

C. van Zanten
Banen in een centraal krachtveld

Bachelorscriptie
25 juli 2017

Scriptiebegeleider: dr. R.J. Kooman



Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Inhoudsopgave

1	Van ruimte naar vlak	1
1.1	Centrale kracht	1
1.1.1	Tweede Wet van Newton	1
1.1.2	Impulsmoment	1
1.2	Poolcoördinaten in een vlak	2
1.2.1	Snelheid en versnelling	2
1.2.2	Rotatiesnelheid	3
1.2.3	Effectieve kracht	3
1.2.4	Oppervlakte snelheid	4
1.3	De energievergelijking	4
2	Baan eigenschappen	6
2.1	De baanvergelijkingen	6
2.2	Stabiliteit van cirkelbanen	7
2.2.1	Twee-dimensionaal stelsel	8
2.2.2	Evenwichtspunt	8
2.2.3	Jacobiaan	9
2.2.4	Stabiliteit van het minimum	9
2.2.5	Stabiliteit van cirkels	11
3	Analytische oplossing van banen	12
3.1	De algemene baanvergelijking voor $v = r^q$	12
3.2	De baanvergelijking met vierdegraads polynoom $P(v)$	12
3.2.1	De mogelijke machten in $P(v)$	13
3.2.2	De mogelijke waarden van n	14
3.2.3	De geldige machten in $P(v)$	14
3.2.4	De geldige waarden van n	15
3.3	De baanvergelijking met tweedegraads polynoom $P(v)$	15
3.4	Conclusie analytisch oplossen van de baanvergelijking	15
3.4.1	Trigonometrische of hyperbolische functies	16
3.4.2	Elliptische functies	16
3.5	Numerieke benadering	17
4	Keplerprobleem en de wet van Coulomb	19
4.1	Tweelichamenprobleem gereduceerd tot eenlichaam probleem.	19
4.2	Baanvergelijking	21
4.3	Kegelsneden	22
4.3.1	Cirkel	22
4.3.2	Ellips	23
4.3.3	Parabool	24
4.3.4	Linkertak van de hyperbool	24
4.3.5	Rechtersak van de hyperbool	25
4.3.6	Het geval $k = 0$	26
4.4	Energie in kaart	27
4.5	Banen in kaart	27

5	De wet van Hooke	29
5.1	Baanvergelijking	29
5.2	Kegelsneden	30
5.2.1	Het geval $k > 0$	31
5.2.2	Het geval $k < 0$	32
5.2.3	Het geval $k = 0$	33
5.3	Energie in kaart	34
5.4	Banen in kaart	34
6	De centrale kracht voor $n = -3$	36
6.1	Baan- en energievergelijking	36
6.1.1	Het geval $L^2 > mk$	36
6.1.2	Het geval $L^2 < mk$	37
6.1.3	Het geval $L^2 = mk$	39
6.2	Energie in kaart	40
6.2.1	Het geval $L^2 > mk$	40
6.2.2	Het geval $L^2 < mk$	41
6.2.3	Het geval $L^2 = mk$	41
6.3	Banen en windingen in kaart	42
6.3.1	Het geval $L^2 > mk$	42
6.3.2	Het geval $L^2 < mk$	43
6.3.3	Het geval $L^2 = mk$	46
6.4	Tijd	47
6.4.1	Het geval $L^2 > mk$	48
6.4.2	Het geval $L^2 < mk$	49
6.4.3	Het geval $L^2 = mk$	49
6.5	Conclusie beschrijving banen	50
7	De centrale kracht voor $n = -5$	51
7.1	De begrensdheid van banen	51
7.1.1	Het geval $k > 0$	52
7.1.2	Het geval $k < 0$	53
7.2	De baanvergelijking	53
7.2.1	Het geval $k > 0$ waarbij $E < 0$	53
7.2.2	Het geval $k > 0$ waarbij $E = 0$	55
7.2.3	Het geval $k > 0$ waarbij $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$	55
7.2.4	Het geval $k > 0$ waarbij $E = \frac{L^4}{4m^2k}$	57
7.2.5	Het geval $k < 0$	57
7.3	Banen in kaart	58

Voorwoord

In dit onderzoek beschouwen we de banen van een puntmassa in een centraal krachtveld. Daartoe gaan we uit van een centrale kracht van de vorm $\vec{F}(\vec{r}) = -kr^n \vec{e}_r$, waarbij $k \in \mathbb{R}$ een constante is en n een willekeurig reëel getal.

Allereerst wordt behandeld dat de beweging in de ruimte genoteerd kan worden als de beweging in een vlak indien de kracht centraal staat.

Vervolgens wordt een algemene baanvergelijking bepaald voor willekeurige n om de banen te beschrijven. Daarbij wordt onderzocht welke banen op te lossen zijn met behulp van trigonometrische-, hyperbolische of elliptische functies. Zo niet, dan zal de vergelijking wellicht numeriek benaderd kunnen worden met behulp van de numerieke methode Runge-Kutta 4. Zo ook wordt onderzocht voor welke n er stabiele begrensde banen bestaan.

In de bespreking van de banen wordt onder andere de radiële positie en de radiële snelheid bestudeerd omdat die belangrijk zijn voor de vorming van de baan.

De banen, die beschreven worden door trigonometrische- of hyperbolische functies, worden onder andere besproken. Dit zijn de banen onder invloed van de centrale kracht waarbij $n = -2$, $n = 1$ of $n = -3$ geldt. De centrale kracht waarbij $n = -2$ is van toepassing op ons zonnestelsel en elektrische krachten tussen geladen deeltjes. De centrale kracht waarbij $n = 1$ is van toepassing op het uittrekken van veren.

Ten slotte worden de banen onder invloed van de centrale kracht voor $n = -5$ besproken. Onder invloed van deze kracht worden de banen beschreven door elliptische functies. De overige banen, die beschreven worden door elliptische functies, zijn onder invloed van de centrale krachten waarbij $n = -7, -4, 0, 3, 5, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ geldt.

1 Van ruimte naar vlak

In dit hoofdstuk wordt behandeld als een puntmassa in een centraal krachtveld beweegt, dan is de beweging in de ruimte te beschrijven als een beweging in een vlak. Ten slotte wordt de energievergelijking behandeld waardoor we de banen kunnen bespreken op basis van de kinetische energie en de potentiële energie.

1.1 Centrale kracht

Allereerst wordt aangetoond als een puntmassa met massa m in een centraal krachtveld beweegt, dan is de beweging in de ruimte te beschrijven als een beweging in een vlak. