S. Wolters

De stelling van de Rham via cohomologie van schoven

Bachelorscriptie

18 augustus 2019

Scriptiebegeleider: Dr. R.S. de Jong

Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Inhoudsopgave

Inleiding **2**

1 Homologie en cohomologie **3**
1.1 Complexen en homologie . . . 3
1.2 Cocomplexen en cohomologie . . . 4
1.3 Universele coëfficiëntstelling . . . 5

2 Singuliere cohomologie **7**

3 De Rham-cohomologie **10**

4 Schoven **11**
4.1 Preschoven en schoven . . . 11
4.2 Staken . . . 14

5 Afgeleide functoren **18**
5.1 Abelse categorieën . . . 18
5.2 Cocomplexen en resoluties . . . 21
5.3 De Rham-resolutie en singuliere resolutie . . . 22
5.4 Injectieve resoluties . . . 24
5.5 Afgeleide functoren . . . 25

6 Schovencohomologie **29**
6.1 Schovencohomologie . . . 29
6.2 Acyclische schoven . . . 30

7 De stelling van de Rham **32**

8 Discussie **33**

Referenties **35**

Inleiding

Georges de Rham bewees in 1931 dat voor een gladde variëteit X en $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat de singuliere cohomologievectorruimte $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ en de de Rham-cohomologievectorruimte $H^k_{dR}(X)$ isomorf aan elkaar zijn.[OR] Dit is een verrassend resultaat; zo zien we dat gedrag van k-vormen, wat 'differentieerbare' objecten zijn, wordt bepaald door zuiver topologische eigenschappen van de onderliggende variëteit. Wij zullen dit resultaat, ook wel de stelling van de Rham genoemd, in deze scriptie bewijzen door gebruik te maken van schovencohomologie. Dit is echter niet de wijze waarop de stelling origineel door Georges de Rham bewezen werd. De theorie van schoven vindt immers haar oorsprong gedurende de Tweede Wereldoorlog, waarbij ik de lezer hopelijk niet verras met het feit dat deze na 1931 plaatsvond, in de gedachten van Jean Leray en het duurde hierna nog enige tijd voordat de schoventheorie de vorm kreeg zoals die in deze scriptie zal worden gehanteerd.[Mil00] Naast het bewijzen van de stelling van de Rham heeft deze scriptie als doel de lezer gaandeweg vertrouwd te maken met de geïntroduceerde machinerie van o.a schoven en abelse categorieën.

De eerste drie hoofdstukken dienen ter introductie van de objecten waar in de stelling van de Rham over gesproken wordt; de singuliere cohomologie en de de Rham-cohomologie. In hoofdstuk 1 introduceren we de algemene theorie van complexen met bijbehorende homologie en van cocomplexen met bijbehorende cohomologie. Hierna bespreken we de universele coëfficiëntstelling waarin een verband wordt gelegd tussen homologie en cohomologie. Na de algemene behandeling van homologie en cohomologie, introduceren we in hoofdstuk 2 de singuliere homologie en de singuliere cohomologie behorend bij een topologische ruimte X. In hoofstuk 3 worden de de Rham-cohomologievectorruimten kort belicht. Er wordt echter vanuit gegaan dat de lezer al enigszins bekend is met differentiaalvormen en alleen de eigenschappen van variëteiten die gebruikt worden in de hierop volgende hoofdstukken zullen worden toegelicht.

Degenen die al bekend zijn met zowel de singuliere cohomologie als de de Rham-cohomologie, kunnen de eerste drie hoofdstukken overslaan en meteen beginnen aan hoofdstuk 4. In dit hoofdstuk worden schoven vrij uitgebreid behandeld, aangezien er geen enkele bekendheid van de lezer met deze stof wordt verondersteld. In hoofdstuk 5 geven we een snelle inleiding in de zogenaamde abelse categorieën. Vervolgens generaliseren we de theorie van cocomplexen in deze abelse categorieën en behandelen we het begrip resolutie. Om een terugkoppeling naar de stelling van de Rham te maken, kijken we in hoofdstuk 5 ook naar twee resoluties die met ons einddoel te maken hebben; de de Rham-resolutie en de singuliere resolutie. Vervolgens introduceren we de afgeleide functoren behorend bij een abelse categorie C met voldoende injectieve objecten en een links-exacte functor $C \xrightarrow{F} C'$. Vrees echter niet, de termen "links exacte functor" en "genoeg injectieve objecten"zullen worden toegelicht. De categorie van schoven van $\mathcal{A}$-modulen blijkt ook een abelse categorie met voldoende injectieve objecten te vormen en zodoende kijken we in hoofdstuk 6 naar een specifiek geval van de afgeleide functoren; namelijk de schovencohomologie. Met behulp van deze schovencohomologie bewijzen we in hoofdstuk 7 de stelling van de Rham. Tot slot zullen we in de discussie consequenties van de stelling van de Rham bespreken en ons bewijs van de stelling vergelijken met een meer klassiek bewijs.

1 Homologie en cohomologie

In dit hoofdstuk introduceren we kort complexen met bijbehorende homologie en cocomplexen met bijbehorende cohomologie. Deze theorie zal gebruikt worden wanneer we in hoofdstuk 2 en 3 naar de specifieke complexen en cocomplexen gaan kijken die gerelateerd zijn aan de stelling van de Rham.

1.1 Complexen en homologie

We beginnen met het introduceren van complexen van abelse groepen.

Definitie 1.1.1. *Comp* is de categorie van complexen van abelse groepen en bestaat uit:

- Objecten: ***Een complex van abelse groepen*** is een rij $C_\bullet = (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ van abelse groepen met bijbehorende groepshomomorfismen $C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}$ zodat $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.
- Morfismen: $\phi \in Mor_{Comp}(C_\bullet, D_\bullet)$ is een rij $\phi = (\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ van groepshomomorfismen $C_k \xrightarrow{\phi_k} D_k$ zodat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} C_k \arrow[r, "\phi_k"] \arrow[d, "\partial_k"] & D_k \arrow[d, "\partial_k"] \\ C_{k-1} \arrow[r, "\phi_{k-1}"] & D_{k-1} \end{tikzcd}$$

Een voorbeeld van een complex stellen we uit tot na de constructie van functoren die nauw verbonden zijn met de categorie van complexen. Hiertoe kijken we eerst naar de volgende definitie.

Definitie 1.1.2. Gegeven $C_\bullet$ in *Comp* en $k \in \mathbb{Z}$ spreekt men van:

- $Z_k(C_\bullet) \coloneqq ker\, \partial_k$, ***de cykels van graad k***.
- $B_k(C_\bullet) \coloneqq Im\, \partial_{k+1}$, ***de randen van graad k***.

Merk op dat $Z_k(C_\bullet)$ en $B_k(C_\bullet)$ beide abelse groepen zijn als respectievelijk kern en beeld van een groepshomomorfisme. Ook zien we dat $Z_k(C_\bullet) \supset B_k(C_\bullet)$, aangezien $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 1.1.3. We noemen de groep

$$H_k(C_\bullet) \coloneqq Z_k(C_\bullet)/B_k(C_\bullet)$$

de k-de homologiegroep van het complex $C_\bullet$.

Het blijkt dat een morfisme van complexen aanleiding geeft tot een morfisme op de homologie-objecten. We zien immers aan het commutatief diagram behorend bij een morfisme $\phi : C_\bullet \to D_\bullet$ van complexen dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\phi_k(Z_k(C_\bullet)) \subset Z_k(D_\bullet)$$

en dat

$$\phi_k(B_k(C_\bullet)) \subset B_k(D_\bullet),$$

ofwel we krijgen een geïnduceerd morfisme

$$H_k(\phi) : H_k(C_\bullet) \to H_k(D_\bullet)$$

op de homologie-objecten.

Samenvattend verkrijgen we voor alle $k \in \mathbb{Z}$ een functor $H_k : Comp \to Ab$ van de categorie van complexen van abelse groepen naar de categorie van abelse groepen. Dan is het nu tijd voor het beloofde voorbeeld.

Voorbeeld 1.1.4. We kijken naar het complex

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0.$$

We nummeren onze objecten door de nulgroep links C_5 te noemen (en $C_k = 0$ voor $k > 4$ en $k < 0$). Dit geeft $H_1(C_\bullet) = \mathbb{Z}$, $H_2(C_\bullet) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $H_3(C_\bullet) = 0$ en $H_4(C_\bullet) = \mathbb{Z}$.

Het volgende lemma wordt veel gebruikt in de context van complexen en wordt ook wel het Zig-Zag lemma genoemd.

Lemma 1.1.5. *Voor een korte exacte rij van complexen*

$$0 \to B_\bullet \xrightarrow{\phi} C_\bullet \xrightarrow{\psi} D_\bullet \to 0,$$

ofwel een rij waar voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$0 \to B_k \xrightarrow{\phi_k} C_k \xrightarrow{\psi_k} D_k \to 0$$

een korte exacte rij is, krijgen we een bijbehorende lange exacte rij

$$\dots H^k(B_\bullet) \to H^k(C_\bullet) \to H^k(D_\bullet) \to H^{k-1}(B_\bullet) \to H^{k-1}(C_\bullet) \to H^{k-1}(D_\bullet) \to \dots$$

op de homologie-objecten.

Het bewijs van dit lemma laten we achterwege en kan (door de enthousiasteling) gevonden worden in hoofdstuk 2.1 van [Hat02]. Merk op dat alle constructies die hierboven zijn gedaan ook zinvol zijn voor linker R-modulen en zoals zal blijken in hoofdstuk 5 zelfs voor abelse categorieën. In het vervolg zullen we bij het noemen van modulen verwijzen naar linker R-modulen. Overigens is dit slechts voor het gemak en kan men onze contructies ook voor rechter R-modulen maken.

1.2 Cocomplexen en cohomologie

We bespreken nu kort cocomplexen en de bijbehorende cohomologie. In feite zijn cocomplexen complexen van abelse groepen waar de objecten van het complex anders worden genummerd. Voor onze doeleinden is het echter overzichtelijk de cocomplexen als een aparte categorie te behandelen.

Definitie 1.2.1. ***Cocomp*** is de categorie van cocomplexen van abelse groepen en bestaat uit:

- Objecten: ***Een cocomplex van abelse groepen*** is een rij $C^\bullet = (C^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ van abelse groepen met bijbehorende groepshomomorfismen $C^k \xrightarrow{\delta^k} C^{k+1}$ zodat $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$.

- Morfismen: $\phi \in Mor_{Cocomp}(C^\bullet, D^\bullet)$ is een rij $\phi = (\phi^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ van groepshomomorfismen $C^k \xrightarrow{\phi^k} D^k$ zodat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} C^{k+1} \arrow[r, "\phi^{k+1}"] & D^{k+1} \\ C^k \arrow[u, "\delta^k"] \arrow[r, "\phi^k"] & D^k \arrow[u, "\delta^k"] \end{tikzcd}$$

Wegens gelijke observaties als in 1.1 krijgen we nu de volgende definities.

Definitie 1.2.2. Gegeven $C^\bullet$ in *Cocomp* spreekt men van:

- $Z^k(C^\bullet) \coloneqq ker\,\delta^k$, ***de cocykels van graad k***.
- $B^k(C^\bullet) \coloneqq Im\,\delta^{k-1}$, ***de coranden van graad k***.

Definitie 1.2.3. We noemen de groep

$$H^k(C^\bullet) \coloneqq Z^k(C^\bullet)/B^k(C^\bullet)$$

de k-de cohomologiegroep van het cocomplex $C^\bullet$.

Eveneens induceert een morfisme $C^\bullet \xrightarrow{\phi} D^\bullet$ van cocomplexen voor alle $k \in \mathbb{Z}$ morfismen

$$H^k(\phi) : H^k(C^\bullet) \to H^k(D^\bullet)$$

en krijgen we voor alle $k \in \mathbb{Z}$ een functor $H^k : Cocomp \to Ab$.

We zullen nu een functor van de categorie van complexen naar de categorie van cocomplexen van abelse groepen maken. Laat M een abelse groep zijn, dan hebben we de contravariante functor

$$Hom(-, M) : Ab \to Ab$$

voor A in Ab gegeven door $A \mapsto Hom(A, M)$ en voor $A \xrightarrow{\phi} B$ een homomorfisme tussen abelse groepen gegeven door $\phi \mapsto (f \mapsto f \circ \phi)$. Deze functor kunnen we uitbreiden naar een contravariante functor

$$Hom(-, M) : Comp \to Cocomp$$

door de functor van abelse groepen per groep C_k en per morfisme d_k van het complex toe te passen. Hierbij noemen we de groep M het ***coëfficiënt*** van zowel de functor als van het verkregen cocomplex.

Voorbeeld 1.2.4. Dit is een direct vervolg van voorbeeld 1.1.4. We passen de functor $Hom(-, \mathbb{Z})$ toe op het complex van voorbeeld 1.1.4 en krijgen het cocomplex

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{n} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

met bijbehorende cohomologiegroepen $H^1(C_\bullet, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^2(C_\bullet, \mathbb{Z}) = 0$, $H^3(C_\bullet, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $H^4(C_\bullet, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Hier is het coëfficiënt van de functor ook aangegeven in de verkregen cohomologiegroepen.

Merk op dat we de constructies in deze paragraaf wederom zonder problemen kunnen generaliseren naar het geval van R-modulen. In het vervolg zullen we dan ook algemeen spreken over cocomplexen van R-modulen.

1.3 Universele coëfficiëntstelling

De constructies van de voorgaande paragrafen laten zich samenvatten in het volgende diagram van functoren, waar M een R-Moduul is en $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} Comp & \xrightarrow{H_k} & {}_R Mod \\ \downarrow{\scriptstyle Hom(-,M)} & & \\ CoComp & \xrightarrow{H^k} & {}_R Mod \end{array}$$

De vraag is nu hoe gegeven een complex $C_\bullet$, $H_k(C_\bullet)$ zich verhoudt tot $H^k(C_\bullet, M)$. Een eerste hoop zou wellicht zijn dat $H^k(C_\bullet, M) = Hom(H_k(C_\bullet), M)$ waar M het moduul is dat als coëfficiënt optreedt. Echter in voorbeeld 1.2.4 zien we dat

$$Hom(H_3(C_\bullet), \mathbb{Z}) = Hom(0, \mathbb{Z}) = 0 \neq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = H^3(C_\bullet, \mathbb{Z})$$

en dus dat de naïeve eerste poging geen stand houdt. Het correcte verband tussen beide objecten is iets ingewikkelder en wordt voor complexen van vrije R-modulen weergegeven in de volgende stelling.

Stelling 1.3.1. *(Universele coëfficiëntstelling) Voor $C_\bullet$ een complex van vrije $R-$modulen waar R een hoofdideaaldomein is, geldt dat de cohomologiemodulen $H^k(C_\bullet, M)$ worden bepaald door de volgende splitsende exacte rij:*

$$0 \to Ext_R(H_{k-1}(C_\bullet), M) \to H^k(C_\bullet, M) \to Hom_R(H_k(C_\bullet), M) \to 0.$$

We hebben het moduul $Ext_R(H_{n-1}, M)$ nog niet geïntroduceerd en zullen alleen de eigenschappen van het object noemen die we nodig hebben. Zo geldt voor abelse groepen H en G dat:

- $Ext(H, G) = 0$ als H vrij is.
- $Ext(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = G/nG$.

Op basis van deze twee eigenschappen kunnen de cohomologiegroepen $H^k(C_\bullet, \mathbb{Z})$ direct uit de homologiegroepen van voorbeeld 1.1.4 worden berekend.

Voorbeeld 1.3.2. Dit is een direct vervolg van voorbeeld 1.1.4. We krijgen via de universele coëfficiëntstelling de volgende berekeningen:

$$H^1(C, \mathbb{Z}) \cong Ext(0, \mathbb{Z}) \oplus Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$
$$H^2(C, \mathbb{Z}) \cong Ext(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0,$$
$$H^3(C, \mathbb{Z}) \cong Ext(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus Hom(0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$
$$H^4(C, \mathbb{Z}) \cong Ext(0, \mathbb{Z}) \oplus Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Dit zijn inderdaad dezelfde resultaten als in voorbeeld 1.2.4.

Voor modulen in het algemeen geldt ook dat $Ext(H, M) = 0$ als H een vrij moduul is. In deze gevallen reduceert het verband tussen $H_k(C_\bullet)$ en $H^k(C_\bullet)$ dus wel tot de naïeve eerste poging $H^k(C_\bullet) = Hom(H_k(C_\bullet), M)$. Wie meer wil weten over het bewijs van de stelling en Ext wordt verwezen naar hoofdstuk 3.1 van [Hat02].

2 Singuliere cohomologie

We zullen in deze sectie een snelle inleiding geven in de singuliere homologie en cohomologie behorend bij een topologische ruimte. De opbouw is gebaseerd op hoofdstuk 1 van [Loo10] en hoofdstuk van 2 [Hat02], voor voorbeelden en inzicht waar de singuliere homologie voor gebruikt kan worden, wordt tevens naar deze bronnen verwezen.

We beginnen met wat notatie; voor $p_0, p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}^n$ definiëren we

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] \coloneqq \{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i | \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \text{ voor alle } i\, \lambda_i \geq 0\}.$$

Hierbij zijn de e_i de standaardbasisvectoren. Met behulp van deze notatie introduceren we zogenaamde simplices.

Definitie 2.0.1. Voor $k \geq 0$ is het ***standaard k-simplex*** de verzameling van de vorm

$$\triangle^k \coloneqq [e_0, e_1, \dots, e_k] \subset \mathbb{R}^{k+1}.$$

We geven de deelruimtetopologie van $\mathbb{R}^{k+1}$ aan het standaard simplex $\triangle^k$ en krijgen de volgende definitie.

Definitie 2.0.2. Voor $k \geq 0$ is een ***singulier k-simplex*** van een ruimte X een continue afbeelding $\sigma : \triangle^k \to X$.

We noteren de verzameling van alle singuliere k-simplices van X als $\Sigma_k(X)$ en krijgen nu de volgende vectorruimten.

