

F.W. Swets

Alternatieve optimale strategieën in het
rood-zwart casino model

Bachelorscriptie

20 juli 2018

Scriptiebegeleidster: Dr. F.M. Spieksma



Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Inhoudsopgave

1	Introductie	3
2	Model	4
2.1	Rood-zwart casino	4
2.2	Strategieën	5
2.3	Optimaliteit	6
3	Optimale strategieën	7
3.1	Neutraal casino	7
3.2	Gunstig casino	8
3.3	Ongunstig casino	9
4	Hogere orde Gedurfd Spel	15
4.1	Tweede orde Gedurfd Spel	15
4.2	n -de orde Gedurfd Spel	16
5	Roulette: meerdere optimale strategieën	20
5.1	Huislimiet	20
5.2	$N = 16$	20
5.2.1	Geen huislimiet ($L = 8$)	21
5.2.2	$L = 4$	23
5.2.3	$L = 2$	25
5.2.4	Vergelijking	28
5.3	$N = 12$	30
5.3.1	Geen huislimiet ($L = 6$)	31
5.3.2	$L = 4$	32
5.3.3	$L = 3$	33
5.3.4	$L = 2$	35
5.3.5	Vergelijking	37
6	Discussie	40
7	Referenties	41

1 Introductie

Het rood-zwart casino model is een gokspel waarbij de kans p is dat je inzet verdubbelt, en de kans $1 - p$ is dat je je inzet kwijtraakt. De vraag die voorligt in het rood-zwart casino model is niet op welke wijze je structureel geld kunt verdienen; geen enkele strategie verslaat immers op lange termijn het huis als $p < \frac{1}{2}$. Het doel in het rood-zwart casino in deze scriptie is het maximaliseren van de kans om een gegeven bedrag N te verkrijgen. Een passende analogie van dit probleem is dat je binnen een kort tijdsbestek een uitstaande schuld bij de maffia moet terugbetalen om geweld te voorkomen, terwijl je niet over genoeg geld beschikt.

Allereerst zullen we het model introduceren, om vervolgens in hoofdstuk 3 optimale strategieën te bepalen voor winkansen die kleiner dan, gelijk aan en groter dan $\frac{1}{2}$ zijn. Deze strategieën zijn vrij intuïtief: in het geval $p < \frac{1}{2}$ is zogeheten Gedurfd Spel optimaal, waarbij, op voorwaarde dat N niet overschreven wordt, maximaal wordt ingezet. Het bewijs van de optimaliteit van Gedurfd Spel in het geval $p < \frac{1}{2}$ is echter gecompliceerder dan men wellicht zou vermoeden. Gedurfd spel is daarnaast niet uniek optimaal: in hoofdstuk 4 zullen we de optimaliteit van hogere orde Gedurfd Spel bewijzen, een strategie waarbij Gedurfd Spel wordt gespeeld met als doel echter naar de tussenliggende punten $\frac{N}{2^i}, i \in \mathbb{N}$ toe te spelen. Dit concept is afkomstig uit de literatuur omtrent het rood-zwart casino model [1], maar dit bewijs was nog niet eerder uitgewerkt.

In hoofdstuk 5 zullen we kijken naar het effect van het instellen van een huislimiet, waarbij de toegestane inzet een bovengrens krijgt. Opmerkelijk is dat Aangepast Gedurfd Spel, dat de huislimiet in acht neemt maar verder identiek is aan Gedurfd Spel, in (uitzonderlijke) situaties niet optimaal is [2]. De aandacht in deze scriptie ligt echter met name op de verscheidenheid aan optimale strategieën: in de situatie zonder huislimiet is Gedurfd Spel zoals eerder opgemerkt niet uniek optimaal, en met huislimiet evenmin. Alhoewel dit gegeven al vaak opgemerkt is, is er nog weinig aandacht uitgegaan naar welke strategieën, buiten Gedurfd Spel, optimaal zijn.

Aan de hand van twee praktijkvoorbeelden ($N = 12$ en $N = 16$) zullen we onderzoeken welke keuzes er zoal optimaal zijn, en of hier regelmatigigheden in kunnen worden waargenomen. We zullen, zonder gebruik te maken van numerieke methoden, de kansen om het einddoel te halen bepalen gegeven een einddoel en een huislimiet. Deze resultaten zullen we vervolgens vergelijken in termen van einddoel en huislimiet. Ten slotte zullen we, gebruikmakende van deze informatie, vaststellen welk effect het instellen van een huislimiet heeft op de verwachte winst die een casino maakt op een speler die dit spel speelt.

2 Model

2.1 Rood-zwart casino

Het rood-zwart casino model betreft een gokker die met een startbedrag i in een casino probeert een bedrag N , $N > i$, te vergaren. De toestandsruimte S bestaat uit de bedragen die de gokker kan bezitten. Omdat negatieve bedragen niet zijn toegestaan is deze toestandsruimte dus $S = \{0, 1, \dots, N-1, N\}$. Hieruit volgt dat het spel zowel in toestand 0 als in toestand N klaar is: in het eerste geval kun je niet meer verder spelen, in het tweede geval is je doel bereikt. Hierbij noteren we de winkans met p en dientengevolge de verlieskans $1 - p$. Met kans p wordt de inzet gewonnen, met kans $1 - p$ is de gokker zijn inzet kwijt.

We onderscheiden drie typen casino's. Ten eerste het *ongunstige* casino, dat wordt gekarakteriseerd door een winkans p kleiner dan $\frac{1}{2}$. Dit resulteert in een winst voor het casino op lange termijn, en is daarmee ook het enige type dat in de praktijk voor zal komen. Daarnaast hebben we het *neutrale* casino met $p = \frac{1}{2}$ en ten slotte het *gunstige* casino met $p > \frac{1}{2}$.

Alhoewel de gokker zich verscheidene doelen zou kunnen stellen, zullen wij ons richten op het maximaliseren van de kans dat N gehaald wordt. Het aantal stappen waarin dit gebeurt is niet van belang.

We gaan dit probleem modelleren als een zogenaamde Markov beslissingsketen. Bij een Markov beslissingsketen hebben we niet te maken met één enkele Markovketen maar met een aantal Markovketens, waarbij steeds besloten moet worden wat de optimale keten is gegeven het doel.

Beschouw een discrete Markovketen met perioden $t = 1, 2, \dots$. Op elk tijdstip bevindt het systeem zich in een toestand i in $S = \{0, 1, \dots, N-1, N\}$. Gegeven een toestand i wordt een actie $a \in A(i)$ gekozen, met $A(i)$ de *actieverzameling*. De actieverzameling bestaat uit alle mogelijke keuzes die in toestand i gemaakt kunnen worden.

Voor het rood-zwart casino model geldt $A(i) = \{1, 2, \dots, \min(i, N-i)\}$, aangezien meer dan $N-i$ inzetten geen waarde heeft voor een speler die N wil bereiken. Een actie $a \in A(i)$ resulteert in een *directe opbrengst* $r_i(a)$ en met *overgangskans* $p_{ij}(a)$ is het systeem in de volgende periode in toestand j . Er is een (eenmalige) uitbetaling van 1 als N bereikt wordt; in alle andere toestanden is de uitbetaling 0. Dus: $r_i(a) = 0, i \neq N$ en $r_N(0) = 1$. Voor de overgangskansen geldt $p_{Nj} = p_{0j} = 0$ voor alle j , immers stopt het spel als 0 of N is bereikt. Voor $0 < i < N$ geldt

$$p_{ij}(a) = \begin{cases} p, & j = i + a, \\ 1 - p, & j = i - a. \end{cases}$$

Omdat zowel de directe opbrengst als de overgangskansen niet afhankelijk zijn van het tijdstip t is hier sprake van een stationaire Markov beslissingsketen, die bovendien substochastisch is [3].

2.2 Strategieën

Welke acties uit de actieverzameling worden gekozen, wordt bepaald door de *strategie*. Een strategie R is een rij beslisregels $R = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^t, \dots)$ met π^t de *beslisregel* op tijdstip t . Een beslisregel π^t mag alleen afhangen van de informatie die tot tijdstip t verkregen is, dus de toestanden op de tijdstippen $1, 2, \dots, t$ en de acties op tijdstippen $1, 2, \dots, t-1$. De formele definitie is als volgt.

Laat $S \times A = \{(i, a) \mid i \in S, a \in A(i)\}$ en laat H_t de verzameling van de mogelijke histories van het systeem tot tijdstip t , dus:

$$H_t = \{(i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, i_{t-1}, a_{t-1}, i_t) \mid (i_k, a_k) \in S \times A, 1 \leq k \leq t-1; i_t \in S\}.$$

Een beslisregel π^t op tijdstip t geeft de kans, als functie van de historie met waarden in de actieverzameling, om een zekere actie te kiezen:

$$\pi_{h_t a_t}^t \geq 0 \text{ voor alle } a_t \in A(i_t) \text{ en } \sum_{a_t} \pi_{h_t a_t}^t = 1 \text{ voor alle } h_t \in H_t.$$

Een strategie $R = (\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^t, \dots)$ heet een Markov-strategie als de beslisregel π^t onafhankelijk is van $\{(i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, i_{t-1}, a_{t-1}, i_t)\}$ voor iedere $t \in \mathbb{N}$, oftewel: π^t is alleen afhankelijk van toestand i_t . In ons probleem is de optimale strategie immers altijd hetzelfde voor dezelfde toestand: het doel is om N te bereiken en de kansen hierop veranderen niet als de toestand niet verandert. Daarom kunnen we schrijven $\pi_{i_t a_t}^t$ in plaats van $\pi_{h_t a_t}^t$. Verder zijn de beslisregels in ons geval een gedegenererde kansverdeling, dus $\pi_{i_t a_t}^t \in \{0, 1\}$, aangezien precies één inzet wordt gekozen [3]. Zo'n beslisregel heet deterministisch en wordt ook wel genoteerd met een functie $f(i) : S \rightarrow A$, waarbij voor elke $i \in S$ met kans 1 een bepaalde actie wordt gekozen.

Onze strategie is tevens stationair omdat de beslisregels enkel van de toestand i en de actie a afhangen, ofwel:

$$\pi : S \times A \rightarrow [0, 1] \text{ dus } \pi_{ia} \geq 0 \text{ voor alle } i \in S \text{ en } a \in A(i), \text{ en } \sum_a \pi_{ia} = 1 \text{ voor alle } i \in S.$$

Deze strategie noteren we met π^∞ . Een stationaire, deterministische strategie ligt vast door middel van een zekere functie $f : S \rightarrow A$, dus door de acties $f(i), i \in S$. Deze noteren we als f^∞ .

Voor een Markov-strategie $R = (\pi^1, \pi^2, \dots)$ definiëren we de overgangsmatrix $P(\pi^t)$ en de opbrengstvector $r(\pi^t)$ als volgt:

$$\{P(\pi^t)\}_{ij} = \sum_a p_{ij}^t(a) \pi_{ia}^t \text{ voor iedere } (i, j) \in S \times S \text{ en } t \in \mathbb{N},$$

$$\{r(\pi^t)\}_i = \sum_a r_i^t(a) \pi_{ia}^t \text{ voor iedere } i \in S \times S \text{ en } t \in \mathbb{N}.$$

Zij de stochastische variabele X_t de toestand op tijdstip t en Y_t de actie op tijdstip t . Dan noteren we met $i, P_{i,R}\{X_t = j, Y_t = a\}$ de kans dat op tijdstip t de toestand j is en de actie a is, gegeven een strategie R en begintoestand i .

2.3 Optimaliteit

We gaan uit van een oneindige horizon, dat wil zeggen dat er geen restrictie is op het aantal periodes. We definiëren, gegeven een strategie R en begintoestand $i \in S$ de totale verwachte opbrengst.

$$v_i(R) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j,a} P_{i,R}\{X_t = j, Y_t = a\} \cdot r_j(a). \quad (2.1)$$

De *waardevector* v en een *optimale strategie* R_* worden gedefinieerd door $v = \sup_R v_i(R)$ en $v(R_*) = v$. Dit is welgedefinieerd als het model transiënt is, wat wil zeggen dat elke strategie een transiënte Markovketen genereert. We zullen daarom nu bewijzen dat elke strategie transiënt is: de kans dat het spel stopt omdat toestand 0 of N bereikt wordt is 1. We definiëren de kans dat het proces in hooguit k stappen uit toestand i toestand j bereikt als $p_{ij}^{(k)}$.

Lemma 2.1. *Neem $r_t(i) = P(x_t \neq 0, N \mid x_0 = i)$. Dan $\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = 0$.*

Bewijs

We weten $P(X_t \neq 0, N \mid X_0 = i) = 1 - (p_{iN}^{(t)} + p_{i0}^{(t)})$.

Voor elke toestand i , $0 < i < N$, geldt dat toestand N na ten hoogste $N-1$ keer winst bereikt wordt en toestand 0 na ten hoogste $N-1$ keer verlies 0 bereikt wordt. Dus

$$p_{iN}^{(N-1)} \geq p^{N-i} > p^N,$$

ofwel

$$p_{i0}^{(N-1)} \geq (1-p)^i > (1-p)^N.$$

Dus

$$r_{N-1}(i) = 1 - p_{iN}^{(N-1)} - p_{i0}^{(N-1)} \leq 1 - p^N - (1-p)^N < 1.$$

Dit geeft

$$r_{kN-k}(i) = (1 - p^N - (1-p)^N)^k,$$

dus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - p^N - (1-p)^N)^k = 0. \quad \square$$

Omdat alle strategieën transiënt zijn, geldt de volgende stelling:

Stelling 2.2. *De waardevector v is de unieke oplossing van de vergelijking*

$$x_i = \max_{a \in A(i)} \{r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)x_j\}, \quad i \in S. \quad (2.2)$$

De deterministische strategie f^∞ met

$$f(i) = \operatorname{argmax}_{a \in A(i)} \{r_i(a) + \sum_{j \in S} p_{ij}(a)v_j\}, \quad i \in S. \quad (2.3)$$

is optimaal en er geldt dat $v(f^\infty) = v$.

