M.M. Slotegraaf

De kwaliteitsvectoren van ABC-drietallen

Bachelorscriptie

6 juli 2018

Scriptiebegeleider: Dr. B. de Smit

Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Inhoudsopgave

1 Het abc-vermoeden

Het abc-vermoeden is door David Masser en Joseph Oesterlé bedacht in 1985. Hoewel het officieel nog niet is bewezen, claimt de Japanse wiskundige Shinichi Mochizuki een bewijs te hebben gevonden van dit vermoeden ([3]). Voordat we het vermoeden zullen formuleren zullen we eerst een aantal definities introduceren.

Definitie 1.1 (Radicaal)**.** Het radicaal $\text{rad}(n)$ van een geheel getal $n \neq 0$ is gedefinieerd als het product van de priemdelers van n;

$$\text{rad}(n) = \prod_{p|n,\ p \text{ priem}} p.$$

Dus bijvoorbeeld $\text{rad}(50) = \text{rad}(2 \cdot 5^2) = 10$ en $\text{rad}(93) = \text{rad}(3 \cdot 31) = 93$.

Definitie 1.2 (abc-drietal)**.** Een abc-drietal is een drietal $a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat:

i. $a + b = c$;

ii. $\text{ggd}(a, b, c) = 1$;

iii. $\text{rad}(abc) < c$.

Definitie 1.3 (Kwaliteit)**.** De kwaliteit K van een abc-drietal wordt gegeven door

$$K = \frac{\log c}{\log \text{rad}(abc)}.$$

Merk op dat de kwaliteit van een abc-drietal altijd groter is dan 1. Een voorbeeld van een abc-drietal is $a = 1$, $b = 8$ en $c = 9$, waarbij $\text{rad}(abc) = 6$ en $K = \frac{\log 9}{\log 6} = 1{,}2263$. Een ander voorbeeld is $a = 32$, $b = 49$ en $c = 81$, waarbij $\text{rad}(abc) = 42$ en $K = \frac{\log 81}{\log 42} = 1{,}1757$.

Stelling 1.4. *Er zijn oneindig veel abc-drietallen.*

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Beschouw het drietal $a = 1$, $b = 9^n - 1$ en $c = 9^n$. Het is duidelijk dat $a + b = c$ en $\text{ggd}(a, b, c) = 1$. Er geldt dat $\text{rad}(a) = 1$, $\text{rad}(c) = 3$ en $\text{rad}(b) \leq \frac{b}{4}$, aangezien b het getal $8 = 2^3$ als deler heeft. Dus

$$\text{rad}(abc) = \text{rad}(a)\text{rad}(b)\text{rad}(c) \leq \frac{3b}{4} < c.$$

Dus $(1, 9^n - 1, 9^n)$ is een abc-drietal voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. □

Vermoeden 1.5 (abc-vermoeden)**.** *Voor alle $\alpha > 1$ bestaan er slechts eindig veel abc-drietallen met $K \geq \alpha$.*

2 De kwaliteitsvector van een drietal

We definiëren

$$\mathcal{S} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{array}{c} xyz \neq 0 \\ x+y+z=0 \\ \text{ggd}(x,y,z)=1 \end{array} \right\}.$$

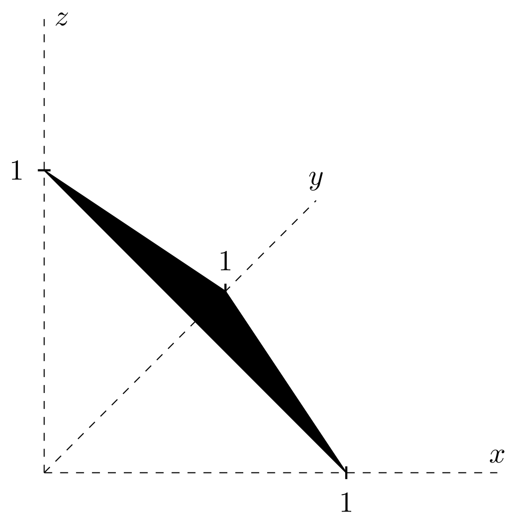
In deze scriptie gaan we kijken naar de punten $p = (x,y,z) \in \mathcal{S}$. We definiëren

$$Q_1(p) = \frac{\log \text{rad}(x)}{\log M}, \quad Q_2(p) = \frac{\log \text{rad}(y)}{\log M} \quad \text{en} \quad Q_3 = \frac{\log \text{rad}(z)}{\log M},$$

waarbij $M = \max\{|x|,|y|,|z|\}$. We noemen $Q(p) = (Q_1(p), Q_2(p), Q_3(p))$ de kwaliteitsvector van het punt p. Hiervoor definiëren we $K(p) := \frac{1}{Q_1(p)+Q_2(p)+Q_2(p)}$. Merk op dat voor $p = (a,b,-c)$ dat $K(p)$ de kwaliteit van het drietal (a,b,c) van definitie 1.3 is. We definiëren dan nu

