψ, Y) twee kaarten met $U \cap V \neq \emptyset$. De samenstelling $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi[U \cap V]}$ is de **transitie-afbeelding van φ naar ψ**.*

Deze transitie-afbeelding is een homeomorfisme omdat zowel φ en ψ homeomorfismen zijn. Omdat deze afbeelding een afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$ is, werken onze definities van differentieerbaarheid uit $\mathbb{R}^n$. Hiermee hebben we een zinnige definitie voor wanneer kaarten verenigbaar zijn.

Definitie B.6 (John M. Lee 2013, p12)**.** *Zij (U, φ, X) en (V, ψ, Y) twee kaarten. We noemen twee kaarten (U, φ, Y) en (V, ψ, Y) C^k**-verenigbaar** als $U \cap V = \emptyset$ of als de transitie-afbeelding een C^k-diffeomorfisme is.*

Nu we kaarten kunnen verenigen, kunnen we collecties van kaarten bekijken. We definiëren allereerst het idee van een overdekking voor een collectie kaarten.

Definitie B.7. *Zij M een topologische manifold en $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, X_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ een collectie kaarten. We noemen $\mathcal{A}$ een overdekking van M als geldt dat $M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$.*

De verzameling $\mathcal{I}$ in de bovenstaande definitie is een willekeurige index-verzameling welke overaftelbaar kan zijn. Als $\mathcal{I}$ eindig is, noemen we het een eindige overdekking. Met de bovenstaande definities kunnen we nu een atlas op een manifold definiëren.

Definitie B.8 (John M. Lee 2013, p12)**.** *Zij M een topologische manifold. Een **atlas $\mathcal{A}$ voor** M is een collectie van kaarten die een overdekking van M vormen. We noemen een atlas $\mathcal{A}$ C^k**-differentieerbaar** als elk tweetal kaarten C^k-verenigbaar zijn.*

Om de bovenstaande definities te verhelderen zullen we hieronder een atlas van een cirkel geven.

Voorbeeld B.9. Zij $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ de eenheidscirkel en zij $A_1 = (-\pi, \pi)$ en $A_2 = (-\pi, \pi)$. Dan vormen de kaarten $(S^1 \setminus \{(-1, 0)\}, \varphi_1, A_1)$ en $(S^1 \setminus \{(1, 0)\}, \varphi_2, A_2)$, met φ_1 de hoekfunctie met $(1, 0)$ als basispunt en φ_2 de hoekfunctie met $(-1, 0)$ als basispunt, met de volgende transitieafbeeldingen een C^k-differentieerbare atlas $\mathcal{A}$ voor S^1:

$$\tau_{ij} : A_i \setminus \{0\} \to A_j \tau(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{voor } x < 0, \\ x - \pi & \text{voor } x > 0; \end{cases}$$

voor $i \neq j$.

De definitie van een atlas laat voor een topologische manifold vele mogelijke atlassen over. Dit laat zich illustreren in het gekozen voorbeeld. We hadden immers elk willekeurig open interval op

$\mathbb{R}$ kunnen kiezen door middel van translaties of in de cirkel andere open verzamelingen kunnen kiezen. Om tot een definitie van een differentieerbare structuur te komen zonder onnodig veel verschillende structuren te krijgen introduceren we daarom de volgende definitie:

Definitie B.10 (John M. Lee 2013, p13)**.** *Zij M een topologische manifold. Een C^k-differentieerbare atlas $\mathcal{A}$ op M is **maximaal** als voor elke C^k-differentieerbare atlas $\mathcal{B}$ waarvoor geldt dat als $U \in \mathcal{A}$ dan ook $U \in \mathcal{B}$ geldt, dat volgt dat $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Als $\mathcal{A}$ maximaal is noemen we het een **C^k-differentieerbare structuur op** M.*

Voor een maximale C^k-atlas $\mathcal{A}$ geldt daarom dat elke kaart die C^k-verenigbaar is met alle kaarten in $\mathcal{A}$ al in de atlas $\mathcal{A}$ zit. Een maximale atlas wordt daarom ook wel *compleet* genoemd.

B.3 Differentieerbare manifolds via atlassen

Aan de hand van de definities van de vorige paragraaf, kunnen we nu een definitie geven van een differentieerbare manifold.

Definitie B.11 (John M. Lee 2013, p13)**.** *Zij M een topologische n-manifold en zij $\mathcal{A}$ een atlas voor M. We noemen $(M, \mathcal{A})$ een **C^k-differentieerbare-$\mathcal{A}$-manifold van dimensie** n of **C^k-$\mathcal{A}$-manifold** als $\mathcal{A}$ een maximale C^k-differentieerbare atlas is.*

Omdat in het volgende hoofdstuk een andere differentieerbare structuur zal worden gegeven, hebben we hier in de definitie een $\mathcal{A}$ van atlas neergezet om in de komende hoofdstukken onderscheid tussen beide te kunnen maken.

Zoals elke open deelverzameling van een topologische manifold een topologische manifold vormt, is ook hier elke open deelverzameling van een C^k-$\mathcal{A}$-manifold een voorbeeld van een C^k-$\mathcal{A}$-manifold. Dit volgt uit het volgende resultaat.

Lemma B.12. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold van dimensie n. Zij $U \subset M$ een open deelverzameling. Dan vormt de collectie van kaarten:*

$$\mathcal{A}_M|_U = \{(U \cap M_i, \varphi|_{U \cap M_i}, \mathrm{Im}(\varphi|_{U \cap M_i})) : (M_i, \varphi, X_i) \in \mathcal{A}_M \text{ en } U \cap M_i \neq \emptyset\}$$

*een C^k-differentieerbare structuur op U. We noemen dit de **restrictie van $\mathcal{A}_M$ op** U.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $\mathcal{A}_M|_U$ een atlas vormt voor U, omdat elke beperking $U \cap M_i$ een kaart geeft op U en deze collectie kaarten C^k-verenigbaar zijn en een overdekking zijn voor U. We dienen daarom alleen nog te bewijzen dat $\mathcal{A}_M|_U$ een maximale atlas vormt voor U. We bewijzen dit uit het ongerijmde.

Stel $\mathcal{A}_M|_U$ is geen maximale atlas. Dan is er een kaart $(U_i, \varphi_i, X_i) \notin \mathcal{A}_M|_U$ zodanig dat $U_i \subset U$ open is en die C^k-verenigbaar is met alle kaarten in $\mathcal{A}_M|_U$. We laten nu zien dat deze kaart $(U_i, \varphi_i, X_i) \in \mathcal{A}_M$ en dan volgt een tegenspraak, omdat deze kaart dan per constructie in $\mathcal{A}_M|_U$ moet zitten. Zij $(U_j, \varphi_j, X_j) \in \mathcal{A}_M$ willekeurig gegeven. Stel $U_i \cap U_j = \emptyset$ dan zijn de kaarten per definitie C^k-verenigbaar. Stel dus dat $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Dan geldt $U_i \cap U_j \subset U$. We kunnen daarom naar de beperkte kaart $(U_j \cap U, \varphi_j|_U, \mathrm{Im}(\varphi_j|_U))$ bekijken. Daarvan weten we dat deze $(U_j \cap U, \varphi_j|_U, \mathrm{Im}(\varphi_j|_U)) \in \mathcal{A}_M|_U$ per constructie. Vanwege onze aanname is (U_i, φ_i, X_i) C^k-verenigbaar met deze kaart en dus in het bijzonder met (U_j, φ_j, X_j). Hieruit concluderen we dat (U_i, φ_i, X_i) C^k-verenigbaar is met elke kaart in $\mathcal{A}_M$ en dus per definitie volgt dat $(U_i, \varphi_i, X_i) \in \mathcal{A}_M$. Dit is in tegenspraak met onze aanname.