Voor het bewijs, zie [3].

Met behulp van bovenstaande kunnen we de optimale strategieën voor neutrale en gunstige casino's bepalen.

3 Optimale strategieën

De waardevector voldoet in het rood-zwart casino model aan de volgende optimaliteitsvergelijking:

$$\begin{cases} x_i = \max_{a \in A(i)} \{px_{i+a} + (1-p)x_{i-a}\}, 1 \leq i \leq N-1 \\ x_0 = 0; x_N = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Neem immers een winkans p en een toestand i . Bij inzet a wordt er met kans p een bedrag a gewonnen, met toestand $i+a$ tot gevolg. Met kans $1-p$ wordt er a verloren, wat leidt tot toestand $i-a$. In toestanden 0 en N is het spel klaar: in het eerste geval is de uitbetaling 0, in het tweede geval is de uitbetaling 1 (eenmalig).

3.1 Neutraal casino

Voor een neutraal casino geldt, zoals gezegd, dat $p = \frac{1}{2}$. Dit model representeert een roulettespel met evenveel rode als zwarte vlakken (bijvoorbeeld 18 van elk), zonder de één of twee nullen die op lange termijn winst voor het casino garanderen, waarbij steeds op rood of zwart wordt ingezet.

Stelling 3.1. *Als $p = \frac{1}{2}$, dan is elke strategie optimaal.*

Bewijs

Zij f^∞ een willekeurige, deterministische strategie. Definieer een nieuwe actieverzameling $A'(i) = \{f(i)\}$, wat wil zeggen dat we, zonder de strategie expliciet te kennen, de inzet in i gelijkstellen aan wat de strategie voorschrijft in i . Stelling 1 geeft dan dat de optimaliteitsvergelijking gegeven is door $x = r(f) + P(f)x$, met unieke oplossing $x = v(f^\infty)$. Voor $v(f^\infty)$ geldt:

$$v_i(f^\infty) = \begin{cases} v_i(f^\infty) = \frac{1}{2}v_{i+f(i)}(f^\infty) + \frac{1}{2}v_{i-f(i)}(f^\infty), & 1 \leq i \leq N-1, \\ v_0(f^\infty) = 0; v_N(f^\infty) = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Neem $v_i(f^\infty) = \frac{i}{N}, 1 \leq i \leq N$. Er geldt

$$\frac{i}{N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{i+f(i)}{N} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i-f(i)}{N} = \frac{2i}{2N} = \frac{i}{N}.$$

Dus $v_i(f^\infty) = \frac{i}{N}, 1 \leq i \leq N$ voldoet hieraan. Oftewel, $v_i(f^\infty)$, de waardevector in i gegeven de strategie f^∞ , is altijd gelijk aan $\frac{i}{N}$, ongeacht de strategie. Dan is elke strategie optimaal. \square

Dat elke strategie optimaal is in dit geval, is intuïtief niet geheel verwonderlijk. Een resultaat van het bestuderen van Markovketens [3] is dat gegeven $p = \frac{1}{2}$, door telkens 1 in te zetten, de kans om gegeven een startpunt i uit te komen in N inderdaad gelijk is aan $\frac{i}{N}$. Het veranderen van de inzet verandert hier niets wezenlijks aan: door bijvoorbeeld de inzet te verdubbelen wordt er alleen nog tussen de even toestanden bewogen. De nieuwe situatie is eenvoudig te reduceren tot precies weer een Markovketen met inzet 1, maar met als toestandsruimte de even toestanden uit de oorspronkelijke Markovketen.

3.2 Gunstig casino

In het onwaarschijnlijke geval van een gunstig casino hebben we te maken met $p > \frac{1}{2}$. Kortom, de kans om je inzet te winnen is groter dan de kans om je inzet te verliezen. De verwachting van dit spel is positief, oftewel, de speler maakt op lange termijn winst. Ondanks de ongetwijfeld gebrekkige weerspiegeling van de realiteit van de gokwereld die dit biedt, is het interessant om strategieën in deze omstandigheid te bestuderen. We zullen aantonen dat *Timide Spel*, het steeds inzetten van 1, in dit geval optimaal is. Dus we definiëren Timide Spel als de strategie f_1^∞ met $f_1^\infty : a(i) = 1$ voor $i = 1, \dots, N - 1$.

Stelling 3.2. *Als $p > \frac{1}{2}$, dan is Timide Spel optimaal.*

Bewijs

We zullen aantonen dat f_1^∞ voldoet aan de optimaliteitsvergelijking (2.4). Het is voldoende om voor $a \in A(i), i \in S$ na te gaan dat

$$v_i(f_1^\infty) \geq r_i(a) + \sum_j p_{ij}(a)v_j(f_1^\infty) = pv_{i+a}(f_1^\infty) + (1-p)v_{i-a}(f_1^\infty)$$

In dit geval geldt dat de strategie f_1^∞ ten minste zo goed is als elke andere strategie, en dus optimaal. Dit is het gevolg van het strategieverbeteringsalgoritme [3].

We weten uit Markovketentheorie [3] dat $v_i(f_1^\infty) = \frac{1-s^i}{1-s^N}, 0 \leq i \leq N$, met $s = \frac{1-p}{p}$. Dus we moeten bewijzen dat

$$\frac{1-s^i}{1-s^N} \geq p \frac{1-s^{i+a}}{1-s^N} + (1-p) \frac{1-s^{i-a}}{1-s^N}.$$

Dit kan als volgt kan worden herschreven:

$$1-s^i \geq p(1-s^{i+a}) + (1-p)(1-s^{i-a}),$$

ofwel

$$-s^i \geq -ps^{i+a} - (1-p)s^{i-a},$$

dus

$$1 \leq ps^a + (1-p)s^{-a}.$$

Beschouw $F(a) = ps^a + (1-p)s^{-a}$. Er geldt $F(1) = p\frac{1-p}{p} + (1-p)\frac{p}{1-p} = 1 - p + p = 1$.

Als we nu aantonen dat $F(a+1) > F(a)$, onder voorwaarde dat $p > \frac{1}{2}$, dan geldt voor alle $a \geq 1$ dat $F(a) \geq 1$ en is de stelling bewezen.

$$F(a+1) > F(a) \Leftrightarrow ps^{a+1} + (1-p)s^{-a-1} > ps^a + (1-p)s^{-a}.$$

Vermenigvuldiging met s^{a+1} geeft

$$ps^{2a+2} + 1 - p > ps^{2a+1} + (1-p)s.$$

Dit is equivalent met

$$s \cdot ps^{2a+1} - ps^{2a+1} > (1-p)s - (1-p) \Leftrightarrow ps^{2a+1}(s-1) > (1-p)(s-1).$$

Dus we moeten aantonen dat $ps^{2a+1}(s-1) > (1-p)(s-1)$.

We weten dat

$$p > \frac{1}{2} \Leftrightarrow s < 1 \Leftrightarrow s^{2a+1} < s = \frac{1-p}{p}.$$

Vermenigvuldigen met $p \cdot (s-1)$, een negatief getal, geeft

$$ps^{2a+1}(s-1) > (1-p)(s-1). \quad \square$$

Het interessantste geval, zowel wiskundig als in de praktijk, is echter het *ongunstige* casino. Om dit te kunnen bestuderen zullen we echter complexere methoden moeten aanwenden [3].

3.3 Ongunstig casino

Het ongunstige casino betreft een casino met winkans $p < \frac{1}{2}$, wat in de praktijk uiteraard altijd het geval zal zijn. We zullen bewijzen dat in dit geval *Gedurfd Spel* (vanaf hier: GS) optimaal is. Dit is de strategie waarbij zoveel ingezet wordt als mogelijk is, zolang het doel N niet overschreden kan worden. Oftewel: $Y_t = \min\{X_t, N - X_t\}$. Dat is intuïtief gezien niet geheel verwonderlijk: omdat in een ongunstig casino de verwachting van elke gok negatief is, zal een doel alleen bereikt kunnen worden als er relatief weinig spellen gespeeld worden.

We zullen hier het bewijs van Kyle Siegrist schetsen [4]. Om de optimaliteit van GS in ongunstige casino's te bewijzen, zullen we het probleem op een equivalente, maar iets andere manier formuleren. De schaal van 0 tot het doel N wordt aangepast naar een schaal van 0 tot 1, waarbij elke inzet tussen 0 en het bedrag dat de speler heeft is toegestaan. De toestandsruimte is dus $S = [0, 1]$, de actieverzameling $A(i) = [0, \min(i, N - i)]$ en de directe uitbetaling $r_i(a) = 0, i \neq N$ en $r_N(0) = 1$. Voor de overgangskansen geldt

$$p_{ij}(a) = \begin{cases} p, & j = i + a, \\ 1 - p, & j = i - a. \end{cases}$$

Een optimale strategie f^∞ moet voldoen aan de volgende vergelijking, waarbij $q = 1 - p$:

$$v_i(f^\infty) \geq pv_{i+a}(f^\infty) + qv_{i-a}(f^\infty),$$

ofwel

$$v_i(f^\infty) - pv_{i+a}(f^\infty) - qv_{i-a}(f^\infty) \geq 0.$$

Om te bewijzen dat GS in dit geval inderdaad optimaal is, zullen we gebruikmaken van dyadische breuken in het interval $[0, 1]$. Dit zijn breuken van de vorm

$\frac{a}{2^b}$ met $a, b \in \mathbb{N}$ en $0 \leq a \leq 2^m$. We noemen m de rang van de dyadische breuk. Zo geeft $a = 3, b = 6$ de breuk $\frac{3}{32}$ met rang 6. Omwille van de continuïteit van onze waardevector (zie [4]) impliceert een bewijs voor de optimaliteit van GS voor dyadische breuken de optimaliteit in het gehele domein $[0, 1]$.

Stelling 3.3. *Als $p < \frac{1}{2}$, dan is GS optimaal.*

Bewijs

We definiëren $V(i)$ de waardevector van de strategie GS op $[0, 1]$. Zij $x = v_{i-a}, y = v_{i+a}$, dus $i = \frac{x+y}{2}$. Als aan de optimaliteitsvergelijking voldaan wordt, dan moet voor alle dyadische breuken x, y met $0 \leq x \leq y \leq 1$ gelden dat

$$D(x, y) = V\left(\frac{x+y}{2}\right) - pV(y) - qV(x) \geq 0. \quad (3.3)$$

We zullen de optimaliteit voor dyadische breuken bewijzen met inductie naar de hoogste rang m van het paar dyadische breuken. Bij rang 0 hebben we slechts drie opties voor paren (x, y) met $0 \leq x \leq y \leq 1$:

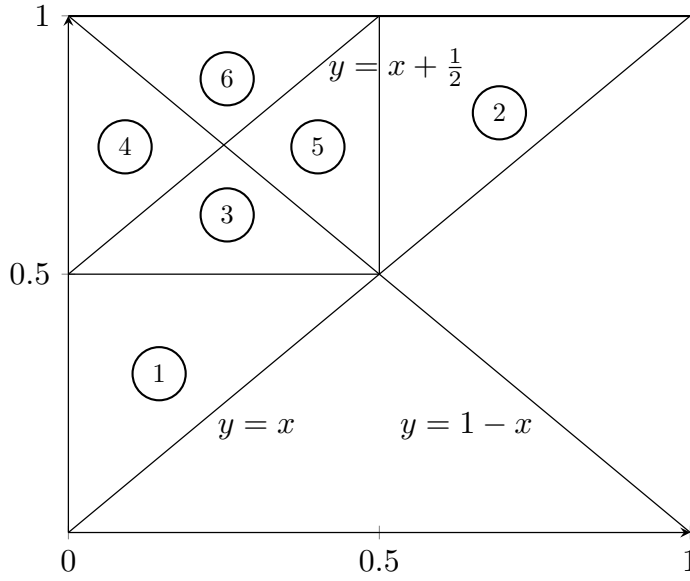
$$(x, y) = \begin{cases} (0, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1). \end{cases}$$

Er geldt nog steeds $V(0) = 0, V(1) = 1$ en verder $V(\frac{1}{2}) = p$ omdat de strategie GS is en de winkans p . Dit geeft

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= V(0) - pV(0) - qV(0) = 0 \geq 0, \\ D(0, 1) &= V\left(\frac{1}{2}\right) - pV(1) - qV(0) = p - p = 0, \\ D(1, 1) &= V(1) - pV(1) - qV(1) = 1 - p - q = 0. \end{aligned}$$

Dus voor $m = 0$ wordt inderdaad aan de optimaliteitseis voldaan.

Neem nu aan dat (3.3) geldt voor elk paar dyadische breuken met hoogste rang $m < M$ met $m, M \in \mathbb{N}$. We zullen zes gevallen met verschillende relaties tussen x en y (zie Figuur 3.1) van dyadische breuken (x, y) bekijken, waarbij steeds geldt dat $\text{rang}(x) = \text{rang}(y) = M$. Hierbij laten we steeds zien dat $D(x, y) \geq 0$, gebruikmakende van de inductieveronderstelling en het feit dat er gespeeld wordt volgens de strategie GS. Merk op dat hierdoor bijvoorbeeld geldt dat $V(x) = p + qV(2x - 1)$ voor $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.