Definitie 2.0.3. Voor $k \geq 0$ zijn ***singuliere k-ketens*** over X elementen van het vrije $\mathbb{R}$-moduul (een vectorruimte) over $\Sigma_k(X)$

$$C_k(X) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k(X)} \mathbb{R} \cdot \sigma.$$

Voor $k < 0$ wordt $C_k(X) = 0$ gekozen.

Naast het koppelen van vectorruimten aan een topologische ruimte, willen we continue afbeeldingen tussen topologische ruimten kunnen sturen naar $\mathbb{R}-$lineaire afbeeldingen tussen de bijbehorende vectorruimten.

Definitie 2.0.4. Voor $X \xrightarrow{f} Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten is

$$f_* : C_k(X) \to C_k(Y)$$

de lineaire afbeelding die voor $\sigma \in \Sigma_k(X)$ wordt gegeven door

$$\sigma \mapsto f \circ \sigma.$$

Men kan eenvoudig nagaan dat $f \mapsto f_*$ functorieel is, ofwel voor $k \in \mathbb{Z}$ hebben we nu een functor $C_k(-) : Top \to {}_{\mathbb{R}}Mod$. Om hier een functor naar $Comp$ van te maken, dienen we nog randafbeeldingen $\partial : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ te construeren. Hiertoe introduceren we voor $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^m$ het singuliere k-simplex $< p_0, p_1, \dots, p_k > \in \Sigma_k(\mathbb{R}^m)$ gegeven door

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i.$$

Merk op dat $Id_{\triangle^k} =< e_0, e_1, \dots, e_k >$. Op $Id_{\triangle^k}$ introduceren we de volgende bewerking:

$$\partial_k < e_0, e_1, \dots, e_k >= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i < e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k > \in C_{k-1}(\triangle^k),$$

waar $\hat{e}_i$ weggelaten wordt en dus $< e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k > \in \Sigma_{k-1}(\triangle^k)$. Als voorbeeld voor $k = 2$ zien we dat

$$\partial_2 < e_0, e_1, e_2 >=< e_1, e_2 > - < e_0, e_2 > + < e_0, e_1 > \in C_1(\triangle^2).$$

We kunnen deze bewerking als volgt uitbreiden.

Definitie 2.0.5. De afbeelding

$$\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$$

voor $k \in \mathbb{Z}$, is de lineaire afbeelding die voor $\sigma \in \Sigma_k(X)$ gegeven wordt door

$$\partial_k \sigma = \sigma_*(\partial_k < e_0, \dots, e_k >) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_* < e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k > .$$

Om na te gaan dat de vectorruimten $C_k(X)$ en ∂_k een complex vormen, dienen we te controleren dat $\partial \circ \partial = 0$. Allereerst zien we dat voor een continue afbeelding $X \xrightarrow{f} Y$ en voor $\sigma \in \Sigma_k(X)$ geldt dat

$$\partial(f_*\sigma) = \partial(f \circ \sigma) = (f \circ \sigma)_*(\partial < e_0, \dots, e_k >= f_*(\sigma_*(\partial < e_0, \dots, e_k >)) = f_*\partial\sigma \in C_{k-1}(Y).$$

Hieruit volgt dat $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$. We zien dus dat voor $\sigma \in \Sigma_k(X)$ geldt dat

$$\partial\partial(\sigma) = \partial\partial(\sigma_* < e_0, ..., e_k >) = \sigma_*(\partial\partial < e_0, ..., e_k >).$$

Tot slot zien we nu dat

$$\partial\partial < e_0, ..., e_k >= \partial \sum_{i=0}^{k} (-1)^i < e_1, ..., \hat{e}_i, ..., e_k >= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \partial < e_1, ..., \hat{e}_i, ..., e_k >=$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\sum_{j<i} < e_1, ..., \hat{e_j}, ..., \hat{e}_i, ..., e_k > + \sum_{i<j} < e_1, ..., \hat{e}_i, ..., \hat{e_j}, ..., e_k >)$$

$$= \sum_{0 \leq j < i \leq k} ((-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}) < e_1, ..., \hat{e}_j, ..., \hat{e}_i, ..., e_k >= 0.$$

Ofwel de $C_k(X)$ en lineaire afbeeldingen ∂_k vormen samen een complex $(C_\bullet(X), \partial)$. Aangezien voor een continue afbeelding $X \xrightarrow{f} Y$ geldt dat $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$, hebben we een functor $Top \to Comp$ verkregen.

Uit hoofdstuk 1 volgt nu direct dat we bijbehorende homologievectorruimten krijgen.

Definitie 2.0.6. Voor $k \in Z$ noemen we

$$H_{Sing,k}(X) \coloneqq H_k(C_\bullet(X))$$

de ***singuliere homologievectorruimten***.

Wanneer we $\mathbb{R}$ als het coëfficiënt nemen van de functor $Hom(-, \mathbb{R}) : Comp \to Cocomp$, krijgen we het cocomplex $(C^\bullet(X, \mathbb{R}), d)$ van ***singuliere coketens***, waar geldt dat $d^k = Hom(-, \mathbb{R})(\partial_{k+1})$. Tevens krijgen we de bij dit cocomplex behorende cohomologievectorruimten.

Definitie 2.0.7. Voor $k \in \mathbb{Z}$ noemen we

$$H^k_{Sing}(X) \coloneqq H^k(C_\bullet(X), \mathbb{R})$$

de ***singuliere cohomologievectorruimten***.

Wegens de universele coëfficiëntstelling en het feit dat de $H_{Sing,k}(X)$ $\mathbb{R}$-vectorruimten zijn volgt dat $H^k_{Sing}(X) = Hom_{\mathbb{R}}(H^k_{Sing}(X), \mathbb{R})$. We kijken naar een voorbeeld.

Voorbeeld 2.0.8. Laat $X = \{x\}$ de eenpuntsruimte zijn. We zien dat $\Sigma_k(X)$ een eenpuntsverzameling is en geven deze unieke afbeelding aan met

$$\sigma_k : \triangle^k \to X$$

Hieruit volgt dat $C_k(X) = \mathbb{R} \cdot \sigma_k$ voor $k \geq 0$. Voor $k > 0$ zien we dat

$$\partial_k \sigma_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_{k-1} = \begin{cases} \sigma_{k-1} & k \text{ is even} \\ 0 & k \text{ is oneven} \end{cases} .$$

We krijgen nu dus het volgende complex

$$\ldots \xrightarrow{id} \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \xrightarrow{id} \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \to 0.$$

Dit geeft

$$H_{sing,k}(X) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases},$$

waar ook de singuliere cohomologie uit volgt:

$$H^k_{sing}(X) = Hom(H_{sing,k}(X), \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}.$$

Aangezien $H_{Sing,k}$ een functor is, weten we dat homeomorfe topologische ruimten isomorfe singuliere cohomologievectorruimten hebben. Het blijkt echter dat voor een homotopie-equivalentie

$$X \xrightarrow{f} Y$$

tussen twee topologische ruimten, de afbeelding

$$H_{k,sing}(X) \xrightarrow{f_*} H_{k,sing}(Y)$$

voor alle $k \in \mathbb{Z}$ een isomorfisme is. Uit voorbeeld 2.0.8 volgen dus direct de singuliere homologie en de singuliere cohomologie voor een samentrekbare ruimte X.

3 De Rham-cohomologie

We introduceren kort de de Rham-cohomologie behorend bij een gladde variëteit X en zullen alleen die eigenschappen noemen die gebruikt zullen worden gedurende de scriptie. Voor achtergrondinformatie betreffende variëteiten wordt de lezer naar [Lee12] verwezen.

We beginnen met een voor ons belangrijke eigenschap van gladde variëteiten. Om deze eigenschap te introduceren hebben we eerst het volgende begrip nodig.

Definitie 3.0.1. Laat X een topologische ruimte zijn en laat $(U_i)_{i\in I}$ een open overdekking van X zijn. Een ***eenheidspartitie ondergeschikt aan de overdekking*** is een verzameling continue functies

$$f_i : X \to [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ voor } i \in I,$$

zodat

$$supp(f_i) := \overline{\{x \in X | \, f_i \neq 0\}} \subset U_i$$

(waar de lijn voor de topologische afsluiting staat) en voor alle $x \in X$

$$\sum_i f_i(x) = 1,$$

waarbij slechts eindig veel $f_i(x) \neq 0$.

Voor een gladde variëteit X en een open overdekking $(U_i)_{i\in I}$ van X geldt nu dat er een eenheidspartitie ondergeschikt aan deze overdekking is, waar de f_i van deze partitie $\mathcal{C}^\infty$ zijn.

Verder weten we dat we bij elke gladde variëteit voor $k \in \mathbb{N}_0$ een vectorbundel en tevens gladde variëteit $\Lambda^k T^* X \xrightarrow{\pi} X$ krijgen. We noemen continue afbeeldingen $X \xrightarrow{s} \Lambda^k T^* X$ waarvoor geldt dat $\pi \circ s = id_X$ ***secties*** over X en noteren de verzameling van $\mathcal{C}^\infty$ gladde secties als volgt:

$$\Omega^k(X) := \{X \xrightarrow{s} \Lambda^k T^* X | \, s \text{ is een } \mathcal{C}^\infty \text{ gladde sectie}\}.$$

Het blijkt dat $\Omega^k(X)$ een vectorruimte is en de elementen van $\Omega^k(X)$ worden ook wel de ***k-vormen*** over X genoemd. Voor $k < 0$ zeggen we dat $\Omega^k(X) = 0$ en aangezien $\Lambda^k T^* X = X \times \{0\}$ voor $k > dim(X)$, geldt ook dat $\Omega^k(X) = 0$ voor $k > dim(X)$. Voor het geval $k = 0$ zien we dat $\Lambda^0 T^* X = X \times \mathbb{R}$ en dus dat $\Omega^0(X) = \mathcal{C}^\infty_X$.

Voor $k \in \mathbb{N}_0$ hebben we de lineaire afbeeldingen

$$d^k : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X),$$

genaamd ***uitwendige afgeleiden***. De precieze eigenschappen die de uitwendige afgeleiden uniek karakteriseren, kan de lezer vinden in stelling 14.24 van [Lee12]. Voor ons is van belang dat voor de uitwendige afgeleiden geldt dat $d_{k+1} \circ d_k = 0$. Het cocomplex van vectorruimten $(\Omega^\bullet(X), d)$ dat zodoende verkregen wordt, wordt het ***de Rham-cocomplex*** genoemd.

Voor een differentieerbare afbeelding $X \xrightarrow{f} Y$ tussen twee variëteiten krijgen we een lineaire afbeelding $\Omega^k(Y) \xrightarrow{f^*} \Omega^k(X)$. Het blijkt dat $f \mapsto f^*$ aan de contravariante functoriële eigenschappen voldoet. Verder geldt dat $d \circ f^* = f^* \circ d$, ofwel we verkrijgen nu de contravariante functor

$$Var \to Cocomp$$

van gladde variëteiten naar cocomplexen van $\mathbb{R}$-vectorruimten. Voor $k \in \mathbb{N}_0$ worden de bijbehorende cohomologie-vectorruimten de ***de Rham-cohomologievectorruimten*** genoemd en genoteerd als

$$H^k_{dR}(X) := H^k(\Omega^\bullet(X)).$$

Verder is er nog wat extra terminologie verbonden aan het de Rham-cocomplex; zo noemen we de k-vormen in $Ker(\Omega^k(X) \xrightarrow{d^k} \Omega^{k+1}(X))$ ***gesloten*** (ofwel de cocykels van graad k) en de k-vormen in $Im(\Omega^{k-1}(X) \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega^k(X))$ ***exact*** (ofwel de coranden van graad k). We zien direct dat alle exacte vormen gesloten zijn. De vraag is nu juist wanneer gesloten k-vormen exact zijn, ofwel wanneer $H^k_{dR} = 0$. Zo hebben we bijvoorbeeld het volgende bekende lemma.

Lemma 3.0.2. *(lemma van Poincaré) Voor U een stervormige open van $\mathbb{R}^n$, geldt dat $H^k_{dR}(U) = 0$ voor $k > 0$.*

Voor het bewijs van dit lemma wordt de lezer naar stelling 1 van [Les19] verwezen. Zoals zal blijken is het geen toeval dat het exact zijn van gesloten vormen, bepaald wordt door een puur topologische conditie. Aangezien een variëteit X in het bijzonder ook een topologische ruimte is, hebben we ook de singuliere cohomologievectorruimten $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ behorend bij de ruimte X. Zou het niet mooi zijn als blijkt dat $H^k_{dR}(X)$ en $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ isomorf zijn? Dit is precies het resultaat waar wij de komende hoofdstukken naartoe zullen werken.

4 Schoven

In dit hoofdstuk introduceren we de taal van de schoven. Aangezien dit een introductie is waarbij geen verdere voorkennis wordt verondersteld, gaan we iets uitgebreider op het onderwerp in dan strikt noodzakelijk is voor het opbouwen van het bewijs van de stelling van de Rham. Dit in de hoop de lezer enige bekendheid met deze objecten te geven.

4.1 Preschoven en schoven

Definitie 4.1.1. Laat X een topologische ruimte zijn, dan is ***OpX*** de categorie van opens van X bestaande uit:

- Objecten: $U \subset X$ een open deelverzameling.
- Morfismen: de inclusies $V \subset U$, voor U en V open.

Definitie 4.1.2. Laat X een topologische ruimte zijn. Een ***preschoof*** is een contravariante functor van de categorie van opens van X naar de categorie van abelse groepen

$$F : OpX \to Ab.$$

Ofwel we hebben het volgende:

- Voor $U \subset X$ open hebben we een abelse groep $F(U)$.
- Voor $V \subset U$ een inclusie van opens hebben we een een groepshomomorfisme $Res_{U,V} : F(U) \to F(V)$, zodat aan het volgende wordt voldaan:
  - Voor $U \subset U$ geldt dat $Res_{U,U} = id_{F(U)}$.
  - Voor $W \subset V \subset U$ inclusies van opens geldt dat $Res_{V,W} \circ Res_{U,V} = Res_{U,W}$.

We noemen $s \in F(U)$ een ***sectie*** over U en noteren $Res_{U,V}(s)$ ook wel als $s|_V$.

Nu we de definitie van een preschoof hebben geïntroduceerd, is het tijd voor een voorbeeld. In het vervolg is X een topologische ruimte.

Voorbeeld 4.1.3. Voor A een abelse groep wordt ***de constante preschoof*** $A_{X,pre}$ voor $U \subset X$ open gegeven door

$$A_{X,pre}(U) = \begin{cases} A & U \neq \emptyset \\ 0 & U = \emptyset \end{cases},$$

waar 0 voor de triviale groep staat. Voor $V \subset U$ een inclusie van opens krijgen we

$$Res_{U,V} = \begin{cases} Id_A & V \neq \emptyset \\ 0 & V = \emptyset \end{cases}.$$

Hierbij staat 0 voor de nulafbeelding. Er is eenvoudig na te gaan dat $Res_{U,U} = id_{A_{X,pre}(U)}$ en dat voor $W \subset V \subset U$ inclusies van opens geldt dat $Res_{V,W} \circ Res_{U,V} = Res_{U,W}$.

Definitie 4.1.4. Laat X een topologische ruimte zijn. Een **schoof** is een preschoof $F : OpX \to Ab$ die aan de volgende voorwaarden voldoet:

Laat $U \subset X$ open zijn en laat $(U_i)_{i \in I}$ een open overdekking van U zijn.

- Als voor $s, t \in F(U)$ geldt dat voor alle i $s|_{U_i} = t|_{U_i}$, dan geldt dat $s = t$. (***Lokaliteitseis***)
- Als we voor alle i een sectie $s_i \in U_i$ hebben zodat voor alle paren U_i en U_j geldt dat $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, dan is er een $s \in F(U)$ zodat voor alle i geldt dat $s|_{U_i} = s_i$. (***Plakeigenschap***)

Merk op: Uit de lokaliteitseis volgt dat de sectie $s \in F(U)$, verkregen via de plakeigenschap, uniek is.

Men kan de eigenschappen van een schoof samenvatten in de leuze ”secties die lokaal overlappen, kunnen uniek worden geplakt tot een globale sectie”. We zullen nu wat voorbeelden van schoven bespreken.

Voorbeeld 4.1.5. De nulschoof, 0, kent aan alle verzamelingen de triviale groep toe en voor elke restrictie-afbeelding wordt de nulafbeelding genomen.

Voorbeeld 4.1.6. Voor A een abelse groep met de discrete topologie wordt ***de constante schoof*** A_X gegeven door aan $U \subset X$ open, $A_X(U) = \{f : U \to A| \, f \text{ is continu}\}$, een groep onder puntsgewijze bewerking, toe te kennen. Voor een inclusie $V \subset U$ van opens wordt $Res_{U,V}(f)$ de daadwerkelijke restrictie van functies $f|_V$. Dit verduidelijkt de eerdere notatie voor de restrictie-afbeelding. Er valt eenvoudig in te zien dat A_X inderdaad een preschoof vormt. Nu dienen we nog de twee bovengenoemde eisen te verifiëren.
De lokaliteitseis volgt uit het feit dat de secties over onze opens nu functies op die opens zijn. Wanneer twee functies overeenstemmen in alle opens in een open overdekking van U, zijn ze uiteraard gelijk op heel U. De plakeis volgt uit het plaklemma van de topologie. Zodoende is A_X dus inderdaad een schoof. Merk op dat we A_X ook kunnen beschouwen als de schoof van ***lokaal constante functies***.

Op soortgelijke wijze krijgen we de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 4.1.7. Laat de schoof $\mathcal{C}^0_X$ gegeven zijn door aan $U \subset X$ open $\mathcal{C}^0_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R}| \, f \text{ is continu}\}$, een groep onder puntsgewijze optelling en voor $\mathbb{R}$ de Euclidische topologie, toe te kennen en de voor de hand liggende restrictie-afbeeldingen te nemen. Wegens soortgelijke beschouwing als in 4.1.6 zien we dat ook hier sprake is van een schoof.