We concluderen dat $\mathcal{A}_M|_U$ een maximale C^k-differentieerbare atlas is en dus is $\mathcal{A}_M|_U$ een C^k-differentieerbare structuur op U. □

Gevolg B.13. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold van dimensie n. Zij $U \subset M$ een open deelverzameling. Dan is U met de atlas $\mathcal{A}_M|_U$ een C^k-$\mathcal{A}$ manifold van dimensie n.* □

Een ander resultaat uit Lemma B.12 is dat voor een deelverzameling $U \subset M$ het in wezen niet uitmaakt of we een kaart (U_i, φ_i, X_i) met $U_i \subset U$ uit de atlas $\mathcal{A}_M$ of uit de $\mathcal{A}_M|_U$ omdat de kaarten van deze vorm per constructie allebei in deze atlassen moeten zitten.

Gevolg B.14. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold en $U \subset M$ open. Dan geldt dat voor alle kaarten (U_i, φ, X_i) met $U_i \subset U$ dat $(U_i, \varphi, X_i) \in \mathcal{A}_M$ dan en slechts dan als $(U_i, \varphi, X_i) \in \mathcal{A}_M|_U$.* □

Uit Gevolg $B.14$ volgt dat als we een tripel $V \subset U \subset M$ dat de beperkingen van de atlas $\mathcal{A}_M$ en de atlas $\mathcal{A}_M|_U$ dezelfde atlas geven op V.

Gevolg B.15. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ een C^k-$\mathcal{A}$-manifold en $V \subset U \subset M$ open deelverzamelingen. Dan geldt $(\mathcal{A}_M|_U)|_V = \mathcal{A}_M|_V$.* □

Definitie B.16 (John M. Lee 2013, p34). *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ twee C^k-$\mathcal{A}$-manifolds en zij $f : M \to N$ een afbeelding. We zeggen dat f **C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar** is als voor elke $x \in M$ er kaarten $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_N$ bestaan met $x \in U$ en $f(x) \in V$ zodanig dat $f(U) \subset V$ en de samenstelling $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : X \to Y$ C^k-differentieerbaar is van $X \subset \mathbb{R}^m$ naar $Y \subset \mathbb{R}^n$.*

De bovenstaande definitie geeft ook een zinnige definitie voor wanneer functies van een manifold M naar $\mathbb{R}^n$ C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar zijn. We kunnen in de bovenstaande definitie $N \subset \mathbb{R}^n$ te nemen en voor elke afbeelding $\psi = \mathrm{id}$ te kiezen. Een functie $f : M \to N \subset \mathbb{R}^n$ is dan C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar als $f \circ \varphi^{-1}$ voor kaarten (U, φ, X) C^k-differentieerbaar is. Uit deze definitie volgt tevens dat voor een kaart (U, φ, X) in een C^k-differentieerbare atlas geldt dat φ en φ^{-1} C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar zijn.

De definitie van C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaarheid is in feite onafhankelijk van welke kaart we kiezen. Dit blijkt uit het bewijs van het volgende lemma.

Lemma B.17. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ twee C^k-$\mathcal{A}$-manifolds en zij $f : M \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding. Dan geldt voor alle kaarten $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_N$ met $U \cap f^{-1}[V] \neq \emptyset$ dat de samenstelling $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}[V])}$ C^k-differentieerbaar is.*

Bewijs. Laat $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_N$ met $U \cap f^{-1}[V] \neq \emptyset$ gegeven. We merken op dat voor elke $x \in U$ er kaarten $(U_i, \varphi_i, X_i) \in \mathcal{A}_M$ en $(V_i, \psi_i, X_i) \in \mathcal{A}_N$ bestaan met $x \in U_i$ en $f(x) \in V_i$ zodanig dat $\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ C^k-differentieerbaar is. Omdat zowel $\mathcal{A}_M$ als $\mathcal{A}_N$ C^k-differentieerbare atlassen zijn, geldt dat de transitie-afbeeldingen $\varphi_i \circ \varphi^{-1}|_{\varphi[U \cap U_i]}$ en $\psi_i \circ \psi^{-1}|_{\varphi[V \cap V_i]}$ C^k-differentieerbaar zijn. Nu zien we dat

$$(\psi_i \circ \psi^{-1}) \circ \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1} \circ (\varphi_i \circ \varphi^{-1}|_{\varphi[U_i] \cap f^{-1}[V]}) = \psi_i \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi[U_i] \cap f^{-1}[V]}$$

een samenstelling is van C^k-differentieerbare afbeeldingen en dus zelf C^k-differentieerbaar. Omdat dit geldt voor elke $x \in U \cap f^{-1}[V]$ volgt hieruit dat de samenstelling $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap f^{-1}[V])}$ C^k-differentieerbaar is. □