Figuur 3.1: De zes gevallen in het xy -vlak

1. $x \leq y < \frac{1}{2}$, dus $\frac{x+y}{2} < \frac{1}{2}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} D(x, y) &= V\left(\frac{x+y}{2}\right) - pV(y) - qV(x) \\ &= pV(x+y) - p^2V(2y) - pqV(2x) = pD(2x, 2y). \end{aligned}$$

Omdat $p > 0$ en omdat de hoogste rang van $(2x, 2y)$ kleiner is dan de hoogste rang van (x, y) geldt dat $pD(2x, 2y) \geq 0$ en dus $D(x, y) \geq 0$.

2. $\frac{1}{2} \leq x \leq y$, dus $\frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} D(x, y) &= V\left(\frac{x+y}{2}\right) - pV(y) - qV(x) \\ &= p + q \cdot V(x+y-1) - p(p+qV(2y-1)) - q(p+qV(2x-1)) \\ &= p + q \cdot V(x+y-1) - p^2 - pqV(2y-1) - qp - q^2V(2x-1) \\ &= p(1-p-q) + q \cdot V(x+y-1) - pqV(2y-1) - q^2V(2x-1) \\ &= q(V(x+y-1) - pV(2y-1) - qV(2x-1)) = qD(2x-1, 2y-1). \end{aligned}$$

Omdat $q > 0$ en omdat de hoogste rang van $(2x-1, 2y-1)$ kleiner is dan de hoogste rang van (x, y) geldt dat $qD(2x-1, 2y-1) \geq 0$ en dus $D(x, y) \geq 0$.

3. $x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \leq y$ en $2y-1 \leq 2x$. Dan geldt

$$\begin{aligned} D(x, y) &= V\left(\frac{x+y}{2}\right) - pV(y) - qV(x) \\ &= pV(x+y) - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x). \end{aligned}$$

Omdat $x + y \geq \frac{1}{2}$ geldt

$$V(x + y) = p + qV(2x + 2y - 1),$$

dus

$$\begin{aligned} D(x, y) &= p^2 + pqV(2x + 2y - 1) - p^2 - pqV(2y - 1) - pqV(2x) \\ &= q(pV(2x + 2y - 1) - pV(2y - 1) - pV(2x)). \end{aligned}$$

Omdat $x + y - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ geldt

$$pV(2x + 2y - 1) = V(x + y - \frac{1}{2}),$$

dus

$$\begin{aligned} D(x, y) &= q(V(x + y - \frac{1}{2}) - pV(2y - 1) - pV(2x)) \\ &= q(V(x + y - \frac{1}{2}) - qV(2y - 1) - pV(2x) - (p - q)V(2y - 1)) \\ &= q(D(2y - 1, 2x) + (q - p)V(2y - 1)). \end{aligned}$$

Omdat $q > 0$ en omdat de hoogste rang van $(2y - 1, 2x)$ kleiner is dan de hoogste rang van (x, y) , geldt dat $qD(2y - 1, 2x) \geq 0$. Omdat $q - p > 0$, $q > 0$ en omdat $V(x) > 0$ voor elke $0 \leq x \leq 1$ geldt $q(q - p)V(2y - 1) \geq 0$ en dus $D(x, y) \geq 0$.

4. $x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \leq y$ en $2x \leq 2y - 1$. Dan geldt

$$\begin{aligned} D(x, y) &= V(\frac{x+y}{2}) - pV(y) - qV(x) \\ &= pV(x + y) - pqV(2x) - p^2 - pqV(2y - 1). \end{aligned}$$

Omdat $x + y \geq \frac{1}{2}$ geldt

$$V(x + y) = p + qV(2x + 2y - 1),$$

dus

$$\begin{aligned} D(x, y) &= p^2 + pqV(2x + 2y - 1) - pqV(2x) - p^2 - pqV(2y - 1) \\ &= q(pV(2x + 2y - 1) - pV(2x) - pV(2y - 1)). \end{aligned}$$

Omdat $x + y - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ geldt

$$pV(2x + 2y - 1) = V(x + y - \frac{1}{2}),$$

dus

$$\begin{aligned} D(x, y) &= q(V(x + y - \frac{1}{2}) - pV(2x) - pV(2y - 1)) \\ &= q(V(x + y - \frac{1}{2}) - pV(2y - 1) - qV(2x) - (p - q)V(2x)) \\ &= q(D(2x, 2y - 1) + (q - p)V(2x)). \end{aligned}$$

Omdat $q > 0$ en omdat de hoogste rang van $(2x, 2y-1)$ kleiner is dan de hoogste rang van (x, y) , geldt dat $qD(2x, 2y-1) \geq 0$. Omdat $q-p > 0$, $q > 0$ en omdat $V(x) > 0$ voor elke $0 \leq x \leq 1$ geldt $q(q-p)V(2x) \geq 0$ en dus $D(x, y) \geq 0$.

5. $x \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$ en $2y-1 \leq 2x$. Dan geldt

$$\begin{aligned} D(x, y) &= V\left(\frac{x+y}{2}\right) - pV(y) - qV(x) \\ &= p + qV(x+y-1) - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x) \\ &= p + pqV(2x+2y-2) - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x). \end{aligned}$$

Omdat $x+y-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ geldt

$$V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = p + qV(2x+2y-2),$$

dus

$$qV(2x+2y-2) = V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} D(x, y) &= p + p\left(V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p\right) - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x) \\ &= p + pV\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p^2 - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x) \\ &= p(1-2p) + p\left(V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - qV(2y-1) - qV(2x)\right) \\ &= p(q-p) + p\left(V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - qV(2y-1) - pV(2x) - (q-p)V(2x)\right) \\ &= p(q-p) - p(q-p)V(2x) + pD(2y-1, 2x) \\ &= p(q-p)(1-V(2x)) + pD(2y-1, 2x). \end{aligned}$$

Omdat $p > 0$ en omdat de hoogste rang van $(2y-1, 2x)$ kleiner is dan de hoogste rang van (x, y) geldt dat $pD(2y-1, 2x) \geq 0$. Omdat $q-p > 0$, $p > 0$ en omdat $V(x) < 1$ en dus $1-V(x) > 0$ voor elke $0 \leq x \leq 1$, geldt $p(q-p)(1-V(2x)) \geq 0$. Dus $D(x, y) \geq 0$.

6. $x \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$ en $2x \leq 2y-1$. Dan geldt

$$\begin{aligned} D(x, y) &= V\left(\frac{x+y}{2}\right) - pV(y) - qV(x) \\ &= p + qV(x+y-1) - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x) \\ &= p + pqV(2x+2y-2) - p^2 - pqV(2y-1) - pqV(2x). \end{aligned}$$

Omdat $x+y-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ geldt

$$V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = p + qV(2x+2y-2),$$

dus

$$qV(2x+2y-2) = V\left(x+y-\frac{1}{2}\right) - p.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
D(x, y) &= p + p(V(x + y - \frac{1}{2}) - p) - p^2 - pqV(2y - 1) - pqV(2x) \\
&= p + pV(x + y - \frac{1}{2}) - p^2 - p^2 - pqV(2y - 1) - pqV(2x) \\
&= p(1 - 2p) + p(V(x + y - \frac{1}{2}) - qV(2y - 1) - qV(2x)) \\
&= p(q - p) + p(V(x + y - \frac{1}{2}) - pV(2y - 1) - qV(2x) - (q - p)V(2y - 1)) \\
&= p(q - p) - p(q - p)V(2y - 1) + pD(2x, 2y - 1) \\
&= p(q - p)(1 - V(2y - 1)) + pD(2x, 2y - 1).
\end{aligned}$$

Omdat $p > 0$ en omdat de hoogste rang van $(2x, 2y - 1)$ kleiner is dan de hoogste rang van (x, y) geldt dat $pD(2x, 2y - 1) \geq 0$. Omdat $q - p > 0$, $p > 0$ en omdat $V(x) < 1$ en dus $1 - V(x) > 0$ voor elke $0 \leq x \leq 1$, geldt $p(q - p)(1 - V(2y - 1)) \geq 0$. Dus $D(x, y) \geq 0$.

Dus er geldt ook $D(x, y) \geq 0$ voor paren dyadische breuken (x, y) met als hoogste rang M , dus met inductie volgt dat dit geldt voor elke rang $m \in \mathbb{N}$. Dus GS is optimaal in een ongunstig casino. \square

4 Hogere orde Gedurfd Spel

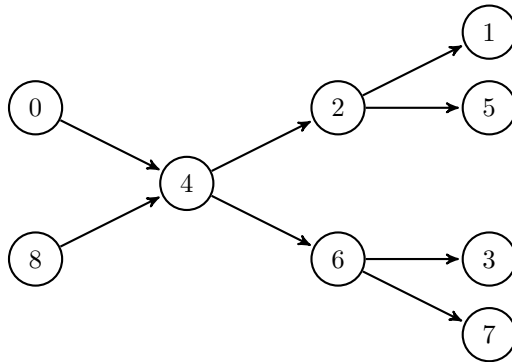
Alhoewel het een feit is dat GS optimaal is in casino's met winkans $p < \frac{1}{2}$ is de optimaliteit van GS niet uniek; dit feit werd door Lester Rubins, pionier bij dit probleem, gebruikt om foutieve bewijzen, met als uitkomst de unieke optimaliteit van GS, te kunnen verwerpen zonder verder naar de inhoud te kijken [5].

Om een eerste wetmatigheid in het bestuderen van meerdere optimale strategieën te introduceren het volgende voorbeeld:

$p < \frac{1}{2}, N = 8$, waarbij we allereerst de strategie GS beschouwen.

We weten dat $v_0 = 0, v_8 = 1$ en kunnen dan afleiden dat $v_4 = pv_8 + qv_0 = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$.

Op dezelfde wijze volgt $v_2 = pv_4 = p^2$ en $v_1 = pv_2 = p^3$. Voordat we v_3 voor GS kunnen bepalen moeten we eerst v_6 kennen. Deze is eenvoudig te berekenen aan de hand van v_4 en v_8 , aangezien de inzet voor $i = 6$ met $N = 8$ gelijk is aan 2: $v_6 = pv_8 + qv_4 = p + pq$. Nu volgt ook $v_3 = pv_6 = p^2 + p^2q$. Zie ter illustratie onderstaande figuur.



Figuur 4.1: Bepaling waardevector voor N=8

Nu hebben we genoeg gegevens om een alternatieve strategie onder de loop te nemen: een inzet van 1 in toestand 3. Dit geeft $v_3 = pv_4 + qv_2 = p^2 + q * p^2$, exact gelijk aan de waardevector met strategie GS. Hiermee is bewezen dat GS inderdaad niet in alle gevallen uniek optimaal is, en hebben we een aanzet gegeven tot het concept van hogere orde Gedurfd Spel.

4.1 Tweede orde Gedurfd Spel

Om te beginnen zullen we kijken naar een zogeheten tweede orde Gedurfd Spel strategie, met wederom $[0, 1]$ als domein. Hierbij wordt GS gehanteerd met als doel $\frac{1}{2}$ voor $0 < i < \frac{1}{2}$, en wordt GS gehanteerd met als doel 1 voor $\frac{1}{2} \leq i < 1$, waarbij nooit meer dan $i - \frac{1}{2}$ kan worden ingezet. Het speelveld wordt in feite in tweeën gesplitst, waarna op beide helften GS wordt gespeeld.

De strategie $f_2(i)$ is derhalve als volgt weer te geven:

$$f_2(i) = \begin{cases} i & 0 \leq i < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - i & \frac{1}{4} \leq i < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i = \frac{1}{2} \\ i - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < i \leq \frac{3}{4} \\ 1 - i & \frac{3}{4} < i \leq 1. \end{cases}$$

Stelling 4.1. *Tweede orde Gedurfd Spel is optimaal.*

Bewijs

Zij V_2 de waardefunctie corresponderend met f_2 en V de waardefunctie bij de strategie GS. We bekijken eerst de situatie $i = \frac{1}{2}$. Hier wordt simpelweg $\frac{1}{2}$ ingezet, net als bij GS, dus voor $i = \frac{1}{2}$ is tweede orde GS optimaal.

Stel dat $0 < i < \frac{1}{2}$. De speler wint wanneer $\frac{1}{2}$ bereikt wordt en de laatste ronde bovendien gewonnen wordt: er wordt dan immers $\frac{1}{2}$ ingezet met toestand 0 of 1 tot gevolg. Met GS is de kans om $\frac{1}{2}$ te bereiken vanuit i gelijk aan de kans om 1 te bereiken vanuit $2i$, dus $V_2(i) = pV(2i)$ voor $0 < i < \frac{1}{2}$, omdat de kans om het beslissende spel te winnen p is. Omdat $V(i) = pV(2i)$ voor $0 < i < \frac{1}{2}$ onder de strategie GS impliceert dit dat tweede orde GS optimaal is voor $0 < i < \frac{1}{2}$.

Stel nu dat $\frac{1}{2} < i < 1$. De speler wint wanneer 1 bereikt wordt of wanneer hij terugvalt naar $\frac{1}{2}$ en vervolgens het laatste spel wint. Met GS is de kans om 1 eerder dan $\frac{1}{2}$ te bereiken vanuit i gelijk aan de kans om 1 te bereiken vanuit $2i - 1$. Als $\frac{1}{2}$ eerder bereikt wordt, is de kans om te winnen wederom p . Er volgt dat $V_2(i) = V(2i - 1) + (1 - V(2i - 1))p$, waarbij de tweede term het geval waarin er teruggevallen wordt naar $\frac{1}{2}$ representeert. Omdat voor $\frac{1}{2} < i < 1$ geldt $V(2i - 1) + (1 - V(2i - 1))p = p + qV(2i - 1) = V(i)$, volgt ook voor $\frac{1}{2} < i < 1$ $V_2(i) = V(i)$ dat tweede orde GS optimaal is.

Omdat de gevallen $i = 0, i = 1$ triviaal zijn bewijst dit dat tweede orde GS eveneens een optimale strategie is in een ongunstig casino. \square

4.2 n -de orde Gedurfd Spel

Behalve tweede orde GS kunnen we kijken naar hogere orde GS. Ter illustratie hiervan de schematische weergave van derde orde GS, waarbij het doel $\frac{1}{4}$ is voor $i \in [0, \frac{1}{4}]$ en $\frac{3}{4}$ het doel is voor $i \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

$$f_3(i) = \begin{cases} i & 0 < i \leq \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} - i & \frac{1}{8} < i < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & i = \frac{1}{4} \\ i - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} < i \leq \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} - i & \frac{3}{8} < i < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i = \frac{1}{2} \\ i - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < i \leq \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} - i & \frac{5}{8} < i < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & i = \frac{3}{4} \\ i - \frac{3}{4} & \frac{3}{4} < i \leq \frac{7}{8} \\ 1 - i & \frac{7}{8} < i < 1 \end{cases}$$

De algemene structuur van n -de orde GS (V_n) wordt hiermee duidelijk: op 2^n intervallen wordt GS gehanteerd met als ondergrenzen en doelen respectievelijk $\frac{j}{2^n}$ en $\frac{j+1}{2^n}$ waarbij $j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq 2^n$. Dat kan als volgt worden weergegeven:

$$f_n(i) = \begin{cases} i & 0 < i \leq \frac{1}{2^n} \\ \frac{j}{2^{n-1}} - i & \frac{2j-1}{2^n} < i \leq \frac{j}{2^{n-1}} \\ g_n(i) & i = \frac{j}{2^{n-1}} \\ i - \frac{j}{2^{n-1}} & \frac{j}{2^{n-1}} < i < \frac{2j+1}{2^n} \\ 1 - i & 1 - \frac{1}{2^n} < i < 1 \end{cases}$$

met $1 \leq j \leq 2^{n-1} - 1$.

Voor de 'randgevallen' (zoals $i = \frac{3}{4}$ bij derde orde GS) definiëren we een functie g_n met $g_n(i) = \frac{1}{2^l}$ voor $i = \frac{k}{2^l}$ als $\text{ggd}(k, 2^l) = 1, 1 \leq l \leq n$.

Lemma 4.2. Voor $g_n(i), i < \frac{1}{2}$ geldt $2g_n(i) = g_n(2i)$.

Bewijs

Stel dat $i = \frac{k}{2^l}$ en $\text{ggd}(k, 2^l) = 1$. Dan $g_n(i) = \frac{1}{2^l}$.

Er volgt dat $2g_n(i) = 2 \cdot \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{l-1}}$.

Neem $2i = j$. Dan $j = \frac{k}{2^{l-1}}, \text{ggd}(k, 2^{l-1}) = 1$.

Dit geeft $g_n(2i) = g_n(j) = \frac{1}{2^{l-1}}$ dus er geldt dat $g_n(2i) = 2g_n(i)$. \square

Lemma 4.3. Voor $g_n(i), i > \frac{1}{2}$ geldt $g_n(i - \frac{1}{2}) = g_n(i)$.

Bewijs

Stel dat $i = \frac{k}{2^l}$ en $\text{ggd}(k, 2^l) = 1$. Dan $g_n(i) = \frac{1}{2^l}$.

Merk op dat als $i > \frac{1}{2}$ dan $k > 2^{l-1}$. Neem $j = i - \frac{1}{2} = \frac{k-2^{l-1}}{2^l}$.

$\text{ggd}(k - 2^{l-1}, 2^l) = 1$ dus $g_n(j) = \frac{1}{2^l}$, dus er geldt dat $g_n(i - \frac{1}{2}) = g_n(i)$. \square

Stelling 4.4. n -de orde Gedurfd Spel is optimaal voor elke $n \in \mathbb{N} > 0$.

Bewijs

We zullen Stelling 4.4 bewijzen voor $n \geq 1$ met volledige inductie. De eerste stap is elementair: de optimaliteit van GS is immers al eerder bewezen in Stelling 3.3.

Neem nu aan dat n -de orde GS optimaal is voor elke $n \leq M$. We zullen aantonen dat $M+1$ -ste orde GS dan ook optimaal is.

Het geval $i = \frac{1}{2}$ is zeer eenvoudig: hier wordt simpelweg $\frac{1}{2}$ ingezet, net als bij M -de orde GS, dus ook voor $i = \frac{1}{2}$ is $M+1$ -ste orde GS optimaal.

Zij V_M de waardefunctie bij de strategie M -de orde GS en V_{M+1} de waardefunctie bij de strategie $M+1$ -ste orde GS. Stel dat $0 < i < \frac{1}{2}$. De speler wint wanneer $\frac{1}{2}$ bereikt wordt en de laatste ronde bovendien gewonnen wordt. Beschouw de waarden die aangenomen worden gedurende het proces waar 0 of $\frac{1}{2}$ bereikt wordt met de strategie $M+1$ -ste orde GS.

Stel dat we deze waarden met 2 vermenigvuldigen, waarbij we in plaats van $2i$ steeds het aangepaste interval voor i noteren.

$$f_{M+1}(i) = \begin{cases} i & 0 < i \leq \frac{1}{2^{M+1}} \\ \frac{j}{2^M} - i & \frac{2j-1}{2^{M+1}} < i \leq \frac{j}{2^M} \\ g_n(i) & i = \frac{j}{2^M} \\ i - \frac{j}{2^M} & \frac{j}{2^M} < i < \frac{2j+1}{2^{M+1}} \\ \frac{1}{2} - i & \frac{2^M-1}{2^{M+1}} < i < \frac{1}{2} \end{cases}$$

met $1 \leq j \leq 2^{M-1} - 1$, immers bekijken we alleen de eerste helft.

Dit geeft

$$2f_{M+1}(i) = \begin{cases} i & 0 < i \leq \frac{1}{2^M} \\ \frac{j}{2^{M-1}} - i & \frac{2j-1}{2^M} < i \leq \frac{j}{2^{M-1}} \\ 2g_n(i) & i = \frac{j}{2^{M-1}} \\ i - \frac{j}{2^{M-1}} & \frac{j}{2^{M-1}} < i < \frac{2j+1}{2^M} \\ 1 - i & 1 - \frac{1}{2^M} < i < 1 \end{cases}$$

met $1 \leq j \leq 2^{M-1} - 1$.

Dit is exact het overzicht dat hoort bij M -de orde GS (vanwege Lemma 4.2 met betrekking tot de randgevallen). Er volgt dat $V_{M+1}(i) = pV_M(2i)$ voor $0 < i < \frac{1}{2}$, omdat de kans om het beslissende spel te winnen p is. Omdat $V_M(i) = pV_M(2i)$ voor $0 < i < \frac{1}{2}$ impliceert dit dat $M+1$ -ste orde GS optimaal is voor $0 < i < \frac{1}{2}$.

Stel nu dat $\frac{1}{2} < i < 1$. De speler wint wanneer 1 bereikt wordt of wanneer hij terugvalt naar $\frac{1}{2}$ en vervolgens het laatste spel wint. Beschouw de waarden die aangenomen worden gedurende het proces waar $\frac{1}{2}$ of 1 bereikt wordt met de strategie $M+1$ -ste orde GS.

$$f_{M+1}(i) = \begin{cases} i - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < i \leq \frac{2^M+1}{2^{M+1}} \\ \frac{j}{2^M} - i & \frac{2j-1}{2^{M+1}} < i \leq \frac{j}{2^M} \\ g_n(i) & i = \frac{j}{2^M} \\ i - \frac{j}{2^M} & \frac{j}{2^M} < i < \frac{2j+1}{2^{M+1}} \\ 1 - i & \frac{2^{M+1}-1}{2^{M+1}} < i < 1 \end{cases}$$

met $2^{M-1} \leq j \leq 2^M - 1$.

Stel dat we deze waarden met $\frac{1}{2}$ verminderen. Definieer hierbij $k = j - 2^{M-1}$.

geeft

$$f_{M+1}(i) - \frac{1}{2} = \begin{cases} i & 0 < i \leq \frac{1}{2^{M+1}} \\ \frac{j}{2^M} - i & \frac{2j-1}{2^{M+1}} < i \leq \frac{j}{2^M} \\ g_n(i) - \frac{1}{2} & i = \frac{j}{2^M} \\ i - \frac{j}{2^M} & \frac{j}{2^M} < i < \frac{2j+1}{2^{M+1}} \\ \frac{1}{2} - i & \frac{2^M-1}{2^{M+1}} < i < \frac{1}{2} \end{cases}$$

met $1 \leq k \leq 2^{M-1} - 1$

Merk op dat proces identiek is aan de eerste helft van $M+1$ -ste orde GS (vanwege Lemma 4.3 met betrekking tot de randgevallen). We zagen eerder dat dit proces met twee vermenigvuldigen precies het overzicht geeft dat hoort bij M -de orde GS. Dit impliceert dat de waarden tussen $\frac{1}{2}$ en 1 met $\frac{1}{2}$ verminderen

en vervolgens met twee vermenigvuldigen een proces geeft dat identiek is aan M -de orde GS op een schaal van 0 tot 1, met beginpunt $2i - 1$.

Er volgt dat $V_{M+1}(i) = V_M(2i - 1) + (1 - V_M(2i - 1))p$, waarbij de tweede term het geval representeert waarin er teruggevallen wordt naar $\frac{1}{2}$, met resulterende winkans p . Omdat voor $\frac{1}{2} < i < 1$ geldt $V_M(2i - 1) + (1 - V_M(2i - 1))p = p + qV_M(2i - 1) = V_M(i)$ volgt dat ook $V_{M+1}(i) = V_M(i)$ voor $\frac{1}{2} < i < 1$. Dus $M+1$ -ste orde GS is optimaal.

Na aan te nemen dat n -de orde GS optimaal is voor elke $n \leq M$ volgt dus inderdaad dat $M+1$ -ste orde GS dan ook optimaal is. We kunnen dus concluderen dat n -de orde GS optimaal is voor elke $n \in \mathbb{N} > 0$. \square

5 Roulette: meerdere optimale strategieën

In dit hoofdstuk zullen we ons concentreren op de vraag welke strategieën optimaal zijn bij roulette met gegeven huislimiet L en einddoel N . We gaan hierbij uit van een winkans $p = \frac{18}{37}$, omdat er bij (Europees) roulette naast de 18 zwarte vakken en 18 rode vakken één 0 is die bij geen van beide kleuren hoort en daarmee fungeert als winstfactor voor het casino. Door voor elke geheeltallige inzet na te gaan wat de kans is om het einddoel te bereiken, gegeven die inzet, kunnen we nagaan welke strategieën allemaal optimaal zijn. Tegelijkertijd zullen we inzicht krijgen in de kans om het doel te bereiken voor alle beginkapitalen.

5.1 Huislimiet

In sommige casino's kan er sprake zijn van een huislimiet $L = k, k \in \mathbb{R}$, wat betekent dat een speler ten hoogste k in mag zetten. Dit heeft aanzienlijk effect op de optimaliteit van verschillende strategieën. Bij een model met huislimiet is een soortgelijke strategie als Gedurfd Spel mogelijk, namelijk Aangepast Gedurfd Spel (vanaf hier: AGS), waarbij $\min(i, N - i, k)$ wordt ingezet. Hierbij is het uiteraard weer mogelijk dit alles zo te schalen dat $N = 1$.

Omtrent de optimaliteit in (ongunstige) modellen met een huislimiet is een aantal merkwaardige zaken bekend. Het meest opzienbarende is dat AGS niet in alle gevallen optimaal is. Er zijn dus situaties waar, ondanks het feit dat de verwachte opbrengst negatief is, het raadzaam is om een lager bedrag in te zetten om de kans te maximaliseren dat N bereikt wordt [2].

Wel is AGS optimaal in gevallen waar de huislimiet L een deler is van het einddoel N . Anders gezegd is AGS optimaal als $L \cdot c = N$ met $c \in \mathbb{N}$ (zie voor bewijs [6]). Omdat we weten dat deze strategie optimaal is, kunnen we de optimaliteit van andere strategieën aantonen door te laten zien dat de waardevector onder die strategie gelijk is aan de waardevector onder AGS. In verband met deze stelling zullen we de twee gevallen $N = 12$ en $N = 16$ bestuderen. Zowel 12 als 16 hebben een groot aantal delers, waardoor we voor verschillende huislimieten na kunnen gaan welke strategieën optimaal zijn. Daarnaast is het bij zowel 12 als 16 mogelijk om zonder numerieke methoden of extreme rompslomp de waardevectoren te bepalen, waarbij steeds van de optimaliteit van AGS gebruik wordt gemaakt. De optimale strategieën kunnen we vervolgens onderling vergelijken, waarna we zullen proberen om regelmatigheid te achterhalen.

5.2 $N = 16$

We zullen ten eerste het geval met $N = 16$ bekijken. Om de optimaliteit van AGS te garanderen, hebben we vier keuzes wat betreft de huislimiet: $L = 1$, $L = 2$, $L = 4$ en $L = 8$. Het eerste geval is als optimalisatieprobleem echter niet bijster interessant omdat er simpelweg steeds 1 ingezet moet worden tot toestand 0 of N bereikt is. Bij het laatste geval is een belangrijke kanttekening op zijn plaats: als $N = 16$ zal er nooit meer ingezet worden dan 8 met de strategie AGS waardoor deze huislimiet geen effect heeft op de strategie. Dit neemt niet weg dat het ook bij de situatie zonder daadwerkelijke huislimiet interessant is om te kijken welke strategieën naast AGS optimaal zijn en hoe dit

zich verhoudt tot de situaties met een huislimiet. Daarnaast geeft deze analyse inzicht in de kansen om het einddoel te halen voor elk beginkapitaal, en wat het effect van het instellen van huislimieten precies is.

5.2.1 Geen huislimiet ($L = 8$)

We beginnen met de situatie zonder huislimiet. Uiteraard geldt ook nu dat $v_0 = 0$ en $v_{16} = 1$. Omdat AGS optimaal is geldt

$$v_8 = p, v_4 = pv_8 = p^2, v_2 = pv_4 = p^3, v_1 = pv_2 = p^4.$$

Omdat we nu v_8 en v_{16} kennen, volgt dat

$$v_{12} = qv_8 + pv_{16} = p + pq.$$

Daaruit kunnen we weer concluderen dat

$$v_6 = pv_{12} = p^2 + p^2q, v_3 = pv_6 = p^3 + p^3q.$$

Op eenzelfde wijze kunnen we afleiden dat

$$v_{10} = qv_4 + pv_{16} = p + p^2q, v_5 = pv_{10} = p^2 + p^3q.$$

Ten slotte geldt

$$v_{14} = qv_{12} + pv_{16} = p + pq + pq^2.$$

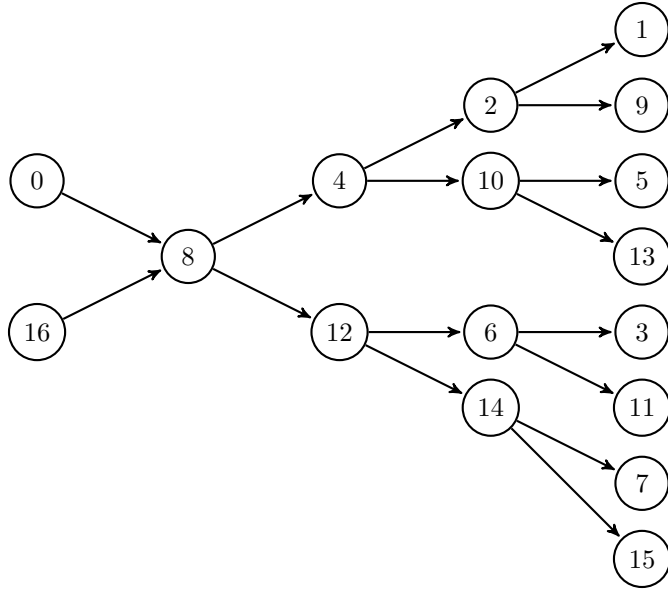
Nu hebben we ook genoeg gegevens om de laatste onbekenden, v_7, v_9, v_{11}, v_{13} en v_{15} , af te leiden:

$$\begin{aligned} v_7 &= pv_{14} = p^2 + p^2q + p^2q^2, \\ v_9 &= qv_2 + pv_{16} = p + p^3q, \\ v_{11} &= qv_6 + pv_{16} = p + p^2q + p^2q^2, \\ v_{13} &= qv_{10} + pv_{16} = p + pq + p^2q^2, \\ v_{15} &= qv_{14} + pv_{16} = p + pq + pq^2 + pq^3. \end{aligned}$$

Zie ter illustratie Figuur 5.1.

Dit geeft, voor $p = \frac{18}{37}$ en $q = \frac{19}{37}$, het volgende overzicht:

v_0	0	v_9	$p + p^3q = 0,546$
v_1	$p^4 = 0,0560$	v_{10}	$p + p^2q = 0,608$
v_2	$p^3 = 0,115$	v_{11}	$p + p^2q + p^2q^2 = 0,670$
v_3	$p^3 + p^3q = 0,174$	v_{12}	$p + pq = 0,736$
v_4	$p^2 = 0,237$	v_{13}	$p + pq + p^2q^2 = 0,799$
v_5	$p^2 + p^3q = 0,295$	v_{14}	$p + pq + pq^2 = 0,865$
v_6	$p^2 + p^2q = 0,358$	v_{15}	$p + pq + pq^2 + pq^3 = 0,930$
v_7	$p^2 + p^2q + p^2q^2 = 0,421$	v_{16}	1
v_8	$p = 0,486$		



Figuur 5.1: Bepaling waardevector voor $N=16$

Aan de hand hiervan kunnen we nu gaan bepalen welke strategieën nog meer optimaal zijn, door na te gaan voor welke andere toegestane inzetten de waardevector gelijk is aan de waardevector in bovenstaande tabel.

Voor $i = 2$ geldt, wanneer de inzet 1 is, dat de waardevector v_2 gelijk is aan

$$qv_1 + pv_3 = qp^4 + p^4 + p^4q = p^3(p + 2qp) < p^3.$$

Voor $p = \frac{18}{37}$ geldt bijvoorbeeld $v_2 = 0,113 < 0,115$ dus 1 inzetten is niet optimaal in toestand $i = 1$.

Beschouw nu echter $i = 3$. Wanneer de inzet hier 1 is geldt dat de waardevector v_3 gelijk is aan

$$qv_2 + pv_4 = qp^3 + p^3,$$

oftewel identiek aan de waardevector onder de strategie AGS. Kortom, ook de inzet 1 is optimaal. Wanneer de inzet 2 is geldt echter

$$v_3 = qv_1 + pv_5 = qp^4 + p^3 + p^4q = p^3 + 2p^4q < p^3 + p^3q,$$

want $2p < 1$. Dus 1 en 3 zijn optimale inzetten maar 2 is geen optimale inzet.

Op eenzelfde wijze kan voor $4 \leq i \leq 15$ bepaald worden welke inzetten optimaal zijn. Dit resulteert in de volgende tabel:

i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	9	1, 7
2	2	10	2, 6
3	1, 3	11	1, 3, 5
4	4	12	4
5	1, 3, 5	13	1, 3
6	2, 6	14	2
7	1, 7	15	1
8	8		

Hierbij zijn de maximaal toegestane inzetten, conform de strategie AGS, vetgedrukt. We zien dat, zoals we al verwachtten in de situatie zonder effectieve huislimiet, tweede en derde orde GS optimaal zijn: het is altijd optimaal om ‘via’ 8 (tweede orde) te spelen en als 4 of 12 dichterbij ligt dan 8, is via 4 of 12 spelen ook optimaal (derde orde). Verder zien we dat de optimale keuzes geheel symmetrisch zijn ten opzichte van $i = 8$. Voorts kunnen we opmerken dat dit ook de enige strategieën zijn die optimaal zijn.

5.2.2 $L = 4$

Omdat 4 een deler is van 16, volgt dat ook nu AGS optimaal is. Het is echter lastiger dan bij de situatie zonder huislimiet om $v_i, 1 \leq i \leq 15$ te bepalen, aangezien we v_8 niet meteen af kunnen leiden. Deze is immers afhankelijk van v_4 en v_{12} . We hebben hiervoor een lemma nodig.

Lemma 5.1. *Voor een Bernoulli-wandeling geldt voor $p \neq \frac{1}{2}$ dat*

$$f_{i,N} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N},$$

met $f_{i,N}$ de kans dat N vanuit i bereikt wordt en $q = 1 - p$.

Bewijs

Zie [3], pp. 73-74.

Omdat AGS optimaal is, kunnen we de overgangen tussen v_0, v_4, v_8, v_{12} en v_{16} interpreteren als een Bernoulli-wandeling. Dus er geldt $v_{4i} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^4}$. Dit geeft $v_0 = 0, v_4 = 0, 230, v_8 = 0, 473, v_{12} = 0, 729$ en $v_{16} = 1$.

Nu v_4, v_8 en v_{12} bekend zijn, kunnen we ook v_{14} en v_2 bepalen: $v_2 = pv_4$ en $v_{14} = p + qv_{12}$. Hieruit volgt weer $v_1 = pv_2$ en $v_{15} = p + qv_{14}$.

Om de volgende waarden te bepalen is weer een lemma nodig:

Lemma 5.2. *Voor $4 \leq i \leq 8$ geldt $v_i = \frac{-pv_{i+8} - \frac{q}{p}v_{i-4}}{q - \frac{1}{p}}$.*

Bewijs

Omdat de huislimiet 4 is, is 4 inzetten optimaal voor $4 \leq i \leq 12$. Dus voor $4 \leq i \leq 8$ geldt

$$v_{i+4} = qv_i + pv_{i+8}.$$

Ook geldt

$$v_i = qv_{i-4} + pv_{i+4},$$

wat impliceert dat

$$v_{i+4} = \frac{1}{p}v_i - \frac{q}{p}v_{i-4}.$$

Dit combineren geeft

$$qv_i + pv_{i+8} = \frac{1}{p}v_i - \frac{q}{p}v_{i-4},$$

dus

$$v_i\left(q - \frac{1}{p}\right) = -pv_{i+8} - \frac{q}{p}v_{i-4},$$

ofwel

$$v_i = \frac{-pv_{i+8} - \frac{q}{p}v_{i-4}}{q - \frac{1}{p}}. \quad \square$$

Dit kunnen we gebruiken om de overige waarden te bepalen. Immers, hieruit volgt dat

$$v_6 = \frac{-pv_{14} - \frac{q}{p}v_2}{q - \frac{1}{p}}.$$

Omdat we v_{14} en v_2 kennen kunnen we hieruit v_6 afleiden. Via $v_{10} = qv_6 + pv_{14}$, $v_3 = pv_6$ en $v_{13} = qv_{10} + p$ volgen nu ook v_{10} , v_3 en v_{13} .

Uit Lemma 5.2 volgt ook

$$v_5 = \frac{-pv_{13} - \frac{q}{p}v_1}{q - \frac{1}{p}}.$$

Omdat we v_{13} en v_1 kennen kunnen we hieruit v_5 afleiden. Via $v_9 = qv_5 + pv_{13}$ volgt nu ook v_9 .

Op dezelfde manier kunnen we ten slotte v_7 en v_{11} bepalen:

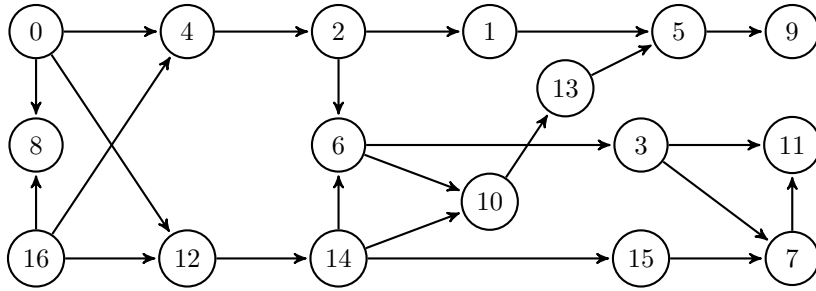
$$v_7 = \frac{-pv_{15} - \frac{q}{p}v_3}{q - \frac{1}{p}}$$

geeft de waarde van v_7 , waarna uit $v_{11} = qv_7 + pv_{15}$ ten slotte v_{11} volgt.

Zie ter illustratie Figuur 5.2.

Dit uitwerken levert de onderstaande tabel op:

v_0	0	v_9	0,534
v_1	0,0545	v_{10}	0,598
v_2	0,112	v_{11}	0,662
v_3	0,169	v_{12}	0,729
v_4	0,230	v_{13}	0,793
v_5	0,288	v_{14}	0,861
v_6	0,348	v_{15}	0,929
v_7	0,409	v_{16}	1
v_8	0,473		



Figuur 5.2: Bepaling waardevector voor $N=16$, $L=4$

Ook in dit geval kunnen we nagaan welke strategieën nog meer optimaal zijn. Dit is weergegeven in onderstaande tabel:

i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	9	1, 3, 4
2	2	10	2, 4
3	1, 3	11	1, 3, 4
4	4	12	4
5	1, 3, 4	13	1, 3
6	2, 4	14	2
7	1, 3, 4	15	1
8	4		

Wederom zijn de maximaal toegestane inzetten, conform de strategie AGS, vetgedrukt. We zien, net als bij de situatie zonder huislimiet, dat de optimale strategieën wederom volledig symmetrisch in $i = 8$ zijn. Daarnaast kunnen we zien dat ‘via’ 4, 8 en 12 spelen ook in dit geval vaak een alternatieve optimale strategie is. Dit is niet zo vanzelfsprekend als het wellicht klinkt: in toestand 5 was het bijvoorbeeld optimaal om 1, 3 of 5 in te zetten. De waardevector voor inzet 1 en 3 was in dat geval dus gelijk aan de waardevector voor inzet 5. Nu (voor $L = 4$) 5 als optie wegvalt en 4 deze vervangt (als maximale inzet), zien we dat de waardevector voor inzet 1 en 3 meeveranderen, en dan precies gelijk zijn aan de waardevector voor inzet 4.

Het meest opvallende verschil is het feit dat in $i = 7$ en $i = 9$, in tegenstelling tot de vorige situatie, inzet 3 optimaal is. Waar we zonder huislimiet zagen dat alleen AGS (1 en 7 inzetten) optimaal was, zien we nu dat 1, 3 en 4 optimaal zijn. Merk op dat dit niet onder hogere orde GS valt: alleen inzet 1 is aan de hand hiervan te verklaren.

5.2.3 $L = 2$

Ten slotte de meest restrictieve huislimiet: $L = 2$. Gebruikmakend van Lemma 5.1 volgt

$$v_{2i} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^8},$$

waarmee we $v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}$ en v_{14} kunnen berekenen. Hieruit volgen ook direct v_1 en v_{15} , immers $v_1 = pv_2$ en $v_{15} = qv_{14} + p$.

Nu resten nog de vergelijkingen

$$v_3 = qv_1 + pv_5 \quad (5.1)$$

$$v_5 = qv_3 + pv_7 \quad (5.2)$$

$$v_7 = qv_5 + pv_9 \quad (5.3)$$

$$v_9 = qv_7 + pv_{11} \quad (5.4)$$

$$v_{11} = qv_9 + pv_{13} \quad (5.5)$$

$$v_{13} = qv_{11} + pv_{15} \quad (5.6)$$

We zullen v_3 op twee manieren uitdrukken in v_1, v_{13} en v_{15} en deze vergelijkingen vervolgens aan elkaar gelijkstellen. Omdat v_1 en v_{15} bekend zal hieruit v_{13} volgen.

(5.3) impliceert

$$v_5 = \frac{1}{q}v_7 - \frac{p}{q}v_9.$$

Dit invullen in (5.1) geeft

$$v_3 = qv_1 + \frac{p}{q}v_7 - \frac{p^2}{q}v_9. \quad (5.7)$$

(5.4) impliceert

$$v_7 = \frac{1}{q}v_9 - \frac{p}{q}v_{11}.$$

Dit invullen in (5.7) geeft

$$v_3 = qv_1 + \frac{p}{q^2}v_9 - \frac{p^2}{q^2}v_{11} - \frac{p^2}{q}v_9. \quad (5.8)$$

(5.5) impliceert

$$v_9 = \frac{1}{q}v_{11} - \frac{p}{q}v_{13}.$$

Dit invullen in (5.8) geeft

$$v_3 = qv_1 + \frac{p}{q^3}v_{11} - \frac{p^2}{q^3}v_{13} - \frac{2p^2}{q^2}v_{11} + \frac{p^3}{q^2}v_{13}. \quad (5.9)$$

Ten slotte impliceert (5.6) dat

$$v_{11} = \frac{1}{q}v_{13} - \frac{p}{q}v_{15}.$$

Dit invullen in (5.9) geeft

$$v_3 = qv_1 + \frac{p}{q^4}v_{13} - \frac{p^2}{q^4}v_{15} - \frac{3p^2}{q^3}v_{13} + \frac{2p^3}{q^3}v_{15} + \frac{p^3}{q^2}v_{13},$$

ofwel

$$v_3 = v_{13}\left(\frac{p}{q^4} - \frac{3p^2}{q^3} + \frac{p^3}{q^2}\right) + qv_1 + v_{15}\left(-\frac{p^2}{q^4} + \frac{2p^3}{q^3}\right). \quad (5.10)$$

Voorts zullen we een tweede manier vinden om v_3 te herschrijven. We maken hierbij weer gebruik van de herschreven vormen van v_5, v_7, v_9 en v_{11} die we zojuist bepaald hebben. (5.2) impliceert

$$v_3 = \frac{1}{q}v_5 - \frac{p}{q}v_7.$$

$v_5 = \frac{1}{q}v_7 - \frac{p}{q}v_9$ invullen geeft

$$v_3 = \frac{1}{q^2}v_7 - \frac{p}{q^2}v_9 - \frac{p}{q}v_7.$$

$v_7 = \frac{1}{q}v_9 - \frac{p}{q}v_{11}$ invullen geeft

$$v_3 = \frac{1}{q^3}v_9 - \frac{p}{q^3}v_{11} - \frac{2p}{q^2}v_9 + \frac{p^2}{q^2}v_{11}.$$

$v_9 = \frac{1}{q}v_{11} - \frac{p}{q}v_{13}$ invullen geeft

$$v_3 = \frac{1}{q^4}v_{11} - \frac{p}{q^4}v_{13} - \frac{3p}{q^3}v_{11} + \frac{2p^2}{q^3}v_{13} + \frac{p^2}{q^2}v_{11}.$$

En ten slotte, $v_{11} = \frac{1}{q}v_{13} - \frac{p}{q}v_{15}$ invullen geeft

$$v_3 = \frac{1}{q^5}v_{13} - \frac{p}{q^5}v_{15} - \frac{4p}{q^4}v_{13} + \frac{3p^2}{q^4}v_{15} + \frac{3p^2}{q^3}v_{13} - \frac{p^3}{q^3}v_{15},$$

ofwel

$$v_3 = v_{13}\left(\frac{1}{q^5} - \frac{4p}{q^4} + \frac{3p^2}{q^3}\right) + v_{15}\left(-\frac{p}{q^5} + \frac{3p^2}{q^4} - \frac{p^3}{q^3}\right). \quad (5.11)$$

(5.10) en (5.11) gelijkstellen geeft

$$v_{13}\left(\frac{p}{q^4} - \frac{3p^2}{q^3} + \frac{p^3}{q^2}\right) + qv_1 + v_{15}\left(-\frac{p^2}{q^4} + \frac{2p^3}{q^3}\right) = v_{13}\left(\frac{1}{q^5} - \frac{4p}{q^4} + \frac{3p^2}{q^3}\right) + v_{15}\left(-\frac{p}{q^5} + \frac{3p^2}{q^4} - \frac{p^3}{q^3}\right)$$

ofwel

$$v_{13}\left(-\frac{1}{q^5} + \frac{5p}{q^4} - \frac{6p^2}{q^3} + \frac{p^3}{q^2}\right) = -qv_1 + v_{15}\left(-\frac{p}{q^5} + \frac{4p^2}{q^4} - \frac{3p^3}{q^3}\right)$$

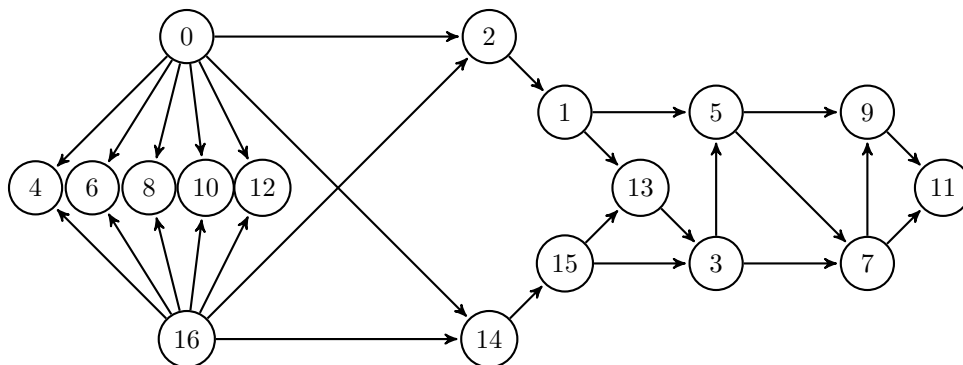
dus

$$v_{13} = \frac{-qv_1 + v_{15}\left(-\frac{p}{q^5} + \frac{4p^2}{q^4} - \frac{3p^3}{q^3}\right)}{-\frac{1}{q^5} + \frac{5p}{q^4} - \frac{6p^2}{q^3} + \frac{p^3}{q^2}} \quad (5.12)$$

Omdat p, q, v_1 en v_{15} bekend zijn kunnen we hieruit v_{13} afleiden.

Uit (5.11) volgt nu ook v_3 . Uit (5.1) volgt dan v_5 , uit (5.2) dan v_7 , uit (5.3) vervolgens v_9 en uit (5.4) ten slotte v_{11} .

Zie ter illustratie Figuur 5.3.



Figuur 5.3: Bepaling waardevector voor $N=16$, $L=2$

Dit resulteert in de volgende tabel:

v_0	0	v_9	0,508
v_1	0,0500	v_{10}	0,574
v_2	0,103	v_{11}	0,639
v_3	0,155	v_{12}	0,708
v_4	0,211	v_{13}	0,777
v_5	0,267	v_{14}	0,850
v_6	0,325	v_{15}	0,923
v_7	0,384	v_{16}	1
v_8	0,446		

Dit geeft de volgende optimale keuzes:

i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	9	1, 2
2	2	10	2
3	1, 2	11	1, 2
4	2	12	2
5	1, 2	13	1, 2
6	2	14	2
7	1, 2	15	1
8	2		

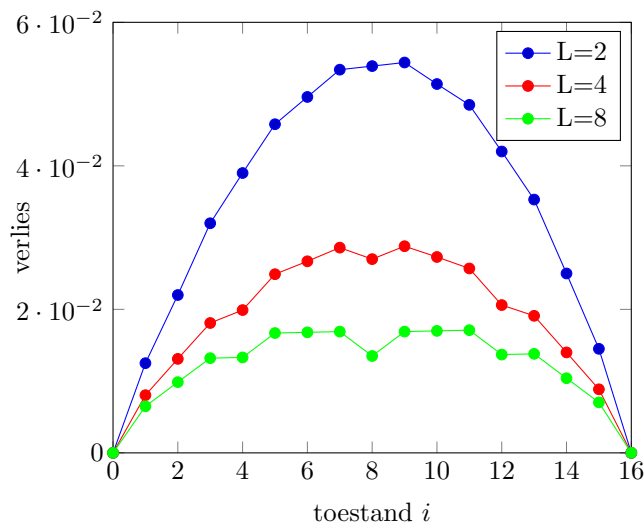
Dit is een stuk overzichtelijker: voor oneven i zijn alle inzetten optimaal, voor even i is alleen AGS optimaal. Dit ligt in de lijn der verwachting: in elke oneven toestand i zul je $\frac{17-i}{2}$ keer moet winnen: $\frac{15-i}{2}$ keer met inzet 2, 1 keer met inzet 1. Het is makkelijk voorstelbaar dat het dan weinig uitmaakt wanneer je die inzet 1 plaatsvindt.

5.2.4 Vergelijking

Ter vergelijking hier een overzicht van de waardevectoren voor de verschillende huislimieten (inclusief $L = 8$, de situatie met de facto geen huislimiet).

	$L = 2$	$L = 4$	$L = 8$		$L = 2$	$L = 4$	$L = 8$
v_0	0	0	0	v_9	0,508	0,534	0,546
v_1	0,0500	0,0545	0,0560	v_{10}	0,574	0,598	0,608
v_2	0,103	0,112	0,115	v_{11}	0,639	0,662	0,670
v_3	0,155	0,169	0,174	v_{12}	0,708	0,729	0,736
v_4	0,211	0,230	0,237	v_{13}	0,777	0,793	0,799
v_5	0,267	0,288	0,295	v_{14}	0,850	0,861	0,865
v_6	0,325	0,348	0,358	v_{15}	0,923	0,929	0,930
v_7	0,384	0,409	0,421	v_{16}	1	1	1
v_8	0,446	0,473	0,486				

We zien dat het verschil tussen $L = 2$ en $L = 4$ een stuk groter is dan het verschil tussen $L = 4$ en $L = 8$, en dat de verschillen het grootste zijn rond v_8 . Ter illustratie onderstaande figuur, waar het verschil tussen v_i en $\frac{i}{16}$ is uiteengezet; omdat het tweede de kans op het einddoel N in een neutraal casino betreft ($p = \frac{1}{2}$), is dit verschil een goede maatstaf voor de mate waarin een casino 'ongunstig' is. Zo geldt voor $L = 2$ dat dit 0,054 betreft in v_8 , omdat $0,5 - 0,446 = 0,054$. Je kunt dit getal interpreteren als het verwachte verlies dat je zult lijden bij de poging je einddoel N te bereiken. Zo beschik je in v_8 over $\frac{N}{2}$, terwijl je verwachte uitbetaling gelijk is aan $v_8 \cdot N = 0,446N$ in het geval $L = 2$.



Figuur 5.4: Verwachte verlies bij verschillende huislimieten voor $N=16$

In onderstaande tabel is de relatieve toename (in procenten) van het verwachte verlies naar aanleiding van het instellen van verschillende huislimieten uiteengezet, ten opzichte van de situatie zonder huislimiet (ofwel $L = 8$).

	$L = 2$	$L = 4$		$L = 2$	$L = 4$
v_1	93%	24%	v_9	222%	70%
v_2	123%	33%	v_{10}	202%	61%
v_3	142%	37%	v_{11}	184%	50%
v_4	193%	50%	v_{12}	207%	50%
v_5	174%	49%	v_{13}	156%	38%
v_6	195%	59%	v_{14}	140%	35%
v_7	216%	69%	v_{15}	106%	26%
v_8	299%	100%			

Aan de hand van de figuur en tabel zien we dat door het instellen van een huislimiet van $L = 2$ de verwachte winst voor het casino sterk toeneemt. In $i = 8$ verdubbelt de verwachte winst nagenoeg precies wanneer de huislimiet van 8 naar 4 of van 4 naar 2 gaat. Hierdoor is de verwachte winst in $i = 8$ ongeveer vier keer zo hoog met huislimiet $L = 2$ als zonder huislimiet. Verder kan opgemerkt worden dat het verwachte verlies niet (volledig) symmetrisch is in $i = 8$.

Aan de figuur valt op dat voor $L = 2$ de grafiek lijkt op een parabool, in tegenstelling tot $L = 4$ en met name $L = 8$. Daar zie je dat in oneven toestanden iets anders gebeurt dan in even toestanden, omdat in oneven toestanden er relatief veel stappen nodig zijn om het einddoel te bereiken. Voor $L = 8$ zien we dat voor $i = 5, 6, 7, 9, 10, 11$ het verwachte verlies nagenoeg gelijk is, terwijl het verlies in $i = 8$ daar ver onder ligt.

Ten slotte bekijken we het overzicht van de verschillende optimale waarden:

	$L = 2$	$L = 4$	$L = 8$		$L = 2$	$L = 4$	$L = 8$
v_1	1	1	1	v_9	1, 2	1, 3, 4	1, 7
v_2	2	2	2	v_{10}	2	2, 4	2, 6
v_3	1, 2	1, 3	1, 3	v_{11}	1, 2	1, 3, 4	1, 3, 5
v_4	2	4	4	v_{12}	2	4	4
v_5	1, 2	1, 3, 4	1, 3, 5	v_{13}	1, 2	1, 3	1, 3
v_6	2	2, 4	2, 6	v_{14}	2	2	2
v_7	1, 2	1, 3, 4	1, 7	v_{15}	1	1	1
v_8	2	4	8				

Een aantal structuren zien we in alle drie de gevallen terug. Ten eerste zijn de optimale strategieën volledig symmetrisch in $i = 8$. Ten tweede zien we, AGS buiten beschouwing gelaten, dat in oneven toestanden alleen oneven inzetten optimaal zijn en in even toestanden alleen even inzetten. Deze tendens naar even toestanden zagen we ook terug in het feit dat de winkans tussen bijvoorbeeld $i = 4$ en $i = 5$ significant minder toenam dan tussen $i = 5$ en $i = 6$. Opmerkelijk is dat in $i = 7, i = 9$ zowel 1 als 3 optimale inzetten zijn voor $L = 4$ terwijl alleen 1 dat is voor $L = 8$.

5.3 $N = 12$

We zullen als tweede casus $N = 12$ nemen. Behalve het triviale geval $L = 1$ zijn er vier opties waar de optimaliteit van AGS gegarandeerd is door Stelling

4.2: $L = 2$, $L = 3$, $L = 4$ en $L = 6$. $L = 6$ representeert hier uiteraard weer het geval zonder effectieve huislimiet.

5.3.1 Geen huislimiet ($L = 6$)

In de situatie zonder huislimiet is het bepalen van v_6 erg eenvoudig: dit is simpelweg p . Dit impliceert vervolgens dat

$$v_3 = pv_6 = p^2$$

en

$$v_9 = qv_6 + p = p + pq.$$

Vervolgens constateren we dat $v_4 = pv_8$ en $v_8 = qv_4 + p$. $v_8 = qv_4 + p$ substitueren in de eerste vergelijking geeft

$$v_4 = p(qv_4 + p) = p^2 + pqv_4.$$

Dit geeft

$$v_4(1 - pq) = p^2,$$

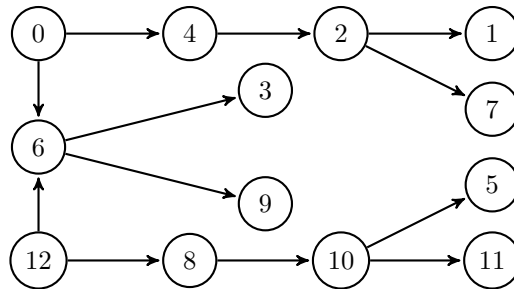
ofwel

$$v_4 = \frac{p^2}{1 - pq}.$$

Omdat v_4 nu bekend is, kunnen we ook v_8 bepalen middels $v_8 = qv_4 + p$.

Omdat we v_4 kennen, volgt ook via $v_2 = pv_4$ de waarde van v_2 . Via $v_1 = pv_2$ en $v_7 = qv_2 + p$ kunnen we ook die twee waarden bepalen. Omdat we v_8 kennen, volgt via $v_{10} = qv_8 + p$ de waarde van v_{10} . Uit $v_{11} = qv_{10} + p$ en $v_5 = pv_{10}$ volgen de laatste waarden.

Zie ter illustratie onderstaande figuur.



Figuur 5.5: Bepaling waardevector voor $N=12$, $L=6$

Dit geeft de volgende tabel:

v_0	0	v_7	0,565
v_1	0,0747	v_8	0,648
v_2	0,153	v_9	0,736
v_3	0,237	v_{10}	0,819
v_4	0,315	v_{11}	0,907
v_5	0,399	v_{12}	1
v_6	0,486		

Hieronder staat het overzicht van de verschillende optimale waarden:

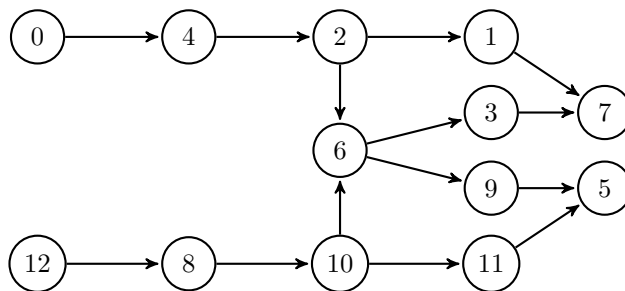
i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	7	1, 5
2	1, 2	8	1, 2, 4
3	3	9	3
4	1, 2, 4	10	1, 2
5	1, 5	11	1
6	6		

Wederom zijn de inzetten horend bij de strategie AGS vetgedrukt. We zien ook bij $N = 12$ dat er zonder huislimiet sprake is van volledige symmetrie, nu in $i = 6$. De optimale keuzes zijn overeenkomstig met hogere orde GS. In het bijzonder geldt dat alle optimale keuzes op de inzet 2 in $i = 4, 8$ horen bij derde orde GS (sommige eveneens bij tweede orde). De inzet 2 in $i = 4, 8$ hoort specifiek bij tweede orde GS, omdat vanuit 4 dan naar 6 toegewerkt wordt en vanuit 8 zo gespeeld wordt dat er bij verlies 6 resteert.

5.3.2 $L = 4$

Op v_4 en v_8 heeft deze huislimiet geen invloed, deze blijven dan ook gelijk aan de waarden in de situatie zonder huislimiet. Op dezelfde manier als daar volgen nu v_2 en v_{10} en daarmee v_1 en v_{11} . Omdat $L = 4$, kunnen we nu v_6 vinden via $v_6 = qv_2 + pv_{10}$, aangezien we v_2 en v_{10} kennen. Net als bij $L = 6$ volgen hieruit weer v_3 en v_9 . Deze kunnen we ten slotte gebruiken om via $v_5 = qv_3 + pv_9$ en $v_7 = qv_3 + pv_{11}$ de laatste twee waarden te bepalen.

Zie ter illustratie onderstaande figuur.



Figuur 5.6: Bepaling waardevector voor $N=12$, $L=4$

Dit geeft de volgende tabel:

v_0	0	v_7	0,561
v_1	0,0747	v_8	0,648
v_2	0,153	v_9	0,732
v_3	0,232	v_{10}	0,819
v_4	0,315	v_{11}	0,907
v_5	0,394	v_{12}	1
v_6	0,477		

Opvallend hierbij is dat $v_1, v_2, v_4, v_8, v_{10}$ en v_{11} niet van waarde veranderen ten opzichte van de situatie zonder huislimiet ($L = 6$).

Dit leidt tot de volgende optimale waarden:

i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	7	1, 3, 4
2	2	8	4
3	1, 3	9	1, 3
4	4	10	2
5	1, 3, 4	11	1
6	2, 4		

Ten eerste is ook hier het geheel volledig symmetrisch in $i = 6$. De verschillen zijn daarbuiten echter talrijk: in $i = 2$ is de inzet 1 niet meer optimaal, iets wat we tot nog toe nog niet hadden gezien. In $i = 10$ gebeurt, blijkens de symmetrie, hetzelfde. In $i = 3, 9$ is de inzet 1 nu juist wel optimaal, in tegenstelling tot de situatie zonder huislimiet. Daarnaast zien we dat in $i = 4, 8$ slechts nog de inzet 4 optimaal is, terwijl eerder ook 1 en 2 dat waren. Dit laat zien dat n -de orde GS niet altijd optimaal is als er een huislimiet is: dan zouden 1 en 2 ook optimaal moeten zijn. Verder is 3 inzetten in $i = 5, 7$ wel optimaal waar dat eerder niet het geval was, en in $i = 6$ is nu ook de inzet 2 optimaal. Overal waar er verandering had kunnen optreden, heeft dat dus ook plaatsgevonden. Ten slotte valt op dat inzetten die kunnen resulteren in $i = 4$ of $i = 8$ vaak optimaal zijn.

5.3.3 $L = 3$

Ten slotte beschouwen de de situatie met huislimiet $L = 3$.

Gebruikmakend van Lemma 5.1 kunnen we v_3, v_6 en v_9 bepalen:

$$v_{3i} = \frac{1 - \frac{q^i}{p}}{1 - \frac{q^4}{p}}, i = 1, 2, 3$$

Om de andere waarden te berekenen constateren we allereerst dat

$$\begin{cases} v_1 = pv_2 \\ v_2 = pv_4 \\ v_4 = qv_1 + pv_7 \\ v_5 = qv_2 + pv_8 \\ v_7 = qv_4 + pv_{10} \\ v_8 = qv_5 + pv_{11} \\ v_{10} = qv_8 + p \\ v_{11} = qv_{10} + p \end{cases}$$

We kunnen v_4 en v_8 als volgt herschrijven:

$$v_4 = qv_1 + pv_7 = pqv_2 + pqv_4 + p^2v_{10} = p^2qv_4 + pqv_4 + p^2qv_8 + p^3,$$

$v_8 = qv_5 + pv_{11} = q^2v_2 + pqv_8 + pqv_{10} + p^2 = pq^2v_4 + pqv_8 + pq^2v_8 + p^2q + p^2$.
 Opdat we de vergelijkingen kunnen combineren, zullen we in beide v_4 vrijmaken:

$$v_4 = p^2qv_4 + pqv_4 + p^2qv_8 + p^3$$

geeft

$$v_4(1 - p^2q - pq) = p^2qv_8 + p^3,$$

dus

$$v_4 = v_8 \frac{p^2q}{1 - p^2q - pq} + \frac{p^3}{1 - p^2q - pq}. \quad (5.13)$$

Anderzijds geeft

$$v_8 = pq^2v_4 + pqv_8 + pq^2v_8 + p^2q + p^2$$

dat

$$pq^2v_4 = v_8(1 - pq^2 - pq) - p^2q - p^2,$$

ofwel

$$v_4 = v_8 \frac{1 - pq^2 - pq}{pq^2} - \frac{pq + p}{q^2}. \quad (5.14)$$

Dit impliceert dat

$$v_8 \frac{p^2q}{1 - p^2q - pq} + \frac{p^3}{1 - p^2q - pq} = v_8 \frac{1 - pq^2 - pq}{pq^2} - \frac{pq + p}{q^2},$$

ofwel

$$v_8 \left(\frac{p^2q}{1 - p^2q - pq} - \frac{1 - pq^2 - pq}{pq^2} \right) = -\frac{pq + p}{q^2} - \frac{p^3}{1 - p^2q - pq},$$

dus

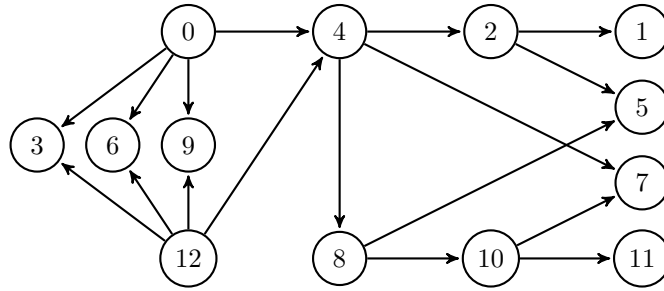
$$v_8 = \frac{1}{\frac{p^2q}{1 - p^2q - pq} - \frac{1 - pq^2 - pq}{pq^2}} \left(-\frac{pq + p}{q^2} - \frac{p^3}{1 - p^2q - pq} \right). \quad (5.15)$$

Door p en q in te vullen kunnen we nu v_8 bepalen. Uit (5.13) of (5.14) volgt nu ook v_4 .

Nu v_4 en v_8 bepaald zijn volgt de rest eenvoudig: $v_2 = pv_4, v_1 = pv_2, v_{10} = qv_8 + p$ en $v_{11} = qv_{10} + p$ geven de waarden van v_1, v_2, v_{10} en v_{11} . Hiermee kunnen we vervolgens de laatste waarden, v_5 en v_7 , bepalen: $v_5 = qv_2 + pv_8$ en $v_7 = qv_4 + pv_{10}$.

Zie ter illustratie Figuur 5.7.

Dit resulteert in het volgende overzicht:



Figuur 5.7: Bepaling waardevector voor $N=12$, $L=3$

v_0	0	v_7	0,554
v_1	0,0726	v_8	0,639
v_2	0,149	v_9	0,729
v_3	0,230	v_{10}	0,815
v_4	0,307	v_{11}	0,905
v_5	0,388	v_{12}	1
v_6	0,473		

Alle waarden veranderen nu wel, in tegenstelling tot bij $L = 4$ toen sommige waarden gelijk bleven.

Dit leidt tot de volgende optimale waarden:

i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	7	1, 2, 3
2	1, 2	8	1, 2, 3
3	3	9	3
4	1, 2, 3	10	1, 2
5	1, 2, 3	11	1
6	3		

Merk ten eerste weer de symmetrie op. Voor $L = 3$ gebeurt er verder iets opmerkelijks: alle inzetten zijn optimaal in elke toestand op $i = 3, 6, 9$ na, waar alleen de inzet 3 optimaal is. Dit is bovendien niet geheel te verklaren aan de hand van tweede en derde orde GS: dat zou niet verklaren waarom de inzet 2 optimaal is in $i = 5, 7$.

5.3.4 $L = 2$

Opnieuw gebruikmakend van Lemma 5.1 kunnen we v_2, v_4, v_6, v_8 en v_{10} bepalen:

$$v_{2i} = \frac{1 - \frac{q^i}{p}}{1 - \frac{q^6}{p}}$$

Hieruit volgen ook direct v_1 en v_{11} , immers $v_1 = pv_2$ en $v_{11} = qv_{10} + p$.