Wanneer X een reële variëteit is, kan men ook naar differentieerbare functies kijken.

Voorbeeld 4.1.8. Laat X een reële variëteit zijn, dan is $\mathcal{C}^k_X$ de schoof die voor $k \in \mathbb{N}$ of $k = \infty$ aan $U \subset X$ open de groep $\mathcal{C}^k_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R}| \, f \text{ is } C^k\}$ toekent. Aangezien differentieerbaarheid een lokale aangelegenheid is, is $\mathcal{C}^k_X$ tevens een schoof.

Schoven als in voorbeeld 4.1.7 en 4.1.8 komen vaak voor en hebben een eigen naam.

Definitie 4.1.9. Een $\mathbb{R}$-***ruimte*** is een topologische ruimte X samen met een schoof $\mathcal{O}_X$ van reëelwaardige functies waarbij de restrictie-afbeeldingen gegeven worden door beperking.

Nu we wat voorbeelden van schoven hebben gezien, vraagt de lezer zich wellicht af of alle preschoven ook schoven zijn. De volgende voorbeelden laten zien dat dit niet het geval is en illustreren zowel het falen van de plakeigenschap als van de lokaliteitseis.

Voorbeeld 4.1.10. Laat $X = \{p, q\}$ de tweepuntsruimte met de discrete topologie zijn. Laat A een abelse groep zijn met $\#A > 1$. We kijken nu naar de constante preschoof $A_{X,pre}$ als in 4.1.3. We nemen nu $s \in A_{X,pre}(\{p\}) = A$ en $t \in A_{X,pre}(\{q\}) = A$ met $s \neq t$. Merk op dat $\{\{p\}, \{q\}\}$ een open overdekking vormt van X en dat geldt dat $s|_{\{p\}\cap\{q\}} = s|_\emptyset = 0 = t|_\emptyset = t|_{\{p\}\cap\{q\}}$, ofwel als A_X een schoof zou zijn, zou er wegens de plakeigenschap een $w \in A_{X,pre}(X) = A$ zijn zodat $w|_{\{p\}} = s$ en $w|_{\{q\}} = t$. Echter zou dan gelden dat $s = w|_{\{p\}} = Id_A(w) = w = Id_A(w) = w|_{\{q\}} = t$, aangezien $s \neq t$ zien we dat A_X geen schoof is.

Voorbeeld 4.1.11. Laat $X = \{p, q\}$ de tweepuntsruimte met de discrete topologie zijn. We kijken nu naar de preschoof F gegeven door $F(X) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $F(\{p\}) = \mathbb{R}$, $F(\{q\}) = \mathbb{R}$ en $F(\emptyset) = 0$ en met $Res_{X,\{p\}}$ de projectie op de eerste coördinaat en $Res_{X,\{q\}}$ de projectie op de tweede coördinaat. Merk op dat voor $s \in F(\{p\})$ en $t \in F(\{q\})$ geldt dat $s|_{\{p\}\cap\{q\}} = 0 = t|_{\{p\}\cap\{q\}}$. Er is echter niet één unieke sectie $a \in F(X)$ zodat $a|_{\{p\}} = s$ en $a|_{\{q\}} = t$, elke sectie in $F(X)$ met s als eerste coördinaat en t als tweede coördinaat voldoet. We zien dat niet aan de lokaliteitseis wordt voldaan.

Nu we schoven van abelse groepen hebben geïntroduceerd, willen we ook kijken naar morfismen tussen deze objecten.

Definitie 4.1.12. Laat X een topologische ruimte zijn en laat $OpX \xrightarrow{F_1} Ab$ en $OpX \xrightarrow{F_2} Ab$ twee preschoven zijn. Een ***morfisme van preschoven*** $F_1 \xrightarrow{\phi} F_2$ is een morfisme van functoren. Ofwel voor alle $U \subset X$ open hebben we een groepsmorfisme $F_1(U) \xrightarrow{\phi_U} F_2(U)$ zodat voor $V \subset U$ een inclusie van opens het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} F_1(U) & \xrightarrow{\phi_U} & F_2(U) \\ \downarrow{\scriptstyle Res_{U,V}} & & \downarrow{\scriptstyle Res_{U,V}} \\ F_1(V) & \xrightarrow{\phi_V} & F_2(V) \end{array}$$

Merk op: Een morfisme van preschoven ϕ is een isomorfisme dan en slechts dan als voor alle $U \subset X$ geldt dat ϕ_U een isomorfisme van abelse groepen is.

Definitie 4.1.13. Laat X een topologische ruimte zijn en laat $OpX \xrightarrow{F_1} Ab$ en $OpX \xrightarrow{F_2} Ab$ twee schoven zijn. Een ***morfisme van schoven*** $F_1 \xrightarrow{\phi} F_2$ is een morfisme van preschoven.

Met de definitie van morfismen van (pre)schoven krijgen we nu ***PreSh(X)***, de categorie van preschoven over X en ***Sh(X)***, de categorie van schoven over X.

Voorbeeld 4.1.14. Voor $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{R}$ de inclusie-afbeelding verkrijgen we een morfisme van schoven $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{i} \mathbb{R}_X$, waar de ϕ_U worden gegeven door

$$\mathbb{Z}_X(U) \ni s \mapsto i \circ s \in \mathbb{R}_X(U).$$

Voorbeeld 4.1.15. We hebben het morfisme van preschoven $A_{X,pre} \xrightarrow{\alpha} A_X$ van de constante preschoof over een abelse groep A naar de constante schoof over dezelfde abelse groep A, waar de α_U worden gegeven door

$$A_{X,pre}(U) \ni a \mapsto (u \mapsto a) \in A_X(U).$$

In het vervolg zullen we nog meer morfismen van schoven tegenkomen. We willen ook over de kern en het beeld van een morfisme van (pre)schoven spreken.

Definitie 4.1.16. Laat $F \xrightarrow{\phi} G$ een morfisme van preschoven in $PreSh(X)$ zijn, dan noemen we de preschoof gegeven door $Ker\,\phi(U) = Ker((F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U))$, ***de kern van ϕ***.

Lemma 4.1.17. *Als $F \xrightarrow{\phi} G$ een morfisme van schoven in $Sh(X)$ is, is de preschoof $Ker\,\phi$ als in definitie 4.1.16 een schoof.*

Bewijs. We moeten de twee schoofeisen afgaan. Dus laat $U \subset X$ open zijn en laat $(U_i)_{i\in I}$ een open overdekking zijn van U. Laat $s \in Ker\,\phi(U)$ en laat $t \in Ker\,\phi(U)$ zodat $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ voor alle $i \in I$ open. Merk op dat in het bijzonder geldt dat $s, t \in F(U)$. Aangezien F een schoof is, volgt nu dat $s = t$ en zodoende ook de lokaliteitseis voor $Ker\,\phi$. Stel nu dat we voor alle $i \in I$ een sectie $s_i \in ker\,\phi(U_i)$ hebben, zodat voor alle $i, j \in I$ geldt dat $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Er geldt dat $Ker\,\phi(U_i) \subset F(U_i)$ ofwel er is een $s \in F(U)$ zodat voor alle $i \in I$ geldt dat $s|_{U_i} = s_i$. Merk op dat voor alle $i \in I$ geldt dat $res_{U,U_i}(\phi_U(s)) = \phi_{U_i}(res_{U,U_i}(s)) = 0$, aangezien G een schoof is, geldt dat $\phi_U(s) = 0$ en dus $s \in Ker\,\phi(U)$. We zien dat ook aan de plakeis wordt voldaan.

□

Definitie 4.1.18. Laat $F \xrightarrow{\phi} G$ een morfisme van preschoven in $PreSh(X)$ zijn, dan noemen we de preschoof gegeven door $Impre\,\phi(U) = Im((F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U))$, ***de beeldpreschoof van ϕ***.

Er is geen analogon voor stelling 4.1.17; de beeldpreschoof van een morfisme van schoven als in 4.1.18 is in het algemeen geen schoof. Het volgende voorbeeld maakt dit duidelijk.

Voorbeeld 4.1.19. Laat $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ met de standaardtopologie. Vervolgens kijken we naar de schoof $\mathcal{O}_X$, voor $U \subset X$ open gegeven door $\mathcal{O}_X(U) = \{f : X \to \mathbb{C} | \, f \text{ is differentieerbaar}\}$ en de schoof $\mathcal{O}_X^*$, voor $U \subset X$ open gegeven door $\mathcal{O}_X^*(U) = \{f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\} | \, f \text{ is differentieerbaar}\}$. Merk op dat $\mathcal{O}_X(U)$ een groep is onder puntsgewijze optelling, terwijl $\mathcal{O}_X^*(U)$ een groep is onder puntsgewijze vermenigvuldiging. We hebben het morfisme van schoven $\mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^*$ gegeven door $exp_U(\sigma) = exp \circ \sigma \in \mathcal{O}_X^*(U)$.
Laat $x \in X$ en laat $B_x \subset X$ een open bol rond x zijn zodat er een halflijn $h \subset X$, beginnend in 0, is met $h \cap B_x = \emptyset$. We kunnen op B_x een tak van het logaritme, ln_x, kiezen zodat

$$exp \circ ln_x = i \circ id_{B_x},$$

waarbij i de natuurlijke inclusie $B_x \xrightarrow{i} \mathbb{C}$ is. We hebben nu dus een open overdekking $(B_x)_{x\in X}$ van X, zodat

$$i \circ id_{B_x} \in Impre\, exp(B_x)$$

en

$$i \circ id_{B_x} | B_x \cap B_y = i \circ id_{B_y} | B_x \cap B_y.$$

Als $Impre\, exp$ een schoof was geweest, was het dus zo dat $id_X \in Impre(exp)(X)$. Dit is echter niet het geval, er is immers geen inverse van $X \xrightarrow{exp} \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Om toch over het beeld van een morfisme van schoven te kunnen spreken, hebben we het volgende begrip nodig.

Definitie 4.1.20. Laat F een preschoof zijn in $PreSh(X)$. De ***verschoving van de preschoof F*** is een schoof F^+ in $Sh(X)$ samen met een morfisme van preschoven u, zodat voor G in $Sh(X)$ en ψ, een morfisme van preschoven, aan de volgende universele eigenschap wordt voldaan:

$$\begin{tikzcd} & F^+ \arrow[dr, dotted, "!\exists\psi^+"] & \\ F \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "\psi"] & & G \end{tikzcd}$$

Ofwel er is een uniek morfisme van schoven ψ^+ zodat $\psi^+ \circ u = \psi$.

Merk op dat de verschoving wegens de universele eigenschap uniek tot op een uniek isomorfisme is. We moeten nog wel aantonen dat er voor elke preschoof F daadwerkelijk een schoof F^+ met de bovenstaande universele eigenschap bestaat. Pas in de volgende paragraaf zal met behulp van staken een schoof geconstrueerd worden die aan deze eigenschap voldoet. Toch formuleren we alvast het resultaat.

Stelling 4.1.21. *Voor F in $PreSh(X)$ bestaat de verschoving F^+ in $Sh(X)$.*

Met de introductie van het begrip verschoving kunnen we nu over beelden van morfismen in $Sh(X)$ spreken.

Definitie 4.1.22. Laat $F \xrightarrow{\phi} G$ een morfisme van schoven in $Sh(X)$ zijn, dan is ***het beeld van ϕ*** de verschoving van ***de beeldpreschoof van ϕ***, gegeven door $Impre\,\phi(U) = Im(F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U))$. Ofwel $Im\,\phi := (Impre\,\phi)^+$.

We zullen het begrip verschoving in hoofdstuk 5.1 ook nodig hebben om aan te tonen dat $Sh(X)$ een abelse categorie vormt en het introduceren van het beeld van een morfisme van schoven is hiervoor ook een noodzakelijke stap.

4.2 Staken

Het blijkt dat we (pre)schoven en morfismen van (pre)schoven kunnen analyseren met behulp van staken.

Definitie 4.2.1. Voor F in $PreSh(X)$ en $x \in X$ is ***de staak van F in x*** de abelse groep

$$F_x := \bigsqcup_{x \in U \subset X open} F(U)/\sim,$$

waarbij voor $s \in F(U)$ en $t \in F(V)$ geldt dat $s \sim t$ dan en slechts dan als er een $x \in W \subset U \cap V$ open is zodat $s|_W = t|_W$. De klasse van s noteren we als s_x en noemen we ook wel een ***kiem*** van secties van F in x.
Opmerking: de groepsbewerking wordt voor $\sigma \in F(U)$ en $\tau \in F(V)$ gegeven door $\sigma_x \cdot \tau_x := (\sigma|_{U\cap V} \cdot \tau|_{U \cap V})_x$.

We kijken naar wat voorbeelden om de definitie in actie te zien.

Voorbeeld 4.2.2. Laat $x \in X$, we kijken naar de staak van de constante preschoof $A_{X,pre}$ in x. Voor $a \in A_{X,pre}(U)$ en $b \in A_{X,pre}$ geldt dat $a \sim b \iff$ er is een $x \in W \subset U \cap V$ open zodat $a|_W = b|_W$. Merk op dat $x \in W$, voor W de open uit de equivalentierelatie, ofwel $W \neq \emptyset$. Nu geldt dus dat $a = id_A(a) = a|_W = b|_W = id_A(b) = b$, ofwel $A_{X,pre,x} = A$.

Voorbeeld 4.2.3. Laat $x \in X$, we kijken naar de staak van de constante schoof A_X in x. We hebben de afbeelding $A_{X,x} \xrightarrow{f} A$ gegeven door $s_x \mapsto s(x)$ voor een representant $s \in A_X(U)$ met $x \in U \subset X$ open. We zien dat dit voorschrift inderdaad representant onafhankelijk is en verkrijgen zo een homomorfisme. De surjectiviteit van f zien we in door $s \in A_X(U)$ gegeven door $u \mapsto a$, ofwel de constante afbeelding naar $a \in A$, te nemen. Er geldt nu $f(s_x) = s(x) = a$.
Stel nu dat $f(s_x) = s(x) = t(x) = f(t_x)$, voor $s \in A_X(U)$ en $t \in A_X(V)$, dan geldt dat $s^{-1}(\{s(x)\})$ en $t^{-1}(\{t(x)\})$ open zijn. Dit betekent dat $W = s^{-1}(s(x)) \cap t^{-1}(t(x))$ open is en er geldt dat $x \in W$, ofwel $s_x = t_x$. Hieruit volgt dat f een isomorfisme is en dus dat $A_{X,x} \cong A$.

Voor morfismen van preschoven krijgen we ook geïnduceerde morfismen op de staken.

Definitie 4.2.4. Laat $F \xrightarrow{\phi} G$ een morfisme van preschoven zijn, dan krijgen we voor $x \in X$ **het geïnduceerde morfisme op de staken** $F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x$. Laat $s \in F(U)$ en $x \in U$ dan wordt het homomorfisme gegeven door

$$\phi_x(s_x) \coloneqq (\phi_U(s))_x.$$

Voorbeeld 4.2.5. Laat $A_{X,pre} \xrightarrow{\phi} A_X$ het morfisme van preschoven zijn als in voorbeeld 4.1.15. Voor $x \in X$ krijgen we nu het geïnduceerde morfisme $A_{X,pre,x} \xrightarrow{\phi_x} A_{X,x}$ op de staken. Uit voorbeeld 4.2.2 weten we dat $A_{X,x} = A$, ofwel voor $a_x \in A_{X,x}$ geldt dat $a_x = a$. Wanneer we nu kijken naar het isomorfisme f uit voorbeeld 4.2.3, zien we dat $f(\phi_x(a)) = f(\phi_x(a_x)) = f((\phi_U(a))_x) = f((u \mapsto a)_x) = a$, ofwel $f \circ \phi_x = id_A$. Hieruit volgt dat ϕ_x een isomorfisme is.

We kunnen nu met behulp van staken laten zien dat elke preschoof F in $PreSh(X)$ een verschoving (F^+, u) als in definitie 4.1.20 heeft.

Definitie 4.2.6. Laat F een preschoof in $PreSh(X)$, dan is F^+ in $Sh(X)$ de schoof die voor $U \subset X$ gegeven wordt door

$$F^+(U) = \{(s_x)_{x\in U} \in \prod_{x\in U} F_x | \forall y \in U, \exists W \subset U \text{ open, waarvoor } y \in W \,\&\, \exists \bar{s} \in F(W) \text{ zodat } \forall x \in W : \bar{s}_x = s_x\},$$

waarbij als restrictie-afbeelding $Res_{U,V}$ de projectie $\pi : \prod_{x\in U} F_x \to \prod_{x\in V} F_x$ wordt genomen.

Het is eenvoudig in te zien dat F^+ inderdaad een schoof is. We bekijken nu het morfisme van preschoven $F \xrightarrow{u} F^+$ waar $F(U) \xrightarrow{u_U} F^+(U)$ voor $U \subset X$ open gegeven wordt door

$$s \mapsto (s_x)_{x\in U}.$$

Laat nu G een schoof in $Sh(X)$ zijn en laat $F \xrightarrow{\phi} G$ een morfisme van preschoven in $PreSh(X)$ zijn. We zullen een uniek morfisme van schoven $\phi^+ : F^+ \to G$ construeren waarvoor geldt dat $\phi = \phi^+ \circ u$ en zodoende laten zien dat F^+ inderdaad voldoet aan de universele eigenschap van definitie 4.1.20.