In de definitie van differentieerbaarheid hoeft niet geëist te worden dat een afbeelding continu is. Dit volgt namelijk uit het feit dat de afbeelding differentieerbaar is, zoals men aan de hand van Propositie B.2 zou verwachten.

Lemma B.18. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ twee C^k-$\mathcal{A}$-manifolds en zij $f : M \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding. Dan is f een continue afbeelding.*

Bewijs. We merken op dat f continu is als er voor elke $x \in M$ een omgeving is waarop f continu is. Voor iedere $x \in M$ zijn er kaarten $(U, \varphi, X) \in \mathcal{A}_M$ en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_N$ met $x \in U$ en $f(x) \in V$ zodanig dat de samenstelling $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : X \to Y$ C^k-differentieerbaar is. We merken op dat hieruit volgt dat $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ continu is, omdat differentieerbare functies continu zijn. Nu merken we op dat $f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ een samenstelling is van continue afbeeldingen en dus is $f|_U$ continu. Omdat er voor elke $x \in M$ een omgeving is waarop f continu is, is f continu. □

Ook andere resultaten uit Propositie B.2 laten zich vertalen naar C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeeldingen. Zo vormen de samenstellingen van C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeeldingen ook een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding geeft.

Lemma B.19. *Zij $(L, \mathcal{A}_L)$, $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ drie C^k-$\mathcal{A}$-manifolds en zij $f : L \to M$ en $g : M \to N$ twee C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeeldingen. Dan is de samenstelling $g \circ f : L \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding.*

Bewijs. We dienen te bewijzen dat er voor elke $x \in L$ kaarten (U, φ, X) en (V, ψ, Y) bestaan zodanig dat de samenstelling $\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ C^k-differentieerbaar is.

Voor $x \in L$ geldt dat er voor $f(x) \in M$ er kaarten $(W, \vartheta, Z) \in \mathcal{A}_M$ en $(V, \psi, Y) \in \mathcal{A}_M$ zijn met $f(x) \in W$ en $g(f(x)) \in V$ zodanig dat $\psi \circ g \circ \vartheta^{-1} : Z \to Y$ C^k-differentieerbaar is. Vanwege de continuïteit van f is $f^{-1}(U_M)$ een open omgeving van $x \in L$. Omdat f differentieerbaar is volgt nu uit Lemma B.17 dat er een kaart (U, φ, X) is met $x \in U$ en $U \subset f^{-1}(U_M)$ zodanig dat $\vartheta \circ f \circ \varphi^{-1} : X \to Z$ C^k-differentieerbaar is. De samenstelling van twee C^k-differentieerbare afbeeldingen is C^k-differentieerbaar, dus we vinden dat

$$(\psi \circ g \circ \vartheta^{-1}) \circ (\vartheta \circ f \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$$

C^k-differentieerbaar is. Omdat dit geldt voor iedere $x \in L$ concluderen we dat de samenstelling $g \circ f : L \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding is. $\square$

Een beperking van een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding $f : M \to N$ tot een deelmanifold U van M geeft op de verwachte wijze een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding van deze deelmanifold U naar de manifold N.