Nu resten nog de vergelijkingen

$$v_3 = qv_1 + pv_5 \quad (5.16)$$

$$v_5 = qv_3 + pv_7 \quad (5.17)$$

$$v_7 = qv_5 + pv_9 \quad (5.18)$$

$$v_9 = qv_7 + pv_{11} \quad (5.19)$$

(5.17) invullen in (5.16) geeft

$$v_3 = qv_1 + pqv_3 + p^2v_7,$$

dus

$$v_3(1 - pq) - qv_1 = p^2v_7,$$

ofwel

$$v_7 = \frac{v_3(1 - pq) - qv_1}{p^2}. \quad (5.20)$$

(5.19) en (5.17) invullen in (5.18) geeft

$$v_7 = q^2v_3 + pqv_7 + pqv_7 + p^2v_{11},$$

dus

$$v_7(1 - 2pq) = q^2v_3 + p^2v_{11},$$

ofwel

$$v_7 = \frac{q^2v_3 + p^2v_{11}}{1 - 2pq}. \quad (5.21)$$

(5.20) en (5.21) en vervolgens kruiselings vermenigvuldigen geeft

$$p^2q^2v_3 + p^4v_{11} = v_3(1 - pq)(1 - 2pq) - qv_1(1 - 2pq).$$

Vervolgens v_3 vrijmaken geeft

$$v_3(p^2q^2 - (1 - pq)(1 - 2pq)) = -p^4v_{11} - qv_1(1 - 2pq),$$

ofwel

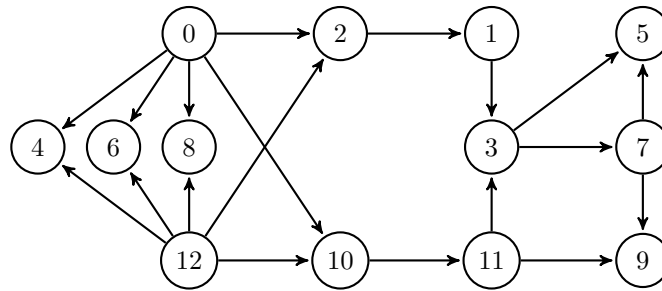
$$v_3 = \frac{-p^4v_{11} - qv_1(1 - 2pq)}{p^2q^2 - (1 - pq)(1 - 2pq)}.$$

Omdat we v_1 en v_{11} kennen kunnen we nu v_3 afleiden. Via (5.20) of (5.21) volgt nu bovendien v_7 . Ook de laatste waarden, v_5 en v_9 , volgen nu uit $v_5 = qv_3 + pv_7$ en $v_9 = qv_7 + pv_{11}$.

Zie ter illustratie onderstaande figuur.

Dit resulteert in het volgende overzicht:

v_0	0	v_7	0,542
v_1	0,0705	v_8	0,630
v_2	0,145	v_9	0,718
v_3	0,219	v_{10}	0,810
v_4	0,298	v_{11}	0,902
v_5	0,377	v_{12}	1
v_6	0,460		



Figuur 5.8: Bepaling waardevector voor $N=12$, $L=2$

Dit leidt tot de volgende optimale waarden:

i	Optimale keuzes	i	Optimale keuzes
1	1	7	1, 2
2	2	8	2
3	1, 2	9	1, 2
4	2	10	2
5	1, 2	11	1
6	2		

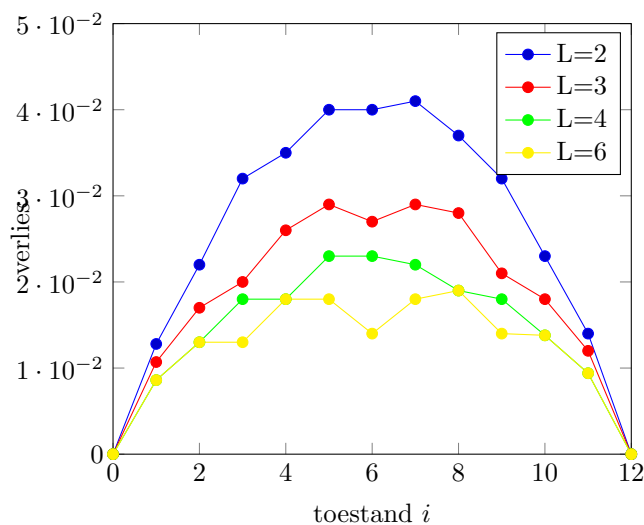
We zien hier hetzelfde patroon als bij $N = 16$: AGS is uniek optimaal voor even i , terwijl voor oneven i alle inzetten optimaal zijn. De symmetrie is ook hier dus aanwezig.

5.3.5 Vergelijking

Ter vergelijking hier een overzicht van de waardevectoren in de verschillende gevallen.

	$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$	$L = 6$
v_1	0,0705	0,0726	0,0747	0,0747
v_2	0,145	0,149	0,153	0,153
v_3	0,219	0,230	0,232	0,237
v_4	0,298	0,307	0,315	0,315
v_5	0,377	0,388	0,394	0,399
v_6	0,460	0,473	0,477	0,486
v_7	0,542	0,554	0,561	0,565
v_8	0,630	0,639	0,648	0,648
v_9	0,718	0,729	0,732	0,736
v_{10}	0,810	0,815	0,819	0,819
v_{11}	0,902	0,905	0,907	0,907

De verschillen tussen $L = 4$ en $L = 6$ lijken het kleinst, maar als we het verschil tussen $L = 2$ en $L = 3$ vergelijken met het verschil tussen $L = 3$ en $L = 4$ dan is het beeld minder duidelijk. Ter illustratie onderstaande figuur, waar we het verschil tussen v_i en $\frac{i}{12}$ kunnen zien, net als bij de vorige casus.



Figuur 5.9: Verwachte verlies bij verschillende huislimieten voor $N=16$

In onderstaande tabel zijn de relatieve toename (in procenten) van het verwachte verlies naar aanleiding van het instellen van verschillende huislimieten uiteengezet.

	$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$
v_1	49%	24%	0%
v_2	69%	31%	0%
v_3	146%	54%	38%
v_4	94%	44%	0%
v_5	122%	61%	28%
v_6	186%	93%	64%
v_7	128%	61%	22%
v_8	95%	47%	0%
v_9	129%	50%	29%
v_{10}	64%	29%	0%
v_{11}	45%	24%	0%

Aan de hand van de figuur en tabel zien we dat bij een speler met $N = 12$, het instellen van een huislimiet van $L = 2$ de verwachte winst voor het casino voor veel begintoestanden verdubbelt of zelfs bijna verdrievoudigt (in $i = 6$). Verder kan opgemerkt worden dat het verwachte verlies niet (volledig) symmetrisch is in $i = 8$.

Aan de figuur valt op dat voor $L = 2$ en in mindere mate $L = 3$ de grafiek lijkt op een parabool, in tegenstelling tot $L = 4$ en met name $L = 6$. Daar zie je dat in oneven toestanden iets anders gebeurt dan in even toestanden, omdat in oneven toestanden er relatief veel stappen nodig zijn om het einddoel te bereiken. Verder valt op dat voor veel begintoestanden het instellen van een huislimiet van $L = 4$ geen enkel effect heeft op de winkans, omwille van het feit dat de waardevectoren in die begintoestanden identiek zijn voor $L = 4$ en $L = 6$.

Ten slotte het overzicht van de verschillende optimale waarden:

	$L = 2$	$L = 3$	$L = 4$	$L = 6$
v_1	1	1	1	1
v_2	2	1, 2	2	1, 2
v_3	1, 2	3	1, 3	3
v_4	2	1, 2, 3	4	1, 2, 4
v_5	1, 2	1, 2, 3	1, 3, 4	1, 5
v_6	2	3	2, 4	6
v_7	1, 2	1, 2, 3	1, 3, 4	1, 5
v_8	2	1, 2, 3	4	1, 2, 4
v_9	1, 2	3	1, 3	3
v_{10}	2	1, 2	2	1, 2
v_{11}	1	1	1	1

Ook bij $N = 12$ geldt dat de symmetrie voor elke huislimiet gehandhaafd wordt. We zien, in tegenstelling tot het geval $N = 16$, dat er in oneven toestanden optimale even inzetten zijn. De huislimieten zorgen voor een grote verscheidenheid aan mogelijke patronen. Bij $L = 3$ en $L = 6$ is voor $i = 2, 10$ de inzet 1 optimaal, voor $L = 2$ en $L = 4$ niet. Anderzijds is bij $L = 2$ en $L = 4$ voor $i = 3, 9$ juist de inzet 2 optimaal, en voor $L = 3$ en $L = 6$ niet. Toestanden 4 en 8 lijken een belangrijke rol te spelen, alhoewel dit bij $L = 3$ juist weer niet het geval is. Dat heeft vermoedelijk te maken met het feit dat het 'voordeel' van toestanden 4 en 8 wegvalt als er geen 4 ingezet kan worden.

6 Discussie

Een onontkomelijke conclusie is dat de resultaten voor $N = 12$ en $N = 16$ suggereren dat optimale strategieën (voor even N) symmetrisch zijn in $\frac{N}{2}$. Een bewijs hiervan ontbreekt nog, dit zou bij uitstek interessant kunnen zijn voor vervolgonderzoek. We zagen met name bij $N = 16$ dat n -de orde GS veel kan verklaren. Bij $N = 12$ lag dit echter gecompliceerder. Ten eerste zagen we dat in het geval van een huislimiet n -de orde GS niet altijd optimaal is: bij $N = 12, L = 4$ zagen we dat 2 geen optimale inzet was in $i = 4$. Dit betekent dat tweede orde GS in die omstandigheid dus niet altijd optimaal is. Een tweede opmerkelijk punt was het feit dat de toestanden $i = 4, 8$ een belangrijke rol lijken te spelen bij $L = 12$. Dit suggereert dat er naast de mogelijkheid om, zoals bij n -de orde GS, het speelveld in tweeën te splitsen, meer mogelijkheden in het verlengde hiervan bestaan. Wellicht zou het mogelijk zijn om aan te tonen dat het speelveld in 3, 5 of welk ander aantal stukken dan ook te splitsen een soortgelijk resultaat oplevert, mits dat aantal een deler van het einddoel is.

Alhoewel je misschien zou verwachten dat het aantal spellen dat je, gegeven een bepaalde keuze, ten minste nog moet spelen om je einddoel te bereiken belangrijk is, zien we dit niet altijd terug. Bij $N = 12, L = 6$ zagen we immers dat voor $i = 4$ ook de inzet 1 optimaal was. Dit zorgt ervoor dat er sowieso nog 2 spellen daarna nodig zijn, terwijl voor de andere optimale inzetten (2 en 4) er bij winst nog maar 1 spel nodig zou kunnen zijn. Desalniettemin zou dat concept nog wel een rol kunnen spelen bij optimale strategieën, al is het de vraag welke precies.

We zagen verder dat een kleine huislimiet vaak een veel groter effect heeft dan een grote huislimiet, die voor een aantal specifieke gevallen zelfs geen effect had. Het verschil tussen de kans om het doel N te halen onder verschillende huislimieten is het grootst rond $\frac{N}{2}$, waar immers veel inzetten mogelijk zijn die geblokkeerd kunnen worden door een (kleine) huislimiet. In lage en hoge toestanden is de invloed van een huislimiet er vaak alleen als er vaak gewonnen respectievelijk verloren wordt, zodat een toestand in het midden bereikt wordt waar de huislimiet daadwerkelijk invloed heeft.

Het effect van de huislimiet moet echter niet overschat worden. In het meest extreme geval ($N = 16, L = 2, i = 8$) was de kans om N te halen nog steeds slechts 0,04 lager dan zonder huislimiet. Voor een casino is het echter erg relevant: de verwachte winst zou in diezelfde situatie wel vier keer zo groot zijn. Bij $N = 12$ waren de effecten iets kleiner, maar vrij vergelijkbaar met $N = 16$. Ook hier zagen we wel terug dat met name een huislimiet $L = 2$ een groot effect had, met als uiterste geval een verdrievoudiging van het verwachte verlies in $i = 8$.

Ten slotte kunnen we opmerken dat in deze scriptie geen aandacht is besteed aan de hoeveelheid spellen die gespeeld wordt. Als dit relevant is voor de speler, bijvoorbeeld omwille van speelplezier, zal een nieuwe dynamiek ontstaan waarbij hogere orde Gedurfd Spel in het bijzonder een interessante strategie zou kunnen zijn, vanwege de gemiddeld genomen langere spelduur.

7 Referenties

Referenties

- [1] K. Siegrist. *Random*, <http://www.math.uah.edu/stat/>, 2017.
- [2] D.C. Heath, W.E. Pruitt en W.D. Sudderth. *Subfair red-and-black with a limit*. American Mathematical Society, 35(2):555-560, 1972.
- [3] I. Kallenberg & F. Spijksma. *Besliskunde A, Najaar 2014*. Universiteit Leiden, <http://www.math.leidenuniv.nl/~spijksma/colleges/besliskunde/BKA-deel1.pdf>, 179-226, 2014.
- [4] K. Siegrist. *How to gamble if you must*. Convergence, 2008.
- [5] L. Shepp. *Bold Play and the optimal policy for Vardi Casino's*. Random Walk, Sequential Analysis and Related Topics: A Festschrift in Honor of Yuan-Shih Chow, 150-156, 2006.
- [6] J. E. Wilkins. *The bold strategy in presence of house limit*. American Mathematical Society, 32(2):567-570, 1972.