Laat $U \subset X$ open zijn, en laat $(s_x)_{x\in U} \in F^+(U)$. Voor $y \in U$ nemen we nu de open verzameling W_y als in de definitie van F^+ en krijgen de open overdekking $(W_y)_{y\in U}$ van U. Er is dus voor elke W_y een $\bar{s} \in F(W_y)$ waarvoor geldt dat

$$(\bar{s}_x)_{x\in W_y} = (s_x)_{x\in U}|_{W_y} \in F^+(W_y).$$

Merk op dat moet gelden dat

$$\phi^+_{W_y}((s_x)_{x\in U}|_{W_y}) = \phi_{W_y}(\bar{s}) \in G(W_y)$$

als we een morfisme van schoven ϕ^+ willen hebben waarvoor $\phi = \phi^+ \circ u$. Aangezien G een schoof is geldt nu echter dat er een uniek element $t \in G(U)$ is, zodat voor alle $y \in U$ geldt dat $t|_{W_y} = \phi_{W_y}(\bar{s})$. Ofwel er moet gelden dat $\phi^+((s_x)_{x\in U}) = t$. Zodoende verkrijgen we inderdaad een morfisme van schoven $F^+ \xrightarrow{\phi^+} G$. Uit de constructie is ook direct duidelijk dat ϕ^+ het unieke morfisme van schoven is waarvoor $\phi^+ \circ u = \phi$.

Vervolgens merken we op dat voor alle $x \in X$ het geïnduceerde morfisme op de staken

$$F_x \xrightarrow{u_x} F_x^+$$

een isomorfisme is. Dit is in te zien door na te gaan dat de functie $F_x^+ \xrightarrow{u_x^{-1}} F_x$ gegeven door

$$F_x^+ \ni ((s_y)_{y\in U})_x \mapsto s_x \in F_x,$$

ofwel projectie van de representant $(s_y)_{y\in U}$ op F_x, de inverse van u_x is.

Tot slot merken we op dat de morfismen $F(U) \xrightarrow{u_U} F^+(U)$ niet noodzakelijk surjectief of injectief zijn. Zo zien we aan de constructie van de verschoving F^+ dat de morfismen u_U, voor $U \subset X$ open, surjectief zijn dan en slechts dan als de preschoof F aan de plakeigenschap van schoven voldoet. De beeldpreschoof uit voorbeeld 4.1.19 vormt een voorbeeld waar de morfismen u_U niet surjectief zijn. Verder zien we aan de constructie van de verschoving F^+ dat de morfismen u_U, voor $U \subset X$ open, injectief zijn dan en slechts dan als de preschoof F aan de lokaliteitseis van schoven voldoet. Voorbeeld 4.1.11 illustreert dus dat de verschoving van een preschoof niet noodzakelijk 'groter' is.

Nu we zeker weten dat de verschoving van een preschoof bestaat, gaan we verder om via de geïnduceerde morfismen op de staken als in def 4.2.4 de begrippen injectief en surjectief voor de morfismen van schoven te introduceren.

Definitie 4.2.7. Een morfisme van schoven, $F \xrightarrow{\phi} G$, in $Sh(X)$ is ***injectief*** als voor alle $x \in X$ geldt dat het geïnduceerde morfisme $F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x$ injectief is.

Definitie 4.2.8. Een morfisme van schoven, $F \xrightarrow{\phi} G$, in $Sh(X)$ is ***surjectief*** als voor alle $x \in X$ geldt dat het geïnduceerde morfisme $F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x$ surjectief is.

De volgende resultaten laten zien dat deze definities doen wat we ervan verwachten.

Lemma 4.2.9. *Voor een morfisme van schoven $F \xrightarrow{\phi} G$ in $Sh(X)$ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *ϕ_x is injectief voor alle $x \in X$.*
2. *$Ker\,\phi = 0$.*
3. *Voor alle $U \subset X$ open is ϕ_U injectief.*

Bewijs. De equivalentie (2) $\iff$ (3) volgt direct.
We bewijzen nu eerst (1) $\Rightarrow$ (2). Merk op dat voor $s \in Ker\,\phi(U)$ geldt dat $s_x \in Ker(\phi_x)$, aangezien $\phi_x(s_x) = (\phi_U(s))_x = 0_x$. Dit betekent dat er een $W \subset X$ open is, zoals in de equivalentierelatie bij staken 4.2, waarvoor $s|_W = 0$. We zien dat voor alle $x \in X$ geldt dat $(Ker\,\phi)_x = 0$, ofwel $Ker\,\phi = 0$. Er is immers voor alle $s \in Ker\,\phi(U)$ een open omgeving W van $x \in U$, zodat $s|_W = 0$. Zo krijgen we een open overdekking van U waarop de sectie verdwijnt.
We zullen nu (1) $\Leftarrow$ (2) bewijzen. Laat $a_x \in Ker\,\phi_x$ voor $a \in F(U)$, dan geldt dat er een $W \subset X$ open is, zoals in de equivalentierelatie bij staken 4.2, waarvoor $\phi_U(a)|_W = 0$. We weten nu ook dat $\phi_W(a|_W) = 0$ ofwel dat $a|_W = 0$, dit geeft dat $a_x = 0$ en dus dat $Ker\,\phi_x = 0$.

$\square$

Lemma 4.2.10. *Voor een morfisme van schoven $F \xrightarrow{\phi} G$ in $Sh(X)$ geldt het volgende:*

$$\phi_x \text{ is surjectief voor alle } x \in X \iff Im\,\phi = G \Longleftarrow \text{voor alle } U \subset X \text{ open is } \phi_U \text{ surjectief}$$

Hier betekent $Im\,\phi = G$ uiteraard dat het kanonieke morfisme $Im\,\phi \to G$ een isomorfisme is.

Bewijs. De implicatie ($\Longleftarrow$) volgt direct.
We zullen nu de implicatie naar rechts van de equivalentie ($\iff$) bewijzen. Stel dat voor alle $x \in X$ geldt dat $F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x$ surjectief is. Merk op dat er wegens de universele eigenschap van de verschoving een morfisme $Im\,\phi^+ \xrightarrow{j} G$ bestaat. Aangezien u_x een ismorfisme is, volgt uit het diagram

$$\begin{tikzcd} & Im\,\phi_x \arrow[dr, "j_x"] & \\ Impre\,\phi_x \arrow[ur, "u_x"] \arrow[rr, "i_x"] & & G_x \end{tikzcd}$$

en het feit dat i_x injectief is dat j_x injectief is. Soortgelijk volgt uit de surjectiviteit van ϕ_x dat j_x surjectief is. Laat $t \in G(U)$, dan is er, aangezien voor alle $x \in X$ geldt dat j_x surjectief bestaat er een open overdekking $(U_i)_{i \in I}$ van U, zodat er secties $s_i \in Im\,\phi(U_i)$ zijn waarvoor geldt dat $j(s_i) = t|_{U_i}$. Aangezien j wegens lemma 4.2.9 injectief is, stemmen de s_i overeen op de doorsnedes, ofwel er is een $s \in Im\,\phi(U)$ zodat $s|_{U_i} = s_i$. We zien dat voor alle $i \in I$ geldt dat $j_U(s)|_{U_i} = j(s_i) = t|_{U_i}$, ofwel er geldt dat $j_U(s) = t$ en dus dat j_U surjectief is. Hieruit volgt dat $Im\,\phi \xrightarrow{j} G$ een isomorfisme is. De implicatie de andere kant op is direct duidelijk.

$\square$

Uit het bovenstaande volgt dat het morfisme $Im\,\phi \xrightarrow{j} G$, behorend bij een morfisme $F \xrightarrow{\phi} G$, injectief is en zodoende kunnen we $Im\,\phi$ als deelschoof van G beschouwen. Dit is mogelijk omdat de inbedding j onafhankelijk is van de gekozen verschoving van $Impre\,\phi$ (deze is immers uniek tot op uniek isomorfisme). Onder deze alternatieve karakterisatie van het beeld van ϕ, geldt dat $s \in Im\,\phi(U) \subset G(U)$ dan en slechts dan als er een open overdekking $(U_i)_{i \in I}$ van U is, zodat voor alle i geldt dat $s|_{U_i}$ in het beeld van het homomorfisme ϕ_{U_i} ligt.
Ook hebben we het volgende resultaat.

Lemma 4.2.11. *Een morfisme van schoven $F \xrightarrow{\phi} G$ in $Sh(X)$ is een isomorfisme dan en slechts dan als voor alle $x \in X$ geldt dat $F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x$ een isomorfisme is.*

Bewijs. De implicatie $\Rightarrow$ volgt direct uit de voorgaande lemma's. We bewijzen nu de implicatie $\Leftarrow$. Merk op dat ϕ_x injectief is voor alle $x \in X$, dus dat voor $U \subset X$ open, ϕ_U injectief is. De surjectiviteit van ϕ_U volgt nu analoog aan het bewijs van de surjectiviteit van j in 4.2.10.

□

We kunnen nu eenvoudig laten zien dat de verschoving van de constante preschoof $A_{X,pre}$, de constante schoof A_X is.

Voorbeeld 4.2.12. Dit is een direct vervolg van voorbeeld 4.2.5. We hebben nu voor alle $x \in X$ het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd} & A^+_{X,pre,x} \arrow[dr, "\phi^+_x"] & \\ A_{X,pre,x} \arrow[ur, "u_x"] \arrow[rr, "\phi_x"] & & A_{X,x} \end{tikzcd}$$

Er geldt dat u_x en ϕ_x isomorfismen zijn en dus ook dat ϕ^+_x een isomorfisme is. We zien dat ϕ^+ wegens lemma 4.2.11 een isomorfisme van schoven is en dus dat A_X de verschoving van $A_{X,pre}$ is.

Naast schoven van abelse groepen kan men ook denken aan ***schoven van ringen***. De definitie hiervan verloopt volledig analoog aan de definitie van schoven van abelse groepen 4.1.4. De proposities en definities uit de voorgaande paragraaf zijn zonder problemen naar schoven van ringen te generaliseren. Voorbeelden van schoven van ringen zijn de eerder tegengekomen $\mathbb{R}$-ruimten, zie definitie 4.1.9, als in voorbeeld 4.1.7, voorbeeld 4.1.8.

Nu we schoven van ringen hebben, kunnen we op een natuurlijke manier spreken over modulen van zo'n schoof.

Definitie 4.2.13. Laat $\mathcal{A}$ een schoof van ringen over X zijn. Een schoof van ***$\mathcal{A}$-modulen*** is een schoof F van abelse groepen, zodat voor elke $U \subset X$ open geldt dat $F(U)$ een $\mathcal{A}(U)$-moduul is en de restrictie-afbeeldigen $F(U) \xrightarrow{res_{U,V}} F(V)$ morfismen van $\mathcal{A}(U)$-modulen zijn, waarbij $F(V)$ een $\mathcal{A}(U)$-moduul is via de restrictie-afbeelding van $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$.

Via de constante schoof $\mathbb{Z}_X$ zien we dat schoven van abelse groepen een speciaal geval zijn van schoven van $\mathcal{A}$-modulen. Een ander voorbeeld vinden we door te kijken naar vectorbundels.

Voorbeeld 4.2.14. De schoof $\mathcal{E}^0$ van secties van een $\mathbb{R}$-vectorbundel $E \xrightarrow{\pi} X$, gegeven door

$$\mathcal{E}(U) = \{U \xrightarrow{s} E |\, s \text{ is een continue sectie}\},$$

is een schoof van modulen over de schoof $\mathcal{C}^0_X$ van reëelwaardige continue functies. Hierbij krijgen we de moduulstructuur via puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging, wat mogelijk is aangezien de vezels $\pi^{-1}(\{x\})$ een vectorruimtestructuur hebben. Wanneer X en de vectorbundel ook een variëteit zijn, kunnen we kijken naar $\mathcal{E}^k$, voor $k \in \mathbb{N}$ of $k = \infty$, dit is de schoof van C^k gladde secties en is een schoof van modulen over de schoof $\mathcal{C}^k_X$. De schoof Ω^k_X van C^∞-gladde secties voor $U \subset X$ gegeven door

$$\Omega^k_X(U) = \{U \xrightarrow{s} \Lambda^k T^* X |\, s \text{ is een } \mathcal{C}^\infty \text{ gladde sectie}\},$$

ook wel ***de schoof van k-vormen over X*** genoemd, is hiervan een expliciet voorbeeld.

5 Afgeleide functoren

We zullen in dit hoofdstuk afgeleide functoren introduceren in de context van abelse categorieën. De nadruk zal hierbij wel liggen op het inzichtelijk maken van de theorie die uiteindelijk wordt gebruikt om de stelling van de Rham te bewijzen.

5.1 Abelse categorieën

Het blijkt dat de eerder tegengekomen categorieën van schoven abelse categorieën zijn. Veel van wat we in de eerdere hoofdstukken hebben gedaan, kan verwoord worden in de taal van deze abelse categorieën. We zullen in deze sectie bespreken wat abelse categorieën zijn en constructies voor deze categorieën maken die rechtstreeks van toepassing zijn voor onze reis naar de stelling van de Rham. De opbouw van onze introductie van abelse categorieën zal in grote lijnen de opbouw van hoofdstuk 4.1 van [Moe08] volgen. Verder zullen we algemene resultaten voor abelse categorieën noemen maar niet bewijzen, hiervoor wordt verwezen naar hoofdstuk 4.1 van [Moe08] en hoofdstuk 8 van [ML78].

Om abelse categorieën te introduceren, hebben we eerst wat nieuwe begrippen nodig. We beginnen met een definitie die voor elke categorie betekenis heeft.

Definitie 5.1.1. Laat A en B objecten in een categorie C zijn. De ***som*** of het ***coproduct*** van A en B is een object S samen met morfismen, ookwel ***injecties*** genoemd, $A \xrightarrow{i} S$ en $B \xrightarrow{j} S$ met de eigenschap dat we voor elk object D en morfismen $A \xrightarrow{f} D$ en $B \xrightarrow{g} D$ een uniek morfisme $S \xrightarrow{h} D$ krijgen, zodat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & S \arrow[d, dotted, "!\exists h"] & B \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

De som van A en B wordt genoteerd als $A \oplus B$.

We hebben ook de bijbehorende duale definitie.

Definitie 5.1.2. Laat A en B objecten in een categorie C zijn. Het ***product*** van A en B is een object S samen met morfismen, ookwel ***projecties*** genoemd, $P \xrightarrow{p} A$ en $P \xrightarrow{q} B$ met de eigenschap dat we voor elk object D en morfismen $D \xrightarrow{f} A$ en $D \xrightarrow{g} B$ een uniek morfisme $S \xrightarrow{h} D$ krijgen, zodat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} A & P \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & B \\ & D \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "!\exists h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Het product van A en B wordt genoteerd als $A \Pi B$.

Wanneer de som of het product van twee objecten A en B in een categorie C bestaan, zijn deze uniek tot op een uniek isomorfisme wegens de universele eigenschap waaraan wordt voldaan. Een voorbeeld van een categorische som is de directe som van twee abelse groepen, deze som is tevens het product in de categorie van abelse groepen. Een ander voorbeeld vinden we in de categorie van topologische ruimten waar de producttopologie en de disjuncte vereniging topologie respectievelijk het categorisch product en de categorische som vormen.

Definitie 5.1.3. Een categorie C wordt ***lineair*** genoemd, als voor alle objecten A en B in de categorie geldt dat aan $Hom(A, B)$ de structuur van abelse groep is gegeven en compositie van morfismen een bilineaire operatie is ten aanzien van deze structuur, dat wil zeggen dat voor alle $f, f' \in Hom(A, B)$ en alle $g, g' \in Hom(B, C)$ geldt dat

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

en dat

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'.$$

In een lineaire categorie geldt dat de som en het product van twee objecten nauw met elkaar samenhangen.

Definitie 5.1.4. Laat A en B objecten zijn in een lineaire categorie. Een ***biproduct*** is een object P met de bijhorende morfismen weergegeven in het diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i"] & P \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, bend left, "q"] & B \arrow[l, bend left, "j"] \end{tikzcd} ,$$

zodat $p \circ i = Id_A$, $q \circ j = Id_A$ en $i \circ p + j \circ q = Id_P$.

In een lineaire categorie geldt dat twee objecten A en B een product hebben dan en slechts dan als de objecten een biproduct hebben en dat de objecten A en B een product hebben dan en slechts dan als de objecten een som hebben. Verder geldt in zo'n categorie dat het object P, als in 5.1.4, samen met de morfismen p en q het categorisch product vormt van A en B en dat het object P samen met de morfismen i en j de som vormt van A en B. Voor een bewijs van deze karakterisering wordt de lezer verwezen naar stelling 2 in hoofdstuk 8.2 van Mac Lane [ML78].

Voor een abelse categorie hebben we nog meer ingrediënten nodig.

Definitie 5.1.5. Een object I in een categorie C heet ***initieel*** als er voor alle objecten A in C precies één element in $Hom(I, A)$ bevat is.

En de duale definitie.

Definitie 5.1.6. Een object T in een categorie C heet ***terminaal*** als er voor alle objecten A in C precies één element in $Hom(A, T)$ bevat is.

Merk op dat initiële en terminale objecten uniek tot op een uniek isomorfisme zijn. Voor een voorbeeld kijken we naar de categorie Set van verzamelingen, waar het initiële object wordt gevormd door de lege verzameling en de terminale objecten door de éénpuntsverzamelingen $\{x\}$. Het is ook mogelijk dat de initiële objecten en terminale objecten samenvallen in een categorie.

Definitie 5.1.7. Het ***nulobject*** in een categorie C is een object 0 waarvoor voor alle objecten A in C geldt dat $Hom(0, A)$ en $Hom(A, 0)$ precies één element hebben. Dit element geven we in beide gevallen ook aan met 0 en wordt het ***nulmorfisme*** genoemd.

Het nulobject is wederom uniek tot op uniek isomorfisme en zodoende zijn we gerechtvaardigd over 'het nulobject' te spreken. In een categorie met een nulobject bestaat het volgende diagram voor alle objecten A en B:

$$A \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} B.$$

De samenstelling die men krijgt noemt men ook het nulmorfisme tussen A en B en wordt genoteerd als 0. Merk op dat samenstelling met een nulmorfisme altijd resulteert in een nulmorfisme. We zien ook dat een object A het nulobject is dan en slechts dan als Id_A het nulmorfisme is. Verder zien we dat in een lineaire categorie met objecten A en B en $f, f' \in Hom(A, A)$ en $0_{A,B} \in Hom(A, B)$ geldt dat

$$0_{A,B} = 0_{A,A} \circ f + f' = 0_{A,A} \circ f + 0_{A,A} \circ f' = 0_{A,B} + 0_{A,B},$$

ofwel het nulmorfisme is het eenheidselement in de groep $Hom(A.B)$. In het vervolg laten we het subscript van het nulmorfisme weg als duidelijk is tussen welke objecten het nulmorfisme loopt.