Lemma B.20. *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ twee C^k-$\mathcal{A}$-manifolds, zij $U \subset M$ een open deelverzameling en zij $f : M \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding. Dan is de restrictie $f|_U : U \to N$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding.*

Bewijs. We merken allereerst op dat de afbeelding $f|_U : U \to N$ welgedefinieerd is als afbeelding en dat $(U, \mathcal{A}_M|_U)$ een $\mathcal{A}$-manifold is vanwege Lemma B.13. We merken op dat voor elke $x \in U$ geldt dat er een $(U_i, \varphi, X_i) \in \mathcal{A}_M$ en $(V_i, \psi, Y_i) \in \mathcal{A}_N$ bestaat met $x \in U_i$ en $f(x) \in V_i$ zodanig dat $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ C^k-differentieerbaar is. Verder is duidelijk dat $(U_i \cap U, \varphi|_U, \mathrm{Im}(\varphi|_U)) \in \mathcal{A}_M$ en er geldt dat $x \in U_i \cap U \subset U$. Gevolg B.14 geeft nu dat $(U_i \cap U, \varphi|_U, \mathrm{Im}(\varphi|_U)) \in \mathcal{A}_M|_U$ en er geldt dat $\psi \circ f|_U \circ \varphi|_U^{-1}$ C^k-differentieerbaar is. We concluderen dat er voor elke $x \in U$ een kaart $(U_i, \varphi, X_i) \in \mathcal{A}_M|_U$ bestaat zodanig dat $\psi \circ f \circ \varphi|_U^{-1}$ C^k-differentieerbaar is. En dus is $f|_U$ een C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbare afbeelding. $\square$

In $\mathbb{R}^n$ hebben we diffeomorfismen gedefinieerd. Deze definitie laat zich vertalen naar C^k-$\mathcal{A}$-manifolds.

Definitie B.21 (John M. Lee 2013, p38)**.** *Zij $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ twee C^k-$\mathcal{A}$-manifolds en zij $f : M \to N$ een bijectieve afbeelding. We zeggen dat f een **C^k-$\mathcal{A}$-diffeomorfisme** is, als zowel f als f^{-1} C^k-$\mathcal{A}$-differentieerbaar zijn. Als er een f bestaat met deze eigenschap noemen we $(M, \mathcal{A}_M)$ en $(N, \mathcal{A}_N)$ **C^k-$\mathcal{A}$-diffeomorf**.*

We merken op dat als f en f^{-1} differentieerbaar zijn, dat ze continu zijn vanwege Lemma B.18. Vandaar dat een C^k-$\mathcal{A}$-diffeomorfisme in het bijzonder een homeomorfisme is.

Uit de bovenstaande resultaten volgt dat C^k-$\mathcal{A}$-manifolds met de bijbehorende morfismen een categorie vormen. De isomorfismen tussen $\mathcal{A}$-manifolds zijn de diffeomorfismen.

C Lokaal geringde ruimten en raakruimten via de ring van duale getallen

In deze bijlage staat nog een derde definitie van raakruimte via lokaal geringde ruimten. Omdat het eindproject al aan de lange kant was, hebben we ze hier een plek gegeven.

C.1 Lokaal geringde ruimten

Definitie C.1. *Een* ***lokale ring*** *is een ring R met een uniek maximaal ideaal $\mathfrak{M}_R \subset R$. Een* ***lokaal ringhomomorfisme*** *tussen lokale ringen R en S is een ringhomomorfisme $f : R \to S$ met $f(\mathfrak{M}_R) \subset \mathfrak{M}_S$.*

Definitie C.2 (Stacks project authors 2019, Def I.6.21.7)**.** *Zij $f : X \to Y$ een continue afbeelding, $\mathcal{F}$ een schoof op X en $\mathcal{G}$ een schoof op Y. Een* ***f-map*** *$f^\# : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ is een collectie van afbeeldingen $f^\#_V : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(f^{-1}V)$ met de indexverzameling van alle open $V \subset Y$ zodanig dat voor alle open $V' \subset V \subset Y$ het diagram*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{f^\#_V} & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_{\mathcal{G}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_{\mathcal{F}}} \\ \mathcal{G}(V') & \xrightarrow{f^\#_{V'}} & \mathcal{F}(f^{-1}(V')) \end{array}$$

commuteert.