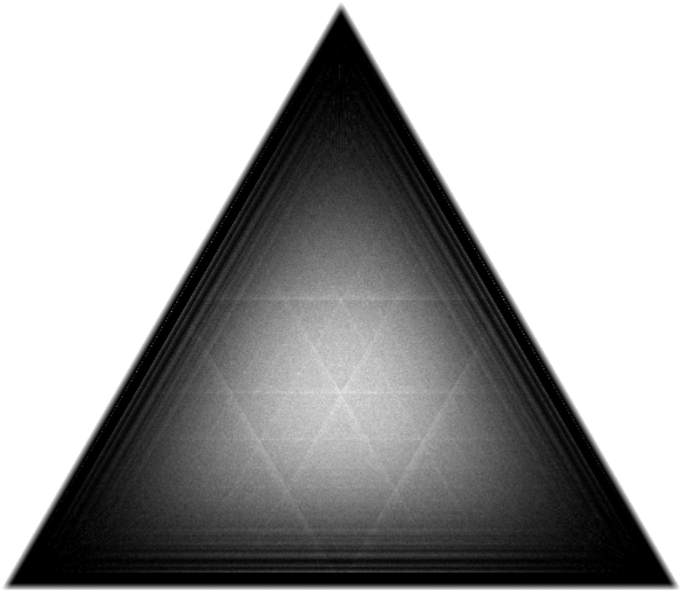
$$\Delta = \left\{ (q_1,q_2,q_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} 0 \leq q_1,q_2,q_3 \leq 1 \\ q_1+q_2+q_3 = 1 \end{array} \right\}$$

Deze Δ is de driehoek die we zien in figuur 1. Er geldt dat het punt p een abc-drietal is als $K(p) > 1$. De kwaliteitsvectoren van deze punten liggen onder de driehoek in figuur 1. In de hoofdstelling, stelling 4.1 van deze scriptie, zullen we laten zien dat als we een punt net boven deze driehoek kiezen, dan is er een oneindige rij in $\mathbb{Z}^3$, waarvoor geldt dat de kwaliteitsvector binnen een bepaald gebied blijft en de afstand tot het gebied onder Δ naar nul gaat.



Figuur 1: De driehoek Δ

We nemen voor p een abc-drietal en trekken een lijn door de kwaliteitsvector van het punt p en de oorsprong. Vervolgens zetten we een wit punt op het snijpunt van deze lijn met de driehoek van figuur 1. Met alle abc-drietallen waarbij $M < 10^{18}$ krijgen we dan de volgende afbeelding.



Figuur 2: De projectie van de kwaliteitsvectoren van alle abc-drietallen waarbij $M < 10^{18}$ op de driehoek Δ [2].

Het doel van deze scriptie is om te laten zien dat elk punt in Δ te benaderen is met de kwaliteitsvectoren van drietallen in $\mathcal{S}$. Het bewijs en de formulering van de hoofdstelling zijn te vinden in hoofdstuk 4.

Naar aanleiding van de hoofdstelling kunnen we het onderstaande gevolg afleiden. We zullen dit bewijzen in hoofdstuk 5.

Stelling 5.1. *Als het abc-vermoeden geldt, dan bestaat er voor elke* $q = (q_1, q_2, q_3) \in \Delta$ *een rij* $p_1, p_2, \dots \in \mathcal{S}$ *zodanig dat* $\lim_{i\to\infty} Q(p_i) = q$.

3 Roosters

We gaan de hoofdstelling van deze scriptie bewijzen met behulp van roosters. (Zie [4] Hoofdstuk 6 en 7.)

Definitie 3.1 (Rooster)**.** Zij $e_1, \ldots, e_m$ een lineair onafhankelijke verzameling van vectoren in een m-dimensionale Euclidische vectorruimte E. De additieve ondergroep van $(E, +)$ voortgebracht door $e_1, \ldots, e_m$ heet een rooster van dimensie m, voorgebracht door $e_1, \ldots, e_m$.

Definitie 3.2 (Fundamentaalgebied)**.** Zij L een rooster voortgebracht door $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Het fundamentaalgebied F is de verzameling van alle elementen $\sum a_i e_i$ ($a_i \in \mathbb{R}$) waarvoor geldt

$$0 \leq a_i < 1.$$

Definitie 3.3 (Determinant)**.** Laat L een rooster zijn met basis $e_1, \ldots, e_n$, dan is

$$d(L) = \sqrt{|\det(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}|}$$

de determinant van het rooster.

Merk op dat er geldt dat $\mathrm{vol}(F) = d(L)$.

Stelling 3.4 (Minkowski)**.** *Elk rooster L met rang 2 bevat een niet-nul element x waarvoor geldt $\langle x, x \rangle \leq \sqrt{\frac{4}{3}} d(L)$.*

Zie pagina 11 en 13 van [1] voor het bewijs van deze stelling.

Lemma 3.5. *Zij $a, b, c > 1$ paarsgewijs copriem en beschouw het rooster*

$$L_{abc} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0, a|x, b|y, c|z\}.$$

Dan is er een $(x, y, z) \in L_{abc} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ zodanig dat $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2abc$.

Bewijs. We bekijken het rooster

$$L_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0\},$$

met het standaard inproduct van $\mathbb{R}^3$. Voor dit bewijs willen we weten wat de determinant van het rooster L_0 is. Er geldt dat $b_1 = (0, 1, -1)$ en $b_2 = (1, 0, -1)$ twee onafhankelijke voortbrengende vectoren zijn van L_0. De determinant van L_0 is dan

$$d(L_0)^2 = \det(\langle b_i, b_j \rangle)_{i,j=1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Dus $d(L_0) = \sqrt{3}$. Zij L een deelrooster van $L_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0\}$. Dan geldt er dat $d(L_{abc}) = [L_0 : L_{abc}] d(L_0) = [L_0 : L_{abc}]\sqrt{3}$.

Bekijk de afbeelding $\psi : L_0 \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ gegeven door $(x, y, z) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Dan geldt er dat $L_{abc} = \ker \psi$ en $[L_0 : L_{abc}] = \#\psi(L_0)$. Aangezien $(1, -1, 0) \in L_0$, geldt er dat $\psi(L_0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$. Hieruit volgt dat $a|\#\psi(L_0)$. Ook geldt er dat $\psi(L_0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ en $\psi(L_0) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, dus dat $b, c|\#\psi(L_0)$. Aangezien a, b, c paarsgewijs copriem zijn, geldt er dat $abc|\#\psi(L_0)$. Hieruit volgt dat de afbeelding ψ surjectief is en dus dat $d(L_{abc}) = abc\sqrt{3}$.

Uit de stelling van Minkowski met de verbeterde constante uit [1] volgt dan nu dat er een $(x, y, z) \in L_{abc} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ is, zodanig dat

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \sqrt{\frac{4}{3}} d(L_{abc}) = 2abc.$$

$\square$

4 Hoofdstelling

We definiëren

$$\mathcal{S} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{array}{l} xyz \neq 0 \\ x+y+z=0 \\ \mathrm{ggd}(x,y,z)=1 \end{array} \right\}.$$

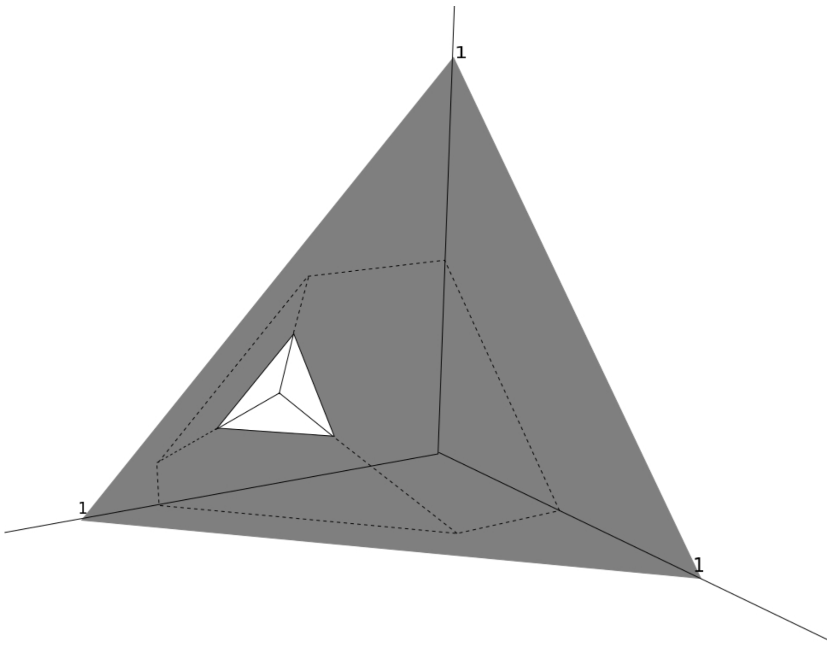
Gegeven $p = (x,y,z) \in \mathcal{S}$, dan definiëren we

$$Q(p) = (Q_1(p), Q_2(p), Q_3(p)) = \left(\frac{\log \mathrm{rad}(x)}{\log M}, \frac{\log \mathrm{rad}(y)}{\log M}, \frac{\log \mathrm{rad}(z)}{\log M} \right)$$

waarbij $M = \max\{|x|,|y|,|z|\}$. We definiëren dan nu voor $0 < q_1, q_2, q_3 < 1$:

$$\mathrm{paraplu}(q_1,q_2,q_3) = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3_{>0} : \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & < & q_1 + q_2 \\ x_1 + x_3 & < & q_1 + q_3 \\ x_2 + x_3 & < & q_2 + q_3 \end{array} \right\}.$$

Als $q_1 + q_2 + q_3 > 1$ dan steekt er een punt boven Δ uit. Hieronder kunnen we zien hoe paraplu(q_1,q_2,q_3) eruit ziet voor een drietal $0 < q_1, q_2, q_3 < 1$.



Figuur 3: We zien hier paraplu(0,2; 0,3; 0,6).

Dan kunnen we nu de hoofdstelling formuleren.

Stelling 4.1 (Hoofdstelling)**.** *Neem $0 < q_1, q_2, q_3 < 1$ met $q_1 + q_2 + q_3 > 1$. Dan is er een oneindige rij $p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{S}$ met $i = 0, 1, 2, \ldots$ met*

(i) $\forall i : Q(p_i) \in \text{paraplu}(q_1, q_2, q_3)$*;*

(ii) $\limsup_{i\to\infty}(Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i)) \leq 1$.

Bewijs. Aangezien $q_3 > 0$ kunnen we q_1 en q_2 verkleinen zodanig dat $q_1 + q_2 < 1$ zonder de eigenschap $q_1 + q_2 + q_3 > 1$ te verliezen. Met deze verandering wordt de eigenschap (i) alleen maar sterker. Hieruit volgt dat we mogen aannemen dat $q_1 + q_2 < 1$. Met een analoog argument als hierboven mogen we ook aannemen dat $q_1 + q_3 < 1$ en $q_2 + q_3 < 1$.

Zij $N_0 = \sup\{6^{\frac{1}{q_3}}, 10^{\frac{1}{q_2}}, 15^{\frac{1}{q_1}}, (2 \cdot (225)^2)^{\frac{1}{q_1+q_2+q_3-1}}\}$ en laat $N \in \mathbb{R}$ zodat $N \geq N_0$. Dan kiezen we

$$a = 2^{\left\lfloor \frac{(1-q_1)\log N}{\log 2} \right\rfloor}, \quad b = 3^{\left\lfloor \frac{(1-q_2)\log N}{\log 3} \right\rfloor} \quad \text{en} \quad c = 5^{\left\lfloor \frac{(1-q_3)\log N}{\log 5} \right\rfloor},$$

waarbij we de exponenten naar beneden afronden. Merk op dat $\frac{1}{2}N^{1-q_1} \leq a \leq N^{1-q_1}$, $\frac{1}{3}N^{1-q_2} \leq b \leq N^{1-q_2}$ en $\frac{1}{5}N^{1-q_3} \leq c \leq N^{1-q_3}$.

Zij $L_{abc} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0, a|x, b|y, c|z\}$ het rooster met a, b, c zoals hierboven gekozen. Vanwege lemma 3.5 weten we dat er een $(x, y, z) \in L_{abc} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ is waarvoor geldt dat $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2abc$.

Definieer $M = \max\{|x|, |y|, |z|\}$. We mogen aannemen dat voor $p|\text{ggd}(x, y, z)$ met p priem, dat $p \in \{2, 3, 5\}$. Immers, als $p \geq 7$, dan kunnen we (x, y, z) delen door p en dan geldt er dat $(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}) \in L_{abc}$. Dan definiëren we nu $g = \text{ggd}(x, y, z) = g_1 g_2 g_3$, waarbij $g_1 = 2^r$, $g_2 = 3^s$ en $g_3 = 5^t$ met $r, s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Stel dat $z = 0$. Aangezien er geldt dat $x + y + z = 0$, geldt er dat $ab|x$ en $ab|y$. Hieruit volgt dat $x^2 \geq a^2b^2$ en $y^2 \geq a^2b^2$. Vanwege lemma 3.5 geldt er dan dat $2a^2b^2 \leq 2abc$. Dus dat $ab \leq c$. Ook geldt er dat

$$\frac{1}{6}N < \frac{1}{6}N^{2-(q_1+q_2)} \leq ab \leq c \leq N^{1-q_3} = \frac{N}{N^{q_3}}.$$

Om te laten gelden dat $\frac{1}{6}N < \frac{N}{N^{q_3}}$, moet er gelden dat $N^{q_3} < 6$ en dus dat $N < 6^{\frac{1}{q_3}}$. Aangezien er geldt dat $N \geq 6^{\frac{1}{q_3}}$, geldt er dus dat dit een tegenspraak is. Hieruit volgt dat $z \neq 0$. Met een analoog argument kunnen we laten zien dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

We schrijven $x = gx'$, $y = gy'$, $z = gz'$ en definiëren $p = p(N) = (x', y', z')$. Er geldt dus dat $(x', y', z') \in \mathcal{S}$. We gaan nu eerst laten zien dat $Q(p) \in \text{paraplu}(q_1, q_2, q_3)$. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
\operatorname{rad}(x'y') &= \operatorname{rad}\left(\frac{xy}{g^2}\right) && (1)\\
&\leq \operatorname{rad}\left(\frac{x}{g}\right)\operatorname{rad}\left(\frac{y}{g}\right) && (2)\\
&\leq 2 \operatorname{rad}\left(\frac{x}{ag_2g_3}\right)\cdot 3 \operatorname{rad}\left(\frac{y}{bg_1}\right) && (3)\\
&\leq 6\frac{x}{ag_2g_3}\frac{y}{bg_1} && (4)\\
&= 6\frac{xy}{abg} && (5)\\
&\leq 6\frac{M^2}{abg}. && (6)
\end{aligned}$$

Aangezien er geldt dat $N \geq (2 \cdot 225^2)^{1-q_1-q_2-q_3}$, geldt er dat $2N^{3-q_1-q_2-q_3} \leq \frac{1}{225^2}N^2$. Vanwege lemma 3.5 geldt er dat $M^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2abc$, door de afschattingen van a, b en c geldt er vervolgens dat $2abc \leq 2N^{3-q_1-q_2-q_3}$. Dus $M^2 \leq 2N^{3-q_1-q_2-q_3} \leq \frac{1}{225^2}N^2$. Hieruit volgt dat $N \geq 225M$. Hiermee kunnen we de volgende ongelijkheden afleiden.

$$\begin{aligned}
\log a &\geq (1-q_1)\log N - \log 2 \geq (1-q_1)(\log M + \log 225) - \log 2\\
\log b &\geq (1-q_2)\log N - \log 3 \geq (1-q_2)(\log M + \log 225) - \log 3
\end{aligned} \qquad (7)$$

We willen laten zien dat $Q_1(p) + Q_2(p) < q_1 + q_2$. Aangezien er geldt dat $xyz \neq 0$, geldt er dat $g < M$. Er geldt

$$\begin{aligned}
Q_1(p) + Q_2(p) &= \frac{\log\operatorname{rad}(x') + \log\operatorname{rad}(y')}{\log M - \log g}\\
&= \frac{\log\operatorname{rad}(x'y')}{\log M - \log g}\\
&\overset{(6)}{\leq} \frac{\log 6 + 2\log M - \log a - \log b - \log g}{\log M - \log g}\\
&\overset{(7)}{\leq} \frac{C_{12} + 2\log M - (1-q_1)\log M - (1-q_2)\log M - \log g}{\log M - \log g}\\
&= \frac{C_{12} + q_1\log M + q_2\log M - \log g}{\log M - \log g}\\
&= q_1 + q_2 + \frac{C_{12} + (q_1 + q_2 - 1)\log g}{\log M - \log g}
\end{aligned}$$

waarbij $C_{12} = 2\log 6 - (2 - q_1 - q_2)\log 225$ een constante is. Omdat $q_1 + q_2 < 1$ geldt er dat $C_{12} < 0$.

Verder geldt er dat $(q_1 + q_2 - 1)\log g \leq 0$, omdat $q_1 + q_2 < 1$. Hierdoor weten we dat $\frac{C_{12}+(q_1+q_2-1)\log g}{\log M - \log g} < 0$. Dus er geldt dat $Q_1(p) + Q_2(p) < q_1 + q_2$. Dit gaat analoog voor $Q_1(p) + Q_3(p) \leq q_1 + q_3$ en $Q_2(p) + Q_3(p) \leq q_2 + q_3$. Dus $Q(p) \in \text{paraplu}(q_1, q_2, q_3)$.

De rij die we bekijken is $p(N_0), p(N_0+1), \ldots$. Voor alle $N \geq N_0$ geldt dat $Q(p(N)) \in \text{paraplu}(q_1, q_2, q_3)$. We hebben dus nu (i) bewezen.

Voor $\{|x|, |y|, |z|\} = \{M, \delta M, (1-\delta)M\}$ met $0 < \delta$ geldt dat

$$\begin{aligned} 2abc &\geq x^2 + y^2 + z^2 \\ &= M^2 + (\delta M)^2 + ((1-\delta)M)^2 \\ &= M^2(1 + \delta^2 + (1-\delta)^2) \\ &= 2M^2(\delta^2 - \delta + 1) \end{aligned}$$

Dan geldt nu voor het radicaal

$$\begin{aligned} \text{rad}(xyz) &\leq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \text{rad}\left(\frac{xyz}{abc}\right) \\ &\leq 30\frac{xyz}{abc} \\ &\leq \frac{30M^3\delta(1-\delta)}{M^2(\delta^2 - \delta + 1)} \\ &= 30M\frac{\delta(1-\delta)}{\delta^2 - \delta + 1} \\ &\leq 10M \end{aligned}$$

Het maximum van $\frac{\delta(1-\delta)}{\delta^2-\delta+1}$ met $0 < \delta < 1$ is namelijk gelijk aan $\frac{1}{3}$. Hieruit volgt ook dat

$$\begin{aligned} \text{rad}(x'y'z') &= \text{rad}\left(\frac{x}{g}\right)\text{rad}\left(\frac{y}{g}\right)\text{rad}\left(\frac{z}{g}\right) \\ &\leq 2\ \text{rad}\left(\frac{x}{ag_2g_3}\right) \cdot 3\ \text{rad}\left(\frac{y}{bg_1g_3}\right) \cdot 5\ \text{rad}\left(\frac{z}{cg_1g_2}\right) \\ &\leq 30\frac{x}{ag_2g_3}\frac{y}{bg_1g_3}\frac{z}{cg_1g_2} \\ &= 30\frac{xyz}{abcg^2} \\ &\leq 10\frac{M}{g^2} \\ &= 10\frac{M'}{g} \end{aligned}$$

waarbij $M' = \max\{|x'|, |y'|, |z'|\} = \frac{M}{g}$. Aangezien er geldt dat $\mathrm{rad}(x'y'z') > 1$, geldt er dat $M' \geq \frac{g}{10}$. Hieruit kunnen we afleiden dat

$$\begin{aligned} Q_1(p) + Q_2(p) + Q_3(p) &= \frac{\log \mathrm{rad}(x'y'z')}{\log M'} \\ &\leq \frac{\log 10 + \log M' - \log g}{\log M'} \\ &= \frac{\log 10 - \log g}{\log M'} + 1 \end{aligned}$$

Om (ii) te laten zien is het voldoende om te laten zien dat M' naar oneindig gaat als N naar oneindig gaat. We weten al dat er geldt dat $M' \geq \frac{g}{10}$. Verder weten we dat er geldt dat $M \geq a \geq \frac{1}{2}N^{1-q_1}$, oftewel $M' \geq \frac{\frac{1}{2}N^{1-q_1}}{g}$. Hieruit volgt dat

$$M' \geq \sqrt{\frac{g}{10} \cdot \frac{\frac{1}{2}N^{1-q_1}}{g}} = \sqrt{\frac{N^{1-q_1}}{20}}.$$

Dus er geldt dat M' naar oneindig gaat als N naar oneindig gaat. Merk op dat als we konden bewijzen dat $\mathrm{rad}(x'y'z') \leq M'$, dan bestaat de rij $p_1, p_2, \ldots$ uit abc-drietallen. $\square$

5 Gevolg

In het vorige hoofdstuk hebben we de hoofdstelling van deze scriptie bewezen zonder dat we het abc-vermoeden hebben aangenomen.

Stelling 5.1. *Als het abc-vermoeden geldt, dan bestaat er voor elke* $q = (q_1, q_2, q_3) \in \Delta$ *een rij* $p_1, p_2, \dots \in \mathcal{S}$ *zodanig dat* $\lim_{i\to\infty} Q(p_i) = q$.

Bewijs. Zij $0 \leq q_1, q_2, q_3 \leq 1$ met $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Uit de hoofdstelling volgt dat voor elke $i \geq 1$ bestaat er een $p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{S}$ met $Q(p_i) \in \text{paraplu}(q_1(1+\frac{1}{i}), q_2(1+\frac{1}{i}), q_3(1+\frac{1}{i}))$. Dus er geldt dat $\limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_2(p_i)] \leq q_1 + q_2$, $\limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_3(p_i)] \leq q_1 + q_3$ en $\limsup_{i\to\infty} [Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] \leq q_2 + q_3$. We schrijven $q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{2}(q_1+q_2) + \frac{1}{2}(q_1+q_3) + \frac{1}{2}(q_2+q_3)$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_2(p_i)] &\leq \frac{1}{2}\limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_2(p_i)] + \frac{1}{2}\limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_3(p_i)] + \\
&\quad \frac{1}{2}\limsup_{i\to\infty} [Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] \\
&\leq \frac{1}{2}(q_1+q_2) + \frac{1}{2}(q_1+q_3) + \frac{1}{2}(q_2+q_3) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vanwege het abc-vermoeden geldt er dat $\liminf_{i\to\infty}[Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] \geq 1$. Dus dan geldt er dat $\lim_{i\to\infty}[Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] = 1$.
We schrijven dan nu $q_1 = (q_1+q_2) + (q_1+q_3) - (q_1+q_2+q_3)$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} Q_1(p_i) &= \limsup_{i\to\infty} [(Q_1(p_i) + Q_2(p_i)) + (Q_1(p_i) + Q_3(p_i)) - (Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i))] \\
&\leq \limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_2(p_i)] + \limsup_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_3(p_i)] - \\
&\quad \liminf_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] \\
&\leq (q_1+q_2) + (q_1+q_3) - 1 \\
&= (q_1+q_2) + (q_1+q_3) - (q_1+q_2+q_3) \\
&= q_1
\end{aligned}$$

We kunnen q_1 ook schrijven als $q_1 = (q_1+q_2+q_3) - (q_2+q_3)$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\liminf_{i\to\infty} Q_1(p_i) &= \liminf_{i\to\infty} [(Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i)) - (Q_2(p_i) + Q_3(p_i))] \\
&\geq \liminf_{i\to\infty} [Q_1(p_i) + Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] - \limsup_{i\to\infty} [Q_2(p_i) + Q_3(p_i)] \\
&\geq 1 - (q_2+q_3) \\
&= (q_1+q_2+q_3) - (q_2+q_3) \\
&= q_1
\end{aligned}$$

Dus dan weten we nu dat er geldt dat

$$\lim_{i \to \infty} Q_1(p_i) = q_1.$$

Met een analoog argument geldt er ook dat $\lim_{i \to \infty} Q_2(p_i) = q_2$ en $\lim_{i \to \infty} Q_3(p_i) = q_3$.

□

Referenties

[1] Lenstra Jr, H. W. (2008). Lattices. *Algorithmic Number Theory*, 44:127–181. Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press.

[2] Palenstijn, W. (2014). *Radicals in Arithmetic*. PhD thesis, Leiden University.

[3] Reijngoud, H. (2010). Kwaliteit van abc-drietallen. Bachelor thesis, Leiden University.

[4] Stewart, I. and Tall, D. (1979). *Algebraic Number Theory*. Chapman and Hall.