In de categorie van groepen wordt het nulobject gevormd door de triviale groep en ook voor modulen vervult het triviale moduul de rol van nulobject. Niet alle ons welbekende categorieën hebben echter een nulobject; zo zagen we dat in Set de initiële-objecten niet isomorf zijn aan de terminale objecten. Ook voor de categorie $Ring$ van ringen met eenheidselement en eenheidselement-bewarende morfismen is dit het geval; hier is $\mathbb{Z}$ het initiële object en de nulring, met slechts één element, het terminale object.

Wanneer een categorie zo'n nulobject bevat, kunnen we ook de kern en cokern zoals we die bij bijvoorbeeld modulen tegenkomen, generaliseren in categorische termen.

Definitie 5.1.8. Laat $A \xrightarrow{\phi} B$ een morfisme zijn in een categorie C waarin een nulobject bevat is. De ***kern*** van ϕ is een object $Ker\,\phi$ in C samen met een morfisme $Ker\,\phi \xrightarrow{i} A$, waarvoor geldt dat $\phi \circ i = 0$ en zodat voor alle morfismen $L \xrightarrow{f} A$ met $\phi \circ f = 0$ een uniek morfisme bestaat $L \xrightarrow{h} Ker\,\phi$ met $i \circ h = f$. Het volgende commutatieve diagram geeft de situatie weer:

$$\begin{tikzcd} Ker\,\phi \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "\phi"] & B \\ & L \arrow[u, "f"] \arrow[ul, dotted, "!\exists h"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Duaal hebben we de volgende definitie.

Definitie 5.1.9. Laat $A \xrightarrow{\phi} B$ een morfisme zijn in een categorie C waarin een nulobject bevat is. De ***cokern*** van ϕ is een object $Coker\,\phi$ in C samen met een morfisme $B \xrightarrow{p} Coker\,\phi$, waarvoor geldt dat $p \circ \phi = 0$ en zodat voor alle morfismen $B \xrightarrow{g} L$ met $g \circ \phi = 0$ een uniek morfisme bestaat $Coker\,\phi \xrightarrow{h} L$ met $h \circ p = g$. Het volgende commutatieve diagram geeft de situatie weer:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & Coker\phi \arrow[dl, dotted, "!\exists h"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

De kern en cokern van een morfisme zijn wederom uniek tot op uniek isomorfisme wegens de definiërende universele eigenschap. De kern en cokern van een morfisme komen in de categorieën van groepen en van R-modulen overeen met de gebruikelijke kern en cokern van de homomorfismen.

Tot slot kan men in categorische termen ook een generalisatie geven van injectieve en surjectieve functies.

Definitie 5.1.10. Een ***monomorfisme*** is een morfisme $A \xrightarrow{i} B$, zodat voor alle morfismen $D \xrightarrow{f} A$ en $D \xrightarrow{g} A$ de volgende implicatie geldt

$$i \circ f = i \circ g \Rightarrow f = g.$$

Deze eigenschap noemen we ook wel links-annuleerbaarheid.

En de bijbehorende duale definitie.

Definitie 5.1.11. Een ***epimorfisme*** is een morfisme $A \xrightarrow{p} B$, zodat voor alle morfismen $B \xrightarrow{f} D$ en $B \xrightarrow{g} D$ de volgende implicatie geldt

$$f \circ p = g \circ p \Rightarrow f = g.$$

Deze eigenschap noemen we ook wel rechts-annuleerbaarheid.

Het blijkt dat de morfismen $Ker\,\phi \xrightarrow{i} A$ en $B \xrightarrow{p} Coker\phi$ als in definitie 5.1.9 en 5.1.9 respectievelijk monomorfismen en epimorfismen zijn. Voor meer informatie wordt de lezer naar hoofdstuk 8.1 van [ML78] verwezen.

Na al deze definities zijn we eindelijk in staat abelse categorieën te introduceren.

Definitie 5.1.12. ***Een abelse categorie*** is een categorie C die aan de volgende voorwaarden voldoet:

- C is een lineaire categorie
- voor alle objecten A en B bestaat het categorisch product van A en B in C
- C bevat een nulobject
- elk morfisme $A \xrightarrow{f} B$ heeft een kern en een cokern in C
- elk monomorfisme is een kern en elk epimorfisme is een cokern

Merk op dat een abelse categorie in het bijzonder een lineaire categorie is en dus voor alle objecten A en B ook een som en biproduct (die dus kanoniek isomorf zijn) bevat. We kunnen in de context van een abelse categorie ook het beeld van een morfisme, zoals we dat tegenkomen bij modulen, generaliseren.

Definitie 5.1.13. Voor een morfisme $A \xrightarrow{f} B$ in een abelse categorie noemt men

$$Im\,f := Ker(Coker\,f)$$

het ***beeld van f***. *Let op*: Uiteraard dienen hier de bijbehorende morfismen in acht te worden genomen!

Uit de eigenschappen van een abelse categorie blijkt dat de isomorfiestelling zoals we die kennen voor modulen generaliseert naar abelse categorieën. We hebben voor een morfisme $A \xrightarrow{\phi} B$ in een abelse categorie het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd} Ker\,\phi \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, dotted, "\phi'"] & B \arrow[r, "p"] & Coker\,\phi \\ & Coim\,\phi := Coker\,i \arrow[r, "\bar{\phi}"] & Ker\,p := Im\,\phi \arrow[u, "j"] & \end{tikzcd}$$

Merk op dat $p \circ \phi = 0$ ofwel dat er is een uniek morfisme $A \xrightarrow{\phi'} Ker\, p$ waarvoor geldt dat $j \circ \phi' = \phi$. Vervolgens zien we dat

$$j \circ \phi' \circ i = \phi \circ i = 0 = j \circ 0.$$

Aangezien i een monomorfisme is, volgt nu dat $\phi' \circ 0 = 0$. Er is dus een morfisme $Coker\, i \xrightarrow{\bar{\phi}} Ker\, p$, zodat $\bar{\phi} \circ q = \phi'$. Het blijkt dat dit geïnduceerde morfisme $\bar{\phi}$ een isomorfisme is en dus dat de isomorfiestelling geldt in abelse categorieën. Voor een bewijs van deze isomorfiestelling wordt de lezer verwezen naar hoofdstuk 8.3 van [ML78]. (In het in hoofdstuk 4.4 [Ste75] wordt deze isomorfiestelling zelfs als alternatief gebruikt voor onze laatste eis in de definitie van een abelse categorie.) We zullen deze eigenschap van abelse categorieën komende paragraaf veelvuldig gebruiken.

Het standaardvoorbeeld van een abelse categorie wordt, niet geheel verrassend, gevormd door de categorie van abelse groepen. Ook de categorieën van linker R-modulen in het algemeen vormen voorbeelden van abelse categorieen. Belangrijk voor ons is dat de eerder besproken categorieën van schoven van $\mathcal{A}$-modulen abelse categorieën zijn.

We geven kort weer hoe men in kan zien dat schoven van abelse groepen over een topologische ruimte X een abelse categorie vormen. Aangezien de categorie van abelse groepen abels is, kunnen we de constructies van *Ab* verheffen naar de categorie $Sh(X)$. Zo verkrijgen we de categorische som van twee schoven F en G door de verschoving van de preschoof gegeven door $U \mapsto F(U) \oplus G(U)$ te nemen. De kern van een morfisme van schoven $F \xrightarrow{\phi} G$ is de kern zoals we deze eerder hebben geïntroduceerd. De cokern van het morfisme krijgen we door de verschoving van de preschoof gegeven door $U \mapsto Coker\, \phi_U$ te nemen. Het nulobject wordt gegeven door de nulschoof die aan alle opens van X de triviale groep toekent. Vervolgens kan men nagaan dat al deze objecten voldoen aan de universele eigenschappen. Tot slot volgt de lineariteit van de categorie $Sh(X)$ ook uit de lineariteit van de categorie *Ab*. Voor het verifiëren dat de categorie van schoven van $\mathcal{A}$-modulen over X ook abels is, gaat men volledig analoog te werk.

5.2 Cocomplexen en resoluties

We hebben in de taal van abelse categorieën de mogelijkheid de eerder besproken cocomplexen te generaliseren(overigens geldt dit ook voor de complexen). We zullen hierbij hoofdstuk 4.2 van [Voi02] in grote lijnen volgen.

Definitie 5.2.1. Een ***cocomplex*** $M^{\cdot}$ in een abelse categorie is een rij van objecten M^i, voor $i \in \mathbb{Z}$, en morfismen $M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1}$ zodat $d^{i+1} \circ d^i = 0$.

De morfismen van deze cocomplexen zijn wederom directe generalisaties van de morfismen van cocomplexen van abelse groepen. Ofwel een morfisme $\phi : (M^{\cdot}, d_M) \to (N^{\cdot}, d_N)$ van cocomplexen is een collectie morfismen $\phi_i : M^i \to N^i$ waarvoor geldt dat $d^i_N \circ \phi_i = \phi_{i+1} \circ d^i_M$.

Ook hier geldt weer dat we over zogenaamde ***exacte rijen*** of ***exacte cocomplexen*** kunnen spreken, dit zijn cocomplexen waarvoor voor alle i geldt dat de geïnduceerde pijl van $Im\, d^i$ naar $Ker\, d^{i+1}$ een isomorfisme is. We kunnen ook over een ***korte exacte rij*** spreken, dit is een exacte rij van de vorm:

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} D \to 0.$$

Net als in de categorie van R-modulen kunnen we de monomorfismen en epimorfismen van een abelse categorie karakteriseren aan de hand van korte exacte rijtjes. Zo is het rijtje $0 \to A \xrightarrow{\phi} B$ exact dan en slechts dan als ϕ een monomorfisme is. Evenzo is het rijtje $A \xrightarrow{\phi} B \to 0$ exact dan en slechts dan als ϕ een epimorfisme is.

Voor een korte exacte rij in een abelse categorie kunnen we net als bij modulen over het splitsen van zo'n rij spreken.

Definitie 5.2.2. We noemen een korte exacte rij $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} D \to 0$ ***gesplitst*** als er een isomorfisme h van B naar het biproduct $A \oplus D$ van A en D is, zodat $h \circ \phi$ de nauurlijke injectie van A in het biproduct is en $\psi \circ h^{-1}$ de natuurlijke projectie van het biproduct op C is.

Het bekende splitsingslemma voor korte exacte rijtjes van modulen generaliseert ook naar abelse categorieën en zal straks gebruikt worden. Om inzicht te krijgen in generalisaties van diagramlemma's, zoals we die kennen voor modulen, naar de context van abelse categorieën wordt de lezer verwezen naar hoofdstuk 8.4 van [ML78].

Zoals we in hoofdstuk 1.2 zagen, wil men bij een cocomplex vaak over cohomologie spreken. Ook dit laat zich uitdrukken in de termen die beschikbaar zijn voor een abelse categorie.

Definitie 5.2.3. Laat C een abelse categorie zijn en $M^\cdot$ een co-complex in deze categorie. We noemen

$$H^i(M^\cdot) \coloneqq Coker(d^{i-1} : M^{i-1} \to Ker\, d^i)$$

de ***cohomologie*** van graad i van $M^\cdot$.

Merk op dat deze definitie van cohomologie in de categorie van abelse groepen inderdaad overeenkomt met de eerder geïntroduceerde definitie van cohomologie. Wederom geldt, wegens soortgelijke observaties als in hoofdstuk 1, dat een morfisme van cocomplexen $\phi : M^\cdot \to N^\cdot$ een morfisme $H^i(\phi) : H^i(M^\cdot) \to H^i(N^\cdot)$ op alle cohomologie-objecten induceert. We komen later nog op deze cohomologie-objecten terug.

We willen nu kijken naar een specifiek soort van cocomplexen; de zogenaamde resoluties.

Definitie 5.2.4. Laat C een abelse categorie zijn en A een object in deze categorie. We noemen een cocomplex $M^i, i \in \mathbb{N}_0$ samen met een monomorfisme $A \xrightarrow{i} M^0$, ***een resolutie van*** A, als de rij

$$A \xrightarrow{j} M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \xrightarrow{d^1} M^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

exact is.

5.3 De Rham-resolutie en singuliere resolutie

Een terugkoppeling naar de stelling van de Rham is nu wel gepast, hiertoe introduceren we twee resoluties van schoven die van belang zijn voor het uiteindelijke bewijs van deze stelling.

Voorbeeld 5.3.1. De eerste resolutie die voor ons van belang zal zijn, is de de Rham-resolutie. Laat X een gladde variëteit zijn en laat Ω_X^k de schoof van k-vormen zijn als in voorbeeld 4.2.14. De uitwendige afgeleide $\Omega^k(X) \xrightarrow{d^k} \Omega^{k+1}(X)$ geeft een morfisme van schoven $\Omega_X^k \xrightarrow{d^k} \Omega_X^{k+1}$. Uit het lemma van Poincaré weten we dat lokaal geldt dat voor $k > 0$ gesloten vormen exact zijn. Ofwel voor $s \in Ker\, d^k(U)$ is er een open overdekking $(U_i)_{i \in I}$ van U, zodat $s|_{U_i} \in Im\, d^{k-1}(U_i)$. Wegens de alternatieve karakterisatie van het beeld zoals onder lemma 4.2.10 geldt nu dat $s \in Im\, d^{k-1}(U)$. We zien dat voor $k > 0$ de rij

$$\Omega_X^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} \Omega_X^k \xrightarrow{d^k} \Omega_X^{k+1}$$

exact is. Merk op dat $\Omega_X^0 = \mathcal{C}_X^\infty$ en dat de schoof van lokaal constante functies $\mathbb{R}_X$ gelijk is aan de kern van d^0. Dit leidt voor $n = dim\, X$ tot de volgende ***de Rham-resolutie*** van de constante schoof $\mathbb{R}_X$:

$$0 \to \mathbb{R}_X \xrightarrow{i} \Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Omega_X^n \to 0.$$

Let hierbij op dat dit een resolutie is van $\mathbb{R}_X$-modulen en niet van $\mathcal{C}_X^\infty$-modulen, de morfismen van schoven d^k zijn immers slechts morfismen van $\mathbb{R}_X$-modulen en ook $\mathbb{R}_X$ zelf is geen $\mathcal{C}_X^\infty$-moduul.

Voor het volgende voorbeeld hebben we nodig dat de exactheid van een rij van schoven ook kan worden nagegaan op de staken.

Lemma 5.3.2. *Een rij $F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H$ van schoven is exact dan en slechts dan als voor alle $x \in X$ de geïnduceerde rij op de staken $F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x$ exact is.*

Voor een bewijs wordt naar hoofdstuk 2.6 van [Vak17] verwezen. Ook hebben we het volgende resultaat nodig.

Lemma 5.3.3. *Laat F, G en K preschoven van abelse groepen over X zijn die samen met morfismen van preschoven ϕ en ψ de volgende rij vormen:*

$$F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} K.$$

Laat verder $x \in X$. Stel nu dat voor alle opens $x \in U \subset X$ geldt dat de rij

$$F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U) \xrightarrow{\psi_U} K(U)$$

exact is, dan is de geïnduceerde rij op de staken

$$F_x \xrightarrow{\phi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} K_x$$

ook exact.

Bewijs. Laat $s_x \in F_x$, met representant $s \in F(U)$, dan geldt dat

$$\psi_x(\phi_x(s_x)) = (\psi_U(\phi_U(s)))_x = 0_x,$$

ofwel

$$Im\,\phi_x \subset Ker\,\psi_x.$$

Laat nu $g_x \in Ker\,\psi_x$ met representant $g \in G(V)$, dan geldt dat er een open omgeving W van x is met $\psi_V(g)|_W = 0 \in K(W)$. Hieruit volgt dat $\psi_W(g|_W) = 0$ en dus dat er een $t \in F(W)$ is met $\phi_W(t) = g|_W$. We zien dus dat $\phi_x(t_x) = g_x$, ofwel dat

$$Ker\,\psi_x \subset Im\,\phi_x.$$

□

Het bovenstaande bewijs is direct te generaliseren naar het algemene geval van schoven van $\mathcal{A}$-modulen. Dan volgt nu het tweede voorbeeld van een resolutie van schoven.

Voorbeeld 5.3.4. Laat X een lokaal samentrekbare topologische ruimte zijn en laat C^k de preschoof zijn die voor $U \subset X$ open gegeven wordt door

$$U \mapsto C^k(U, \mathbb{R}),$$

waar $C^k(U, \mathbb{R})$ de singuliere k-coketens zijn zoals we die in hoofdstuk 2 tegenkwamen, met als bijbehorende restrictie-afbeeldingen de restricties van functies. De schoof geassocieerd aan deze preschoof noteren we als $\hat{C}^k$. De lineaire afbeeldingen $C^k(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{d^k} C^{k+1}(U, \mathbb{R})$, behorend bij het cocomplex $C^\bullet(U, \mathbb{R})$, induceren morfismen van schoven $\hat{C}^k \xrightarrow{d^k} \hat{C}^{k+1}$. Op deze wijze verkrijgen we het complex van schoven

$$\hat{C}^0 \xrightarrow{d^0} \hat{C}^1 \xrightarrow{d^1} \hat{C}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

We laten nu eerst zien dat deze rij exact is voor $k > 0$. Uit voorbeeld 2.0.8 weten we dat voor V samentrekbaar en $k > 0$ geldt dat $H^k_{Sing}(V) = 0$. Aangezien de ruimte X lokaal samentrekbaar is, volgt nu dat de geïnduceerde rij op de staken exact is voor $k > 0$. Wegens lemma 5.3.2 geldt dus ook dat de rij van schoven exact is voor $k > 0$.

Aan het feit, dat C^0 wordt gegeven door

$$U \mapsto Hom_{\mathbb{R}}(C_0(U), \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(\bigoplus_{x \in U} \mathbb{R} \cdot x, \mathbb{R}),$$

zien we dat we $C^0(U)$ kunnen beschouwen als de functies van U naar $\mathbb{R}$. Laat nu $U \subset X$ een wegsamenhangende open deelverzameling zijn. Laat $\sigma \in C_1(U)$ en $f \in (C^0)(U)$, dan volgt uit de vergelijking

$$d^0(f)(\sigma) = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))$$

en het feit dat U wegsamenhangend is dat

$$Ker\,(C^0(U) \xrightarrow{d^0} C^1(U)) = \{U \xrightarrow{f} \mathbb{R} |\, f \text{ is constant}\}.$$

Vervolgens weten we uit de topologie dat voor een lokaal wegsamenhangende ruimte geldt dat een functie constant is op de wegsamenhangscomponenten dan en slechts dan als deze functie lokaal constant is. Voor $V \subset X$ open geldt dus dat de rij

$$0 \to \mathbb{R}_X(V) \xrightarrow{i} C^0(V) \xrightarrow{d^1} C^1(V)$$

exact is. Vervolgens verkrijgen we nu via lemma 5.3.3 voor alle $x \in X$ de exacte rij van staken

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i_x} C^0_x \xrightarrow{d^0_x} C^1_x$$

welke wegens 5.3.2 de exacte rij van schoven

$$0 \to \mathbb{R}_X \xrightarrow{i} \hat{C}^0 \xrightarrow{d^0} \hat{C}^1$$

oplevert. Zodoende verkrijgen we de volgende ***singuliere resolutie*** van $\mathbb{R}_X$:

$$0 \to \mathbb{R}_X \xrightarrow{i} \hat{C}^0 \xrightarrow{d^0} \hat{C}^1 \xrightarrow{d^1} \hat{C}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

Ook dit is een een resolutie van $\mathbb{R}_X$-modulen.

5.4 Injectieve resoluties

We gaan nu verder met een specifiek soort resoluties, de zogenaamde injectieve resoluties. Deze resoluties zullen worden gebruikt in de constructie van afgeleide functoren. In het vervolg zullen we het gelijkheidsteken, =, enigzins misbruiken voor kanonieke isomorfismen om zo notationele overdaad te beperken.

Definitie 5.4.1. Een object I in een abelse categorie noemen we ***injectief***, als voor elk monomorfisme $A \xrightarrow{j} B$ en elk morfisme $A \xrightarrow{\phi} I$ een morfisme $B \xrightarrow{\psi} I$ bestaat, zodat $\phi = \psi \circ j$.

Voor een voorbeeld kijken we naar de categorie van abelse groepen. Hier dienen de deelbare groepen als injectieve objecten. Een bewijs van dit feit zou ons te ver doen afdwalen. De geïnteresseerde kan dit op de site [nLa] nalezen .

Een ***injectieve resolutie*** is een resolutie als in 5.2.4, waarbij het co-complex $M^\cdot$ bestaat uit injectieve objecten. We kijken nu naar de voorwaarde waaronder elk object in een categorie een injectieve resolutie toelaat.

Definitie 5.4.2. Een abelse categorie C heeft ***voldoende injectieve objecten*** als er voor elk object A in C een monomorfisme $A \xrightarrow{j} I$ naar een injectief object I bestaat.

Voorbeelden van categorieën met voldoende injectieve objecten worden gevormd door de categorie van abelse groepen en door de categorie van R-modulen. Voor uitgebreidere behandeling van deze feiten wordt wederom verwezen naar [nLa]. Het hebben van voldoende injectieve objecten is van belang voor de volgende stelling.

Stelling 5.4.3. *Voor C een abelse categorie met voldoende injectieve objecten geldt dat elk object A in C een injectieve resolutie heeft.*

Bewijs. Voor een object A in C is er een monomorfisme naar een injectief object

$$A \xrightarrow{j} I^0.$$

Nu hebben we ook een monomorfisme

$$Coker(j) \xrightarrow{j^0} I^1$$

naar een injectief object I^1. We definiëren d^0 nu als de samenstelling van j^0 met het morfisme $I \xrightarrow{g^0} Coker\, j$, behorend bij $Coker\, j$, ofwel $d^0 := g^0 \circ j^0$. Merk op dat inderdaad geldt dat $Im\, j = Ker\, d^0$ aangezien j^0 een monomorfisme is en $Ker\, g^0 = Im\, j$.

Wanneer we de resolutie hebben geconstrueerd tot en met I^k voor $k \geq 1$ gaan we als volgt verder. We hebben een morfisme

$$Coker(d^{k-1}) \xrightarrow{j^k} I^{k+1}$$

naar een injectief object I^{k+1} en het morfisme

$$I^k \xrightarrow{g^k} Coker(d^{k-1})$$

en definiëren nu $d^k := j^k \circ g^k$. Wegens een soortgelijke redenering als boven, zien we dat $Im(d^k) = Ker(d^{k+1})$ voor $k \geq 0$, ofwel de constructie leidt inderdaad tot een injectieve resolutie van A.

□

Er blijkt een verband te bestaan tussen injectieve resoluties van hetzelfde object. Om dit verband te kunnen duiden, hebben we eerst het volgende begrip nodig.

Definitie 5.4.4. Een ***homotopie*** H tussen twee morfismen van cocomplexen, $\phi : M^\cdot \to N^\cdot$ en $\psi : M^\cdot \to N^\cdot$, is een rij morfismen $H^i : M^i \to N^{i-1}$ waarvoor geldt dat $H^{i+1} \circ d^i_M + d^{i-1}_N \circ H^i = \phi_i - \psi_i$.

We zien dat het bestaan van een homotopie tussen twee morfismen ϕ en ψ van cocomplexen tot gevolg heeft dat de geïnduceerde morfismen $H^i(\phi)$ en $H^i(\psi)$ op de cohomologie-objecten gelijk zijn.

Stelling 5.4.5. *Laat C een abelse categorie zijn. Voor $A \xrightarrow{\phi} B$ een morfisme, een resolutie $A \xrightarrow{j} M^0$ en een injectieve resolutie $B \xrightarrow{i} I^0$, geldt dat er een morfisme van complexen $\phi^\cdot : M^\cdot \to I^\cdot$ is, waarvoor $\phi^0 \circ j = i \circ \phi$. Wanneer we twee morfismen $\phi^\cdot$ en $\psi^\cdot$ van cocomplexen hebben die aan de bovenstaande conditie voldoen, geldt dat er een homotopie tussen $\phi^\cdot$ en $\psi^\cdot$ bestaat.*

Bewijs. We maken eerst het morfisme ϕ^0. Merk op dat we een morfisme $A \xrightarrow{j\circ\phi} J^0$ hebben en een monomorfisme $A \xrightarrow{i} I^0$. Wegens de injectiviteit van het object J^0 krijgen we nu een morfisme $I^0 \xrightarrow{\phi^0} J^0$ zodat $j \circ \phi = \phi_0 \circ i$. Vervolgens zien we dat $d_J^0 \circ \phi_0 \circ i = 0$ ofwel we kunnen $d_J^0 \circ \phi_0$ via $Coker\, i$ factoriseren. Merk op dat ook d_I^0 via $Coker\, i$ factoriseert. Wegens de isomorfiestelling voor abelse categorieën en het feit dat $I^\cdot$ exact is, geldt dat $Im\, d_J^0 = Coker\, i$, ofwel dat het morfisme in de factorisatie een monomorfisme is. Het volgende diagram verduidelijkt de situatie:

$$\begin{tikzcd}
 & & J^1 \\
 & Coker\, i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
I^0 \arrow[ur] \arrow[rr, "d_I^0"] \arrow[uurr, bend left, "d_J^0 \circ \phi^0"] & & I^1 \arrow[uu, dotted, "\phi^1"']
\end{tikzcd}$$

Hierbij wordt ϕ^1 verkregen aangezien het morfisme $Coker\, i \to I^1$ een monomorfisme is en wegens het feit dat J^1 een injectief object is.

Om de morfismen ϕ^k, voor $k \geq 2$, te verkrijgen, gaan we analoog te werk. Voor $k + 1 \geq 2$ geeft het volgende diagram de situatie weer:

$$\begin{tikzcd}
 & & J^{k+1} \\
 & Coker\, d_I^{k-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
I^k \arrow[ur] \arrow[rr, "d_I^k"] \arrow[uurr, bend left, "d_J^k \circ \phi^k"] & & I^{k+1} \arrow[uu, dotted, "\phi^{k+1}"']
\end{tikzcd}$$

Hierbij wordt wederom gebruikt dat $Coker\, d_I^{k-1} \to I^{k+1}$ een monomorfisme is (aangezien $Coker\, d_I^{k-1} \cong Im\, d_I^k$) en dat J^{k+1} een injectief object is. Via een soortgelijk diagrammenjagen verkrijgt men ook een homotopie tussen $\phi^\cdot$ en $\psi^\cdot$ waarvoor de eigenschap uit de stelling geldt.

□

Als we kijken naar twee injectieve resoluties, $I^\cdot$ en $J^\cdot$, van hetzelfde object A geldt dat we twee morfismen van cocomplexen krijgen, $I^\cdot \xrightarrow{\phi^\cdot} J^\cdot$ en $J^\cdot \xrightarrow{\psi^\cdot} I^\cdot$, wanneer we de stelling toepassen op $A \xrightarrow{Id_A} A$. Vervolgens zien we dat $\psi^\cdot \circ \phi^\cdot : I^\cdot \to I^\cdot$ en $Id_{I^\cdot}$ aan de eigenschap van het via de stelling verkregen morfisme $I^\cdot \to I^\cdot$ voldoen. Dit betekent dat $Id_{I^\cdot}$ en $\psi^\cdot \circ \phi^\cdot$ homotoop zijn. Soortgelijk geredeneerd zien we dat ook $Id_{J^\cdot}$ en $\phi^\cdot \circ \psi^\cdot$ homotoop zijn. De geïnduceerde morfismen, $H^i(\phi^\cdot)$ en $H^i(\psi^\cdot)$, op de cohomologie-objecten zijn dus isomorfismen. In het algemeen noemt men deze situatie een homotopie-equivalentie.

Definitie 5.4.6. Wanneer voor twee morfismen van cocomplexen $\phi^\cdot : M^\cdot \to N^\cdot$ en $\psi^\cdot : N^\cdot \to M^\cdot$ geldt dat er een homotopie H tussen $Id_{M^\cdot}$ en $\psi^\cdot \circ \phi^\cdot$ bestaat en dat er een homotopie H' tussen $Id_{N^\cdot}$ en $\phi^\cdot \circ \psi^\cdot$ bestaat, noemt men $\phi^\cdot$ en $\psi^\cdot$ ***homotopie-equivalent***.

Aangezien we met twee injectieve resoluties, ofwel exacte cocomplexen, van hetzelfde object A te maken hebben, is het isomorf zijn van de cohomologie-objecten niet zo verbazingwekkend. De cohomologie-objecten zijn nu immers nul voor $k > 0$ en voor $k = 0$ zijn de cohomologie-objecten isomorf aangezien het beide resoluties zijn van A. Bij de constructie van de afgeleide functoren in het volgende hoofdstuk zal het homotopie-equivalent zijn van de morfismen echter wel een rol spelen.

5.5 Afgeleide functoren

Aangezien er extra structuur op een abelse categorie zit, kunnen we ook over functoren spreken die iets met deze structuur doen.

Definitie 5.5.1. We noemen een Functor $C \xrightarrow{F} C'$ tussen twee lineaire categorieën ***additief***, als voor alle objecten A en B in C, de functie $F(-) : Hom(A,B)_C \to Hom(F(A),F(B))_{C'}$ een groepshomomorfisme is.

Naast additieve functoren bestaan ook additieve categorieën, dit zijn categorieën die aan de eerste drie voorwaarde van de definitie 5.1.12 van een abelse categorie voldoen.

Stelling 5.5.2. *Elke additieve functor $F : C \to D$ tussen twee additieve categorieën C en D bewaart het nulobject en het biproduct.*

Bewijs. Dat het biproduct bewaard blijft, volgt direct uit de karakterisering van het biproduct in definitie 5.1.4. Aangezien $F(-) : Hom(A,B)_C \to Hom(F(A),F(B))_{C'}$ een groepshomomorfisme is, gaat $0 \in Hom(0,0)$, als eenheidselement, naar $0 \in Hom(F(0),F(0))$. Er geldt echter ook dat $0 = Id_0$, ofwel dat $F(0 \xrightarrow{0} 0) = F(0) \xrightarrow{Id_{F(0)}} F(0)$. We zien dat $0 = Id_{F(0)}$ en dus dat $F(0)$ het nulobject in D is.

□

Een andere eis die men aan een functor tussen abelse categorieën kan stellen, is de volgende:

Definitie 5.5.3. Laat C en C' twee abelse categorieën zijn. We noemen een functor $F : C \to C'$ ***links-exact*** als deze additief is en voor alle morfismen $A \xrightarrow{\phi} B$ in de categorie C geldt dat het natuurlijke morfisme $F(Ker\,\phi) \xrightarrow{h} Ker\,F(\phi)$ een isomorfisme is.

Een voorbeeld van een links-exacte functor is de functor $Hom(M,-) : Ab \to Ab$, voor M een abelse groep, die wordt gegegeven door $A \mapsto Hom(M,A)$. Een voorbeeld dat voor ons van belang zal zijn is de functor $\Gamma : Sh(X) \to Ab$ gegeven door $F \mapsto F(X)$. Merk op dat deze functor bestaat in analoge vorm voor schoven van $\mathcal{A}$-modulen. We noemen deze functor Γ, ***de functor van globale secties***.

Nu hebben we alle begrippen die nodig zijn om de afgeleide functoren te introduceren.

Definitie 5.5.4. Laat nu C en C' twee abelse categorieën zijn, waarbij C voldoende injectieve objecten heeft. Laat $C \xrightarrow{F} C'$ een links-exacte functor zijn. Kies nu voor alle objecten A in C een injectieve resolutie $I^{\cdot}_A$. Dit geeft ons cocomplexen $F(I^{\cdot}_A)$ in C' en we krijgen zo voor $i \in \mathbb{N}$ de ***afgeleide functoren*** gegeven door:

$$R^iF(A) \coloneqq H^i(F(I^{\cdot}_A)).$$

Belangrijk is om op te merken dat de afgeleide functoren R^iF geen daadwerkelijke functoren zijn. Het object $R^iF(A)$ is immers afhankelijk van de gekozen injectieve resolutie van A. Wel blijkt dat de afgeleide functoren welgedefinieerd zijn tot op kanoniek isomorfisme.

Stelling 5.5.5. *De objecten $RF^i(A)$ als in definitie 5.5.4 zijn onafhankelijk van de gekozen injectieve resoluties tot op kanonieke isomorfismen.*

Bewijs. Stel dat we in de situatie van definitie 5.5.4 twee injectieve resoluties $I^{\cdot}$ en $J^{\cdot}$ van een object A in C hebben. Uit stelling 5.4.5 weten we dat we morfismen van cocomplexen $\phi : I^{\cdot} \to J^{\cdot}$ en $\psi : J^{\cdot} \to I^{\cdot}$ krijgen en uit de opmerking onder die stelling weten we dat deze morfismen homotopie-equivalent zijn. Nu geldt dat $F(\phi) : F(I^{\cdot}) \to F(J^{\cdot})$ en $F(\psi) : F(J^{\cdot}) \to F(I^{\cdot})$ morfismen van de cocomplexen in C' zijn. Aangezien de functor F additief is, geldt dat ook de morfismen $F(\phi)$ en $F(\psi)$ homotopie-equivalent zijn. Dit betekent dat $F(\phi^{\cdot})$ en $F(\psi^{\cdot})$ isomorfismen induceren tussen de cohomologie-objecten $H^i(F(I^{\cdot}))$ en $H^i(F(J^{\cdot}))$.
Merk ook op dat het verkregen morfisme $\phi^{\cdot}$ wegens stelling 5.4.5 uniek is tot op homotopie. Wederom geldt wegens het additief zijn van de functor F dat ook $F(\phi^{\cdot})$ uniek is tot op homotopie, ofwel het geïnduceerde morfisme op de cohomologie-objecten is een cononiek isomorfisme.

□

Ook hebben de afgeleide functoren RF^i de volgende functoriële eigenschap.

Stelling 5.5.6. *Laat de situatie zijn zoals in definitie 5.5.4 en laat $A \xrightarrow{\phi} B$ een morfisme zijn. Voor injectieve resoluties $I^{\cdot}$ van A en $J^{\cdot}$ van B geldt dat er voor $i \geq 0$ kanonieke morfismen $R^i(\phi) : R^iF(A) \to R^iF(B)$ geïnduceerd door ϕ zijn. Hierbij zijn de afgeleide objecten $R^iF(A)$ en $R^iF(B)$ afkomstig van de resoluties $I^{\cdot}$ en $J^{\cdot}$.*

Bewijs. We krijgen wegens stelling 5.5.4 en een gelijke redenering als in het bewijs van stelling 5.5.5 een morfisme $F(\phi^{\cdot}) : F(I^{\cdot}) \to F(J^{\cdot})$ dat uniek is tot op homotopie, ofwel we krijgen onafhankelijk van de keuze voor $\phi^{\cdot}$ morfismen

$$R^iF(\phi) : R^iF(A) \to R^iF(B)$$

voor $i \geq 0$.

□

Nu we de naam 'afgeleide functor' wat beter kunnen verdedigen, gaan we naar wat eigenschappen van de afgeleide objecten kijken. Om dit niet al te onzinnig te laten zijn, gaan we ervan uit dat de afgeleide functoren bestaan, ofwel dat we ons in de situatie van definitie 5.5.4 bevinden.

Merk allereerst op dat voor een object A met injectieve resolutie $I^{\cdot}$ in C geldt dat

$$R^0F(A) = Ker(F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I^1)) = F(Ker(I^0 \xrightarrow{d^0} I^1)) = F(A),$$

aangezien F een links exacte functor is. Vervolgens blijkt dat we via deze afgeleide functoren aan elke korte exacte rij in C een lange exacte rij in C' kunnen koppelen. Om dit te doen, hebben we eerst het volgende resultaat nodig.

Lemma 5.5.7. *Voor een korte exacte rij*

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} D \to 0$$

in een abelse categorie C met voldoende injectieve objecten bestaan injectieve resoluties $A \xrightarrow{i} I^{\cdot}$, $B \xrightarrow{j} J^{\cdot}$ en $D \xrightarrow{k} K^{\cdot}$, zodat deze resoluties een kort exact rijtje van cocomplexen

$$0 \to I^{\cdot} \xrightarrow{\phi^{\cdot}} J^{\cdot} \xrightarrow{\psi^{\cdot}} K^{\cdot} \to 0$$

vormen met morfismen waarvoor geldt dat $\phi^0 \circ i = j \circ \phi$ en dat $\psi^0 \circ j = k \circ \psi$.

Het bewijs hiervan laten we achterwege, om verdere technische stukken als in het bewijs van 5.4.5 te vermijden, en is te vinden bij lemma 4.29 in [Voi02].

Stelling 5.5.8. *Voor de situatie als in definitie 5.5.4 geldt dat we voor een korte exacte rij*

$$0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} D \to 0$$

in C, een lange exacte rij

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(\phi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(D) \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(D) \to \dots$$

in C' kunnen construeren.

Bewijs. Uit lemma 5.5.7 verkrijgen we de korte exacte rij van cocomplexen

$$0 \to I^{\cdot} \xrightarrow{\phi^{\cdot}} J^{\cdot} \xrightarrow{\psi^{\cdot}} K^{\cdot} \to 0.$$

Aangezien de objecten I^k injectief zijn, bestaat voor elke korte rij

$$0 \to I^k \xrightarrow{\phi^k} J^k \xrightarrow{\psi^k} K^k \to 0$$

een retractie

$$J^k \xrightarrow{r} I^k$$

met $r \circ \phi^k = Id_{I^k}$. Wegens de generalisatie van het splitsingslemma zijn deze korte exacte rijen dus gesplitst. Vervolgens zien we aan definitie 5.2.2 en het feit dat het biproduct bewaard blijft onder F, dat de rijtjes

$$0 \to F(I^k) \xrightarrow{F(\phi^k)} F(J^k) \xrightarrow{F(\psi^k)} F(K^k) \to 0$$

ook gesplitst zijn. Uit de generalisatie van stelling 1.1.5 naar abelse categorieën volgt nu dat we een lange exacte rij op de afgeleide objecten verkrijgen. ☐

Een andere eigenschap van de afgeleide functoren is dat voor injectieve objecten I in C geldt dat $R^iF(I) = 0$ voor $i \geq 1$. Aangezien I injectief is, kunnen we immers de injectieve resolutie $0 \to I \xrightarrow{Id} I \to 0 \to \dots$ nemen. Uit de definitie van afgeleide functoren volgt nu direct dat $R^iF(I) = 0$ voor $i \geq 1$. We willen deze eigenschap die injectieve objecten bezitten een naam geven.

Definitie 5.5.9. Laat de situatie zijn zoals in definitie 5.5.4, dan noemen we een object A in C ***acyclisch voor de functor F*** als geldt dat $R^iF(A) = 0$ voor alle $i \geq 1$.

Het blijkt dat resoluties bestaande uit objecten die acyclisch zijn voor de functor F gebruikt kunnen worden om de afgeleide objecten uit te rekenen. De volgende stelling maakt dit precies.

Stelling 5.5.10. *Laat de situatie zoals in definitie 5.5.4 zijn. Laat verder $A \xrightarrow{i} M^0$ een resolutie zijn met M^i, voor $i \geq 0$, acyclisch voor de functor F. Dan geldt dat de cohomologie-objecten $H^i(F(M^\cdot))$ van het co-complex $F(M^\cdot)$ gelijk zijn aan $R^iF(A)$.*

Bewijs. We zullen deze stelling met inductie bewijzen. We kijken allereerst naar het korte exacte rijtje

$$0 \to A \xrightarrow{j} M^0 \to B \to 0,$$

waar $B = Coker\, j$. Door op te merken dat $Ker\, Coker\, j = Im\, j = ker\, d^0$ en het jagen van wat diagrammen volgt dat het geïnduceerde morfisme $Coker\, j \xrightarrow{\bar{d^0}} M^1$ een monomorfisme is en dat

$$0 \to B \xrightarrow{\bar{d^0}} M^1 \xrightarrow{d^1} M^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

een resolutie vormt. Via de korte exacte rij krijgen we wegens stelling 5.5.8 een lange exacte rij op de afgeleide objecten. Aangezien M^0 acyclisch is voor F kunnen we lange exacte rij als volgt samenvatten:

$$R^iF(B) = R^{i+1}(A) \text{ voor } i \geq 1.$$

Door wederom wat diagrammen te jagen zien we dat

$$R^1F(A) = Im(F(B) \to R^1F(A)) = Coker(F(M^0) \to F(B)).$$

Vervolgens merken we op dat $B \xrightarrow{\bar{d^0}} M^1$ een monomorfisme is en dus dat $B = Im(B \xrightarrow{\bar{d^0}} M^1) = Ker(M^1 \xrightarrow{d^1} M^2)$. Wegens de links-exactheid van de functor F geldt nu dat

$$Coker(F(M^0) \to F(B)) = Coker(F(M^0) \to Ker(F(M^1) \xrightarrow{d^1} F(M^2))) = H^1(F(M^\cdot)).$$

Tot slot volgt de stelling via inductie uit de vergelijking $R^iF(B) = R^{i+1}(A)$, voor $i \geq 1$, en de verkregen resolutie van B. $\square$

Deze stelling zal cruciaal blijken om de stelling van de Rham te bewijzen.

6 Schovencohomologie

Na de algemeenheid van hoofdstuk 5 is het tijd de theorie van afgeleide functoren toe te passen op de categorie van schoven van $\mathcal{A}$-modulen. De hier opgebouwde theorie zal leidend zijn voor het uiteindelijke bewijs van de stelling van de Rham in hoofdstuk 7.

6.1 Schovencohomologie

Om de theorie van afgeleide functoren toe te kunnen passen, dienen we ons eerst in de situatie van definitie 5.5.4 te begeven. We kijken naar de categorie $Sh(X)$ van schoven van $\mathcal{A}$-modulen over een topologische ruimte X en naar de links-exacte functor $\Gamma : Sh(X) \to {}_RMod$ gegeven door $F \mapsto F(X)$ met als bijbehorende ring $\mathcal{A}(X)$.

Om over afgeleide functoren te kunnen spreken, dienen we nog na te gaan dat onze categorie $Sh(X)$ voldoende injectieve objecten heeft. Hiertoe introduceren we de volgende schoven.

Definitie 6.1.1. Laat F een schoof in $Sh(X)$ zijn. De ***Godement-schoof*** F_{Gode} behorend bij de schoof F is de schoof die voor $U \subset X$ open wordt gegegeven door

$$F_{Gode}(U) = \prod_{x \in U} F_x,$$

waar F_x de staak van F in x is. Voor $V \subset U$, een inclusie van opens, worden de restrictie afbeeldingen $Res_{U,V}$: $F_{Gode}(U) \to F_{Gode}(V)$ gegegeven door de voor de hand liggende projecties.

Men kan eenvoudig de schoof axioma's nagaan voor Godement-schoven. Merk op dat er een kanoniek morfisme van schoven $F \xrightarrow{i} F_{Gode}$ bestaat. Dit morfisme wordt gegeven door

$$i_U(s) = \prod_{x \in U} s_x,$$

ofwel een sectie wordt naar het product van zijn kiemen gestuurd. Stel nu dat voor $s \in F(U)$ geldt dat $i_U(s) = 0$, dan betekent dit dat $s_x = 0$ voor alle $x \in U$. Aangezien F een schoof is, wil dit zeggen dat $s = 0 \in F(U)$, ofwel i_U is injectief voor alle $U \subset X$ open en dus is het morfisme van schoven $F \xrightarrow{i} F_{Gode}$ injectief. Merk op dat monomorfismen in $Sh(X)$ hetzelfde zijn als de injectieve morfismen van definitie 4.2.9 (overigens geldt ook dat de epimorfismen in $Sh(X)$ bestaan uit de surjectieve afbeeldingen van definitie 4.2.10).

Vervolgens merken we op dat de categorie van R-modulen voldoende injectieve objecten heeft. We hebben dus voor elke staak F_x voor $x \in X$ injectief homomorfisme $F_x \xrightarrow{j_x} I_x$ naar een injectief moduul I_x. Deze injectieve objecten I_x geven aanleiding tot de schoof F_{Inj} die gegeven wordt door

$$F_{Inj}(U) = \prod_{x \in U} I_x.$$

Via de injectieve moduul homomorfismen krijgen we nu een injectief morfisme van schoven $F_{Gode} \xrightarrow{j} F_{Inj}$ waar voor $U \subset X$ open, j_U wordt gegeven door

$$(s_x)_{x \in U} \mapsto (j_x(s_x))_{x \in U}.$$

Via de samenstelling $F \xrightarrow{i} F_{Gode} \xrightarrow{j} F_{Inj}$ zien we dat elke schoof F een injectief morfisme naar een F_{Inj} toelaat. We dienen nu nog na te gaan dat de schoven F_{Inj} injectieve objecten zijn in de categorie $Sh(X)$. Een bewijs van de injectiviteit van F_{Inj} gebruikt wat meer categorische taal dan tot nu toe in deze scriptie geïntroduceerd is en kan men vinden bij propositie III.2.2 van [Har77]. We concluderen dat de categorie van schoven $Sh(X)$ voldoende injectieve objecten heeft en kunnen nu dus spreken over de afgeleide functoren van $R^i\Gamma$.

Voor schoven en de functor van globale secties Γ krijgen de afgeleide objecten een speciale naam en notatie.

Definitie 6.1.2. Voor $Sh(X)$ de categorie van schoven van $\mathcal{A}$-modulen over een topologische ruimte X en de functor van globale secties $\Gamma : Sh(X) \to {}_RMod$, vormen de objecten

$$H^i(X, F) \coloneqq R^i\Gamma(F)$$

de ***cohomologie van schoven***.

6.2 Acyclische schoven

In het vervolg is $Sh(X)$ wederom de categorie van schoven van van $\mathcal{A}$-modulen. We zullen nu wat soorten schoven in $Sh(X)$ bespreken die acyclisch zijn voor de functor Γ van globale secties.

Definitie 6.2.1. We noemen een schoof F in $Sh(X)$ ***slap*** als voor alle inclusies van opens $V \subset U$ geldt dat $Res_{U,V} : F(U) \to F(V)$ surjectief is.

Het is eenvoudig in te zien dat de Godement-schoof F_{Gode} en de schoof F_{Inj} behorend bij een schoof F slap zijn.

Stelling 6.2.2. *Slappe schoven zijn acyclisch voor de functor* Γ*.*

Bewijs. Laat F een slappe schoof zijn. We kijken nu naar de exacte rij van schoven

$$0 \to F \xrightarrow{i} I \xrightarrow{f} G \to 0,$$

waar $I = F_{inj}$ de injectieve schoof is zoals hierboven geconstrueerd en $G = Coker(F \xrightarrow{i} G)$ de cokern van de inbedding is.

We laten nu eerst zien dat voor alle open verzamelingen $U \subset X$ de afbeelding

$$I(U) \xrightarrow{f_U} G(U)$$

surjectief is. Laat hiervoor $\sigma \in G(U)$. Uit de exactheid van het rijtje schoven volgt nu dat er opens $V, W \subset U$ zijn, waarvoor er $\tau_V \in I(V)$ en $\tau_W \in I(W)$ zijn met

$$f_V(\tau_V) = \sigma|_V \text{ en } f_W(\tau_W) = \sigma|_W.$$

Vervolgens kijken we naar $\tau_V|_{V\cap W} - \tau_W|_{V\cap W} \in F(V \cap W)$, waarbij F als deelschoof van I wordt beschouwd en we gebruik maken van de exactheid van het rijtje. Aangezien F slap is, is er een sectie $\chi_V \in F(V)$ waarvoor geldt dat $\chi_V|_{V\cap W} = \tau_V|_{V\cap W} - \tau_W|_{V\cap W}$. Nu nemen we $\tau'_V = \tau_V - \chi_V \in I(V)$ en zien we dat $\tau'_V|_{V\cap W} = \tau_W|_{V\cap W}$. We werken met schoven en krijgen dus een unieke sectie $\tau \in I(V \cup W)$, waarvoor $\tau|_V = \tau'_V$ en $\tau|_W = \tau_W$. Merk op dat $f_V(\tau|_V) = f_V(\tau_V - \chi_V) = \sigma|_V$ en dat $f_W(\tau|_W) = \sigma|_W$. Door wederom in herinnering te brengen dat we met schoven te maken hebben, volgt dat $f_{V\cup W}(\tau) = \sigma|_{V\cup W}$.

Vervolgens kijken we naar tupels (T, t), waar $T \subset U$ open is en $t \in I(T)$ waarvoor $f_T(t) = \sigma|_T$. We introduceren hierop de ordeningsrelatie gegeven door

$$(T, t) \leq (T', t') \iff T \subset T' \text{ en } t = t'|_T.$$

Laat P nu een totaal geordende verzameling van deze tupels zijn. Dan is er een bovengrens (T, t) voor de keten P met $T = \bigcup_i T_i$, waarbij de T_i uit P worden genomen en $t \in I(T)$ verkregen wordt via de schoofeigenschap van I. Wegens het lemma Zorn bestaat er nu een maximaal element voor deze ordeningsrelatie. Stel nu dat voor dat maximale element (M, m) geldt dat $M \neq U$, dan nemen we $x \in U^C$ en een open omgeving U_x van x waarop $\sigma|_{U_x}$ lift. Wegens het bovenstaande argument krijgen we nu een nieuw tupel (M', m'), waarvoor geldt dat $(M', m') > (M, m)$. Dit is in tegenspraak met de maximaliteit van (M, m) en hieruit volgt dat het maximale element van de vorm (U, t) is. We zien dat f_U surjectief is.

Vervolgens krijgen we een lange exacte rij van afgeleide objecten waarin $H^k(X, I) = 0$ voor $k > 0$ aangezien I injectief is. We zien dat $(H^0(X, I) \to H^0(X, G)) = (I(X) \xrightarrow{f_X} G(X))$ en dit is wegens het voorgaande een surjectieve afbeelding. Hieruit volgt dat $G(X) = ker(G(X) \to H^1(X, F))$ en dus dat

$$0 = Im(G(X) \to H^1(X, F)) = Ker(H^1(X, F) \to 0) = H^1(X, F).$$

Verder zien we ook aan de lange exacte rij dat geldt dat

$$H^k(X, F) = H^{k-1}(X, G) \text{ voor } k - 1 \geq 1.$$

Door op te merken dat G ook een slappe schoof is wegens de surjectiviteit van de f_U, verkrijgen we de stelling nu door inductie toe te passen.

$\square$

Voor een schoof F in $Sh(X)$ bestaat altijd een resolutie van slappe schoven. Deze ***Godement-resolutie*** wordt vekregen door telkens

$$S^{k+1} := (S^k_{Gode}/S^k)_{Gode}$$

als volgende schoof in onze resolutie te nemen.

Vervolgens richten we ons op een andere soort acyclische schoven; de fijne schoven.

Definitie 6.2.3. Laat $(X, \mathcal{A})$ een R-ruimte, definitie 4.1.9, zijn en laat F een schoof van $\mathcal{A}$-modulen zijn. We noemen de schoof F ***fijn*** als er voor elke open overdekking $(U_i)_{i \in I}$ van X een verzameling functies $f_i \in \mathcal{A}(X)$ voor $i \in I$ bestaat, die een eenheidspartitie ondergeschikt aan de overdekking $(U_i)_{i \in I}$ vormt.

Stelling 6.2.4. *Fijne schoven zijn acyclisch voor de functor* Γ*.*

Bewijs. Laat F een fijne schoof zijn. Deze schoof laat een resolutie van slappe schoven S^k van $\mathcal{A}$-modulen toe via de bovengenoemde Godement-resolutie. Via stelling 6.2.2 en 5.5.10 weten we dat voor $k > 0$ geldt dat

$$H^k(X, F) = Ker(\Gamma(S^k) \to \Gamma(S^{k+1}))/Im(\Gamma(S^{k-1}) \to \Gamma(S^k)).$$

Neem nu een

$$\alpha \in Ker(\Gamma(S^k) \to \Gamma(S^{k+1})) = Ker(S^k \to S^{k+1})(X).$$

Aangezien de resolutie $S^{\cdot}$ exact is geldt dat

$$Ker(S^k \to S^{k+1})(X) = Im(S^{k-1} \to S^k)(X).$$

Ofwel er is een open overdekking $(U_i)_{i \in I}$ van X waarvoor geldt dat er $\beta_i \in S^{k-1}(U_i)$ met $d_{U_i}(\beta_i) = \alpha|_{U_i}$ zijn. We nemen nu een eenheidspartitie f_i ondergeschikt aan deze overdekking en richten ons op het element

$$\beta = \sum_i f_i \beta_i' \in S^{k-1}(X),$$

waar $\beta_i' \in S^{k-1}(X)$ een sectie is waarvoor geldt dat $\beta_i'|_{U_i} = \beta_i$. Vervolgens merken we op dat de schoof S^k een Godement-schoof is, ofwel van de vorm

$$S^k(U) = \prod_{x \in U} J_x,$$

waar de J_x staken zijn. Aangezien de schoof S^k verkregen is via het herhaaldelijk nemen van quotiënten en Godement-schoven èn de gesloten verzameling $supp(f_i)$, bevat is in U_i, geldt dat $f_i\, s = 0$ voor $s \in J_x$ met $x \notin U_i$. We zien dus dat het element $f_i \alpha \in S^k(X)$ wordt gegeven door $f_i \alpha_i$ in J_x als $x \in U_i$, waar α_i de component van $\alpha|_{U_i}$ in J_x is, en 0 voor J_x met $x \notin U_i$. Aangezien S^k een Godement-schoof is, geldt voor een ander element $\gamma \in S^k(X)$ met $\gamma|_{U_i} = \alpha|_{U_i}$ dat $f_i \gamma = f_i \alpha$. Hieruit volgt dat

$$d_X(\sum_i f_i \beta_i') = \sum_i f_i\, d_X(\beta_i') = \sum_i f_i \alpha = \alpha,$$

waar de sommaties mogelijk zijn en door d_X gehaald kunnen worden omdat deze sommaties lokaal eindig zijn. We concluderen dat

$$Ker(\Gamma(S^k) \to \Gamma(S^{k+1})) = Im(\Gamma(S^{k-1}) \to \Gamma(S^k))$$

en dus $H^k(X, F) = 0$ voor $k > 0$.

□

7 De stelling van de Rham

Dan is het nu eindelijk tijd om de stelling, waaraan deze scriptie haar naam te danken heeft, te bewijzen. Het bewijs zal neerkomen op het isomorf praten van $H^k_{dR}(X) = H^k(X, \mathbb{R}_X)$ en van $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R}) \cong H^k(X, \mathbb{R}_X)$. We beginnen met het eerste isomorfisme.

Stelling 7.0.1. *Voor X een gladde variëteit en $k \in \mathbb{N}_0$ geldt dat*

$$H^k_{dR}(X) = H^k(X, \mathbb{R}_X),$$

ofwel kanoniek isomorf zijn.

Bewijs. We kijken naar de de Rham-resolutie van $\mathbb{R}_X$, zie voorbeeld 5.3.1. Aangezien een gladde variëteit X voor elke open overdekking $(U_i)_{i\in I}$ van X een eenheidspartitie ondergeschikt aan deze overdekking toelaat, waarbij de $f_i \in \mathcal{C}^\infty_X(X)$, en Ω^k_X schoven van $\mathcal{C}^\infty_X$-modulen zijn, geldt dat de schoven Ω^k_X fijn zijn. Nu volgt uit stelling 6.2.4 en stelling 5.5.10 dat

$$H^k_{dR}(X) = H^k(X, \mathbb{R}_X).$$

$\square$

Vervolgens richten we ons op de singuliere cohomologie.

Stelling 7.0.2. *Voor X een lokaal samentrekbare topologische ruimte en $k \in \mathbb{N}_0$, geldt dat*

$$H^k_{Sing}(X, \mathbb{R}) \cong H^k(X, \mathbb{R}_X),$$

ofwel isomorf zijn.

Het bewijs van deze stelling zoals dat in stelling 4.47 van [Voi02] gegeven wordt, poogt aan te tonen dat de singuliere resolutie van voorbeeld 5.3.4 een resolutie van slappe schoven is. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het feit dat voor een lokaal samentrekbare topologische ruimte X geldt dat voor alle $U \subset X$ open de natuurlijke afbeelding

$$C^k(U) \xrightarrow{u_U} \hat{C}^k(U)$$

een surjectie is. Helaas laat het volgende tegenvoorbeeld zien dat dit geen feit, maar slechts fictie is.

Voorbeeld 7.0.3. Laat X het quotiënt zijn van $\mathbb{R} \times \{a\}$ en $\mathbb{R} \times \{b\}$ met de equivalentierelatie $(x, a) \equiv (x, b) \iff x \neq 0$, ofwel X is de reële lijn met dubbele oorsprong. We geven de ene oorsprong aan met 0 en de andere oorsprong met $0'$ en kijken naar de open deelverzamelingen $U = X\backslash 0$ en $V = X\backslash 0'$. Laat $f_1 \in C^1(U)$ gegeven zijn door $f_1 = 0$ en laat $f_2 \in C^1(V)$ voor $\alpha \in \Sigma_1(V)$ gegeven zijn door

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{als } \alpha \text{ een lineair pad is met als beeld } [\epsilon, 2\epsilon]\text{, waar } \epsilon > 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

Merk op dat $U \cap V = \mathbb{R}\backslash\{0, 0'\}$ en dat voor elk element $x \in U \cap V$ een open omgeving $x \in W_x \subset U \cap V$ bestaat, zodat voor alle $\epsilon > 0$ geen deelverzameling van de vorm $[\epsilon, 2\epsilon]$ hierin bevat ligt. In de verschoving $C^1 \xrightarrow{u} \hat{C}^1$ van C^1 geldt dus dat er een sectie $f \in \hat{C}^1(X)$ is, waarvoor $f|_U = u_U(f_1)$ en $f|_V = u_V(f_2)$. Er is echter geen sectie $f' \in C^1(X)$ waarvoor geldt dat $f'|_U = f_1$ en dat $f'|_V = f_2$, aangezien elke open omgeving van $0'$ (en 0) een deelverzameling van de vorm $[\epsilon, 2\epsilon]$ bevat. We zien dus dat de afbeelding u_X geen surjectie is.

Een alternatief bewijs van de stelling 7.0.2 wordt gegeven in het artikel van Yehonatan Sella [Sel16]. Het precieze bewijs is te uitgebreid om in deze bachelorscriptie te behandelen. Grofweg wordt er een nieuwe resolutie $D^\cdot$ van $\mathbb{R}_X$ geïntroduceerd. Deze resolutie is slap en heeft afgeleide objecten isomorf aan $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$. Op deze wijze volgt dat $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ isomorf is aan $H^k(X, \mathbb{R}_X)$. Helaas durf ik niet te beweren dat het bewijs in [Sel16] een kanoniek ismorfisme tussen $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ en $H^k(X, \mathbb{R}_X)$ oplevert, zodoende is de bewering in 7.0.2 voorzichtiger dan in stelling 7.0.1.

De stelling van de Rham volgt nu rechtstreeks uit stelling 7.0.1 en 7.0.2.

Stelling 7.0.4. *(de stelling van de Rham) Voor X een gladde variëteit en $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $H^k_{dR}(X)$ en $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ isomorf zijn.*

8 Discussie

We zullen nu de stelling van de Rham in een wat bredere context leggen en kijken naar interessante consequenties.

De belangrijkste consequentie is uiteraard dat voor een variëteit X uit het isomorfisme tussen $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$ en $H^k_{dR}(X)$ volgt dat de exactheid van gesloten $k-$vormen afhankelijk is van puur topologische beschouwingen; op deze wijze kan men uit de kennis van de singuliere cohomologie direct informatie verkrijgen over het bestaan van een 'primitieve' van een gesloten k-vorm η.

Zo kunnen we met behulp van de stelling van de Rham het lemma van Poincaré generaliseren. Voor het bewijs van het lemma van Poincaré is in hoofdstuk 3 bewust verwezen naar [Les19], hierin wordt namelijk geen gebruik gemaakt van invariantie van de de Rham-cohomologie onder homotopie-equivalentie. Zodoende zijn wij gerechtvaardigd te concluderen, dat uit de stelling van de Rham en de invariantie van de singuliere cohomologie onder homotopie-equivalentie, volgt dat ook de de Rham-cohomologie invariant is onder homotopie-equivalentie. Via voorbeeld 2.0.8 verkrijgen we nu een directe generalisatie van het lemma van Poincaré: voor een samentrekbare variëteit X en $k > 0$, geldt dat alle gesloten k-vormen exact zijn.

Verder zien we dat variëteiten die homeomorf, maar niet diffeomorf, zijn, zich niet laten onderscheiden via de de Rham-cohomologie. Zo zijn dus verschillende differentieerbare structuren, ofwel keuzes van verschillende maximale atlassen, niet van elkaar te onderscheiden via de de Rham-cohomologie.

Het feit dat er een sterk verband is tussen de topologie van een variëteit en haar differentiaalvormen, doet vermoeden dat het lastig is om verschillende differentieerbare structuren op een topologische variëteit van elkaar te onderscheiden. Wie dit toch wil doen, zal bijvoorbeeld een nieuwe invariant, die wel nauwkeurig genoeg is om differentieerbare structuren te onderscheiden, kunnen proberen te introduceren. Dit is precies wat John Milnor in zijn artikel [Mil56] uit 1956 doet. Als men het artikel bestudeert valt echter op dat de geïntroduceerde invariant slechts geldt voor 7-manifolds die aan vrij specifieke voorwaarden voldoen. Deze mate van specificiteit geeft aan dat het lastig is om aan een bruikbare algemene invariant, die rekening houdt met verschillende differentieerbare structuren, te komen. Vervolgens gebruikt Milnor deze invariant om aan te tonen dat er minstens 7 verschillende, op oriëntatie behoudende diffeomorfisme na, oriënteerbare differentieerbare structuren voor de 7-sfeer bestaan. Deze variëteiten die wel homeomorf, maar niet diffeomorf aan de standaard euclidische 7-sfeer S^7 zijn, worden ***exotische sferen*** genoemd. Dat het werk aan exotische sferen, en dus het onderscheiden van differentieerbare structuren, niet eenvoudig is, blijkt uit de bekroning van Milnor's werk aan onder andere deze exotische sferen met een Fieldsmedaille in 1962.[AAR]

Nu we wat interessante gevolgen van de stelling van de Rham hebben beschouwd, is het belangrijk de lezer attent te maken op een alternatief, meer traditioneel, bewijs van deze stelling. Zo hebben wij in ons bewijs van de stelling van de Rham via schovencohomologie geen expliciet isomorfisme verkregen tussen $H^k_{dR}(X)$ en $H^k_{Sing}(X, \mathbb{R})$. Het bewijs van de stelling van de Rham dat in hoofdstuk 18 van [Lee12] gegeven wordt, gebruikt echter wel een expliciet isomorfisme tussen de beide cohomologieën. Bij dit bewijs kijkt men eerst naar het complex van ***gladde singuliere k-ketens***, $C^\infty_\bullet(X)$. Dit is het complex dat gelijk wordt opgebouwd als het singuliere complex van hoofdstuk 2, alleen neemt men in plaats van continue functies, $\sigma : \triangle^k \to X$, ***gladde singuliere k-simplices***, ofwel $\mathcal{C}^\infty$-gladde functies van de vorm $\sigma : \triangle^k \to X$. Hierna toont men aan dat de inbedding $C^\infty_k(X) \xrightarrow{i} C_k(X)$ aanleiding geeft tot een isomorfisme $H^\infty_k(X) \xrightarrow{i_*} H_k(X)$. Vervolgens definieert men integratie over de gladde singuliere k-ketens $C^\infty_k(X)$ en richt men zich op de afbeelding $H^k_{dR} \to Hom(H^\infty_{Sing,k}, \mathbb{R})$ die wordt gegeven door

$$\omega \mapsto (c \mapsto \int_c \omega),$$

waar ω een gesloten k-vorm en $c \in Z_k(C_\bullet(X))$ een gladde k-cykel van het complex van gladde singuliere ketens is. Deze afbeelding is representant onafhankelijk en blijkt een isomorfisme te zijn. Vervolgens merkt men op dat $Hom(H^\infty_{Sing,k}, \mathbb{R}) = Hom(H_{Sing,k}, \mathbb{R})$ en wegens de universele coëfficiëntstelling geldt dat $Hom(H_{Sing,k}, \mathbb{R}) = H^k_{Sing}$. Alle isomorfismen in dit bewijs gaan gepaard met expliciete functievoorschriften en zodoende krijgen we ook een expliciet isomorfisme $H^k_{Sing}(X) \to H^k_{dR}$.

Om te bewijzen dat $\omega \mapsto (c \mapsto \int_c \omega)$ een isomorfisme is, wordt nog aardig wat werk verricht in [Lee12]. Het zou interessant zijn om te kijken of men via schoven werk kan besparen bij het bewijs hiervan door bijvoorbeeld te laten zien dat de afbeelding $\omega \mapsto (c \mapsto \int_c \omega)$ aan een karakteriserende eigenschap voldoet.

Ondanks het gemis van een expliciet isomorfisme, heeft het bewijs van de stelling via schoven andere voordelen. Zoals we zagen in hoofdstuk 7 volgt ons bewijs vrij natuurlijk uit de voorgaande algemene theorie. Zo is de theorie van afgeleide functoren niet slechts van toepassing op schoven, maar op abelse categorieën in het algemeen. Ook wanneer wij ons beperken tot schoven, blijven de stellingen die wij hebben gebruikt van een algemene aard. Zo zien we dat stelling 7.0.1 direct volgt uit de acycliciteit van fijne schoven en ook stelling 7.0.2 geldt niet alleen voor variëteiten maar voor alle lokaal samentrekbare ruimten. Ook wordt de theorie van schovencohomologie in hoofdstuk 4.3.1 van [Voi02] toegepast op de ***Čech-cohomologie*** en de ***Dolbeault-cohomologie***, twee cohomologietheorieën die wij niet in deze scriptie besproken hebben. We lijken met schovencohomologie zodoende nieuw gereedschap te hebben verkregen om cohomologietheoriën te onderzoeken. De opbouw van het bewijs dat wij in deze scriptie hebben toegelicht, dient op deze wijze minder één specifiek doel dan een meer klassiek bewijs van de stelling van de Rham als in [Lee12].

Deze bredere toepasbaarheid van de schoventheorie toont zich ook in de mogelijkheid gladde variëteiten alternatief te karakteriseren via de eerder geïntroduceerde $\mathbb{R}$-ruimten. Zo zijn de gladde variëteiten equivalent aan $\mathbb{R}$-ruimten $(M, \mathcal{O}_M)$, waarvoor het volgende geldt:

- De topologische ruimte M is Hausdorff en laat een aftelbare basis voor de topologie toe.
- $(M, \mathcal{O}_M)$ is lokaal isomorf aan R-ruimten van de vorm (U, C_U^∞) voor $U \subset \mathbb{R}^n$ open.

Hier bedoelen we met isomorf uiteraard isomorf onder het juiste morfismebegrip. Voor zowel dit juiste morfismebegrip als voor een bewijs dat deze nieuwe karakterisering inderdaad equivalent is aan de vertrouwde behandeling van variëteiten, verwijzen we de lezer naar [Ran11] . Wie geïnteresseerd is in deze alternatieve behandeling van variëteiten en graag meer wil weten, kan ook een kijkje nemen in [Ram04].

Een andere, voor mij onverwachte, toepassing van schoven vinden we in de wiskundige logica. Wie het boek “Sheaves in Geometry and Logic”[MLM92] doorbladert, zal zien dat schoven met als beeldcategorie Set, de categorie van verzamelingen, een grote rol spelen in de opbouw van deze theorie. Tot slot is het interessant te melden (al ben ik beslist geen expert op dit gebied!) dat schoofachtige ideeën verder gegeneraliseerd kunnen worden door een topologie-achtige structuur, een zogenaamde ***Grothendieck-topologie***, te geven aan een categorie C als geheel. Een categorie C samen met een Grothendieck-topologie J noemt men een ***plaats*** (vertaling van het engelse woord ’site’). Op zo’n plaats kunnen we wederom kijken naar schoven; dit zijn contravariante functoren naar Set die soortgelijke eigenschappen hebben ten aanzien van de Grothendieck-topologie, als de in hoofdstuk 4 besproken schoven. Zo zien we dat delen van de in deze scriptie geïntroduceerde ideeën interessante toepassingen hebben in contexten die ver vewijderd liggen van ons initiële doel om de stelling van de Rham te bewijzen. Wie meer over deze Grothendieck-topologie wil weten, kan dat in hoofdstuk 3 van [MLM92] vinden.

Al met al hoop ik de lezer inzicht te hebben gegeven in het nut van zowel de stelling van de Rham als van de in onze reis geïntroduceerde theorie om deze stelling te bewijzen.

Referenties

[AAR] D. J. Albers, G. L. Alexanderson, and C. Reid. Fields medal 1962. `https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/1962/index.html#0x82496a1f_0x0005ea03`. Site bezocht op: 12 augustus 2019.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[Lee12] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[Les19] A. Lesfari. On poincaré lemma or volterra theorem about differential forms and cohomology groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:1905.13347, May 2019.

[Loo10] E. Looijenga. Algebraic topology—an introduction. `http://www.staff.science.uu.nl/~looij101/algtop2010.pdf`, 2010. Site bezocht op: 2 juli 2019.

[Mil56] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2):399–405, 1956.

[Mil00] H. Miller. Leray in oflag xviia: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences. `http://www-math.mit.edu/~hrm/papers/ss.pdf`, February 23, 2000.

[ML78] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5. Springer New York, New York, 1978.

[MLM92] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Universitext,. Springer New York, New York, NY, 1992.

[Moe08] I. Moerdijk. Notes on homological algebra. `http://www2.projects.science.uu.nl/Moerdijk/files/hom_alg.pdf`, January 15, 2008. Site bezocht op: 20 juli 2019.

[nLa] nLab authors. injective object. `http://ncatlab.org/nlab/show/injective%20object`. Site bezocht op: 16 juli 2019.

[OR] J. J. O'Connor and J. J. Robertson. Biography Georges de Rham. `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Rham.html`. Site bezocht op: 12 augustus 2019.

[Ram04] S. Ramanan. *Global Calculus*, volume 65. American Mathematical Society, Providence, 2004.

[Ran11] S. Rana. Locally ringed spaces and manifolds. `http://pub.math.leidenuniv.nl/~edixhovensj/teaching/2010-2011/tag/sunil1.pdf`, March 14 2011. Site bezocht op: 13 augustus 2019.

[Sel16] Y. Sella. Comparison of sheaf cohomology and singular cohomology. *arXiv e-prints*, page arXiv:1602.06674, Feb 2016.

[Ste75] B. Stenström. *Rings of Quotients : an Introduction to Methods of Ring Theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Einzeldarstellungen mit besonderer Berucksichtigung der Anwendungsgebiete, 217. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1975.

[Vak17] R. Vakil. THE RISING SEA Foundations of Algebraic Geometry. `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf`, 2017. Site bezocht op: 25 juli 2019.

[Voi02] C. Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.* Cambridge University Press, 2002.