Definitie C.3 (Stacks project authors 2019, Def I.6.25.1)**.** *Een* ***geringde ruimte*** *is een paar $(X, \mathcal{O}_X)$ met X een topologische ruimte en $\mathcal{O}_X$ een schoof van ringen op X. Een* ***morfisme van geringde ruimten*** *$(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ is een paar $(f, f^\#)$ met $f : X \to Y$ een continue afbeelding en $f^\# : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ een f-map van ringhomomorfismen.*

Lemma C.4. *Elke C^k-manifold $(M, \mathcal{F}_M)$ is een geringde ruimte en iedere C^k-differentieerbare afbeelding tussen twee C^k-manifolds induceert een morfisme van geringde ruimten.*

Bewijs. We merken op dat iedere manifold $(M, \mathcal{F}_M)$ een topologische ruimte is met een schoof van $\mathbb{R}$-algebra's en dus in het bijzonder een schoof van ringen.

Zij nu $f : (M, \mathcal{F}_M) \to (N, \mathcal{F}_N)$ een C^k-differentieerbare afbeelding. Dan is f een continue afbeelding. Verder induceert f voor iedere $V \subset N$ afbeelding $f^\# : \mathcal{F}_N(V) \to \mathcal{F}_M(f^{-1}(V))$ door $f^\#(\varphi) = \varphi \circ f$. Deze afbeelding is goed gedefinieerd per definitie van een C^k-differentieerbare afbeelding. Tevens is duidelijk dat deze $f^\#$ een f-map is omdat voor de restrictie afbeeldingen geldt dat $(\varphi \circ f)|_{V'} = \varphi \circ (f|_{V'})$. Hiermee wordt $(f, f^\#)$ een morfisme van geringde ruimten. □

Definitie C.5 (Stacks project authors 2019, Def I.25.2.1)**.** *Een* ***lokaal geringde ruimte*** *$(X, \mathcal{O}_X)$ is een geringde ruimte waarvan elke stalk een locale ring is. Een* ***morfisme van lokaal geringde ruimten*** *is een morfisme van geringde ruimten $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zodanig dat voor elke $x \in X$ de geinduceerde ringhomomorfisme $\mathcal{O}_{Y,f(y)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ een lokale ringhomomorfisme is, waarbij $\mathcal{O}_{X,x}$ resp. $\mathcal{O}_{Y,f(y)}$ de stalken zijn op de punten x resp. $f(x)$ (zie definitie 2.7).*

De categorie van lokaal geringde ruimten duiden we aan met **LRS**.

Definitie C.6 (Stacks project authors 2019, Def I.25.2.1)**.** *Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een lokaal geringde ruimte. We noemen $\mathcal{O}_{X,x}$ de* ***lokale ring van X op x****. We schrijven $\mathfrak{M}_{X,x}$ of $\mathfrak{M}_x$ voor het maximale ideaal van $\mathcal{O}_{X,x}$. We noemen $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x$ het* ***residu-lichaam van X op x****.*

Lemma C.7. *Elke C^k-manifold $(M, \mathcal{F}_M)$ is een lokaal geringde ruimte en iedere C^k-differentieerbare afbeelding tussen twee C^k-manifolds induceert een morfisme van lokaal geringde ruimten.*

Bewijs. Vanwege Lemma 2.10 is iedere $\mathcal{F}_{M,x}$ een lokale ring en daarmee is elke manifold een lokaal geringde ruimte. Voor het geinduceerde ringhomomorfisme $f^\# : \mathcal{F}_{N,f(p)} \to \mathcal{F}_{M,p}$ geldt voor $[(U,s)] \in \mathfrak{M}_{N,f(p)}$ dat $f^\#[(U,s)] = [(f^{-1}(U), s \circ f)]$. Als we nu $f^\#[(U,s)]$ evalueren op het punt p zien we dat $f^\#[(U,s)](p) = s \circ f(p) = s(f(p)) = 0$ en dus geldt $f^\#[(U,s)] \in \mathfrak{M}_{M,p}$. We concluderen dat $f^\#(\mathfrak{M}_{N,f(p)}) \subset \mathfrak{M}_{M,p}$ en hiermee is $f^\#$ een lokaal ringhomomorfisme. □

C.2 Raakruimte via de ring van duale getallen

Definitie C.8. *De **ring van duale getallen** is de lokale ring* $\mathbb{R}[t]/t^2$.

Lemma C.9. *We definiëren de ruimte $(D, \mathcal{O})$ waarbij D een eenpuntsruimte is en de schoof $\mathcal{O}$ de verzameling $\mathcal{O}(D) = \mathbb{R}[t]/t^2$ toewijst. Dan is deze ruimte een lokaal geringde ruimte.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $(D, \mathcal{O})$ een geringde ruimte is. We merken verder op dat D discreet is en daarom de stalk $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}(D) = \mathbb{R}[t]/t^2$. Dit is een lokale ring en aangezien dit het enige punt is van D is dit een lokaal geringde ruimte. □

Definitie C.10. *Zij $(M, \mathcal{F}_M)$ een C^∞-manifold. Dan is de verzameling*

$$T_pM_{\mathrm{Dg}} := \big\{(f, f^\#) \mid f(D) = p\big\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}\big((D, \mathcal{O}), (M, \mathcal{F}_M)\big)$$

de raakruimte van M op p.

Lemma C.11. *Er is een natuurlijke bijectie tussen T_pM_{Dg} en T_pM_{Cot}.*

Bewijs. Bekijk $f^\# : \mathcal{F}_M \to \mathcal{O}$. Omdat $f(D) = p$ geldt voor alle $\varphi \in \mathcal{F}_M(V)$ met $p \notin V \subset M$ dat $f^\#(\varphi) = \{0\}$, want $f^{-1}(V) = \emptyset$. Voor $\varphi \in \mathcal{F}_M(V)$ met $p \in V \subset M$ geldt $f^\#(\varphi) \in \mathcal{O}(D)$. Omdat we willen dat $f^\#$ een f-map is moet deze compatibel zijn met de restrictieafbeelding. Hieruit volgt dat $f^\#$ gedefinieerd wordt door de geïnduceerde afbeelding $f^\# : \mathcal{F}_{M,p} \to \mathcal{O}_D$.

De eis voor deze geïnduceerde afbeelding is dat het een lokaal ringhomomorfisme. Hieruit volgt voor $1 \in \mathcal{F}_{M,p}$ dat $f^\#(1) = 1 \in \mathcal{O}_D = \mathbb{R}[t]/t^2$. Ook geldt er dat $f^\#(\mathfrak{M}_p) \subset \mathfrak{M}_D$. Dus voor iedere $[(V,\varphi)] \in \mathcal{F}_{M,p}$ geldt $f^\#([(V,\varphi)]) = \varphi(p) + h([(V,\varphi)])t \in \mathbb{R}[t]/t^2$ met $h : \mathcal{F}_{M,p} \to \mathbb{R}$ en $h(1) = 0$.

We bekijken nu deze $h : \mathcal{F}_{M,p} \to \mathbb{R}$. We merken op dat deze h een lineaire afbeelding moet zijn omdat f een ringhomomorfisme is: Zij $[(V,\varphi)], [(W,\psi)] \in \mathcal{F}_{M,p}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan moet gelden dat

$$\begin{aligned}
\varphi(p) + h([(V,\varphi)]) + \psi(p) + h([(W,\psi)]) &= f^\#([(V,\varphi)]) + f^\#([(W,\psi)]) \\
&= f^\#([(V,\varphi)] + [(W,\psi)]) \\
&= (\varphi + \psi)(p) + h([(V,\varphi)] + [(W,\psi)]); \\
\lambda(\varphi(p) + h([(V,\varphi)])) = \lambda f^\#([(V,\varphi)]) &= f^\#(\lambda[(V,\varphi)]) = \lambda\varphi(p) + h(\lambda[(V,\varphi)]))
\end{aligned}$$

Hieruit volgt de lineariteit van h.

Verder geldt dat $\mathcal{F}_{M,p}$ als $\mathbb{R}$-vectorruimte wordt voortgebracht door $\langle 1, \mathfrak{M}_p\rangle$. Deze h correspondeert daarom met een unieke lineaire afbeelding $h^* : \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}$, zodat $h|_{\mathfrak{M}_p} = h^*$. En omdat $h(1) = 0$ staat vervolgens de afbeelding f vast.

We claimen nu dat voor deze afbeelding h^* geldt dat $h^*([(V,\varphi)]) = 0$ voor $[(V,\varphi)] \in \mathfrak{M}_p^2$. Want voor $[(V,\varphi_1)], [(V,\varphi_2)] \in \mathfrak{M}_p$ geldt dat

$$\begin{aligned}
h\big([(V,\varphi_1)][(V,\varphi_2)]\big)t &= f\big([(V,\varphi_1)][(V,\varphi_2)]\big) = f\big([(V,\varphi_1)]\big)f\big([(V,\varphi_2)]\big) \\
&= h\big([(V,\varphi_1)]\big)t \cdot h\big([(V,\varphi_2)]\big)t = h\big([(V,\varphi_1)]\big) \cdot h\big([(V,\varphi_2)]\big)t^2 = 0
\end{aligned}$$

Kortom h^* induceert een afbeelding $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left({}^{\mathfrak{M}_p}\!/_{\mathfrak{M}_p^2}, \mathbb{R}\right)$ zodat $h^* = g \circ q$ met $q : \mathfrak{M}_p \to \mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ de quotientafbeelding.

Dus voor elke $f^{\#}$ is er een unieke $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left({\mathfrak{M}_p}/{\mathfrak{M}_p^2}, \mathbb{R}\right)$ zodat $f^{\#}([(V,\varphi)]) = \varphi(p) + g^*([(V,\varphi)])t$ met $g^* : \mathcal{F}_{M,p} \to \mathbb{R}$ de unieke uitbreiding van g zodat $g^*(1) = 0$ en $g^*([(V,\varphi)]) = 0$. We merken op dat deze correspondentie één op één is, omdat elke g inderdaad een wel-gedefinieerde afbeelding geeft. $\square$

Gevolg C.12. *T_pM_{Dg} kan op een natuurlijke manier voorzien worden van een $\mathbb{R}$-vectorruimte structuur.*

Referenties

[Bro12] L.E.J. Brouwer. „Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets." In: *Mathematische Annalen* 71 (1912), p. 305–313. URL: `http://eudml.org/doc/158534`.

[Fol] G.B. Folland. *Higher-Order Derivatives and Taylor's Formula in Several Variables.* URL: `https://sites.math.washington.edu/~folland/Math425/taylor2.pdf`.

[Har09] R. Hartshorne. *Deformation Theory.* Deel 257. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2009. ISBN: 9781441916136.

[Hol16] David Holmes. *Lecture 4: Adjunction, Yoneda and (co)limits.* 2016. URL: `http://pub.math.leidenuniv.nl/~holmesdst//teaching/2016-2017/Intensive_Course_lecture4.pdf`.

[Lee09] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and differential geometry.* Deel 107. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. ISBN: 978-0-8218-4815-9. DOI: `10.1090/gsm/107`. URL: `https://doi.org/10.1090/gsm/107`.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Deel 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013. ISBN: 978-1-4419-9981-8.

[Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician.* Deel 5. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1971.

[Nar82] M.S. Narasimhan. „Deformations of Complex Structures and Holomorphic Vector Bundles". In: *Complex Analysis: Proceedings of the Summer School.* Red. door J. Eells. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1982.

[NS03] Juan A. Navarro González en Juan B. Sancho de Salas. *C^∞-differentiable spaces.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. ISBN: 3-540-20072-X. DOI: `10.1007/b13465`. URL: `https://doi.org/10.1007/b13465`.

[Ram05] S. Ramanan. *Global calculus.* Deel 65. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. ISBN: 0-8218-3702-8.

[Sta19] The Stacks project authors. *The Stacks project.* `https://stacks.math.columbia.edu`. 2019.

[Ste12] Peter Stevenhagen. *Algebra 3.* Universiteit Leiden, TU Delft, 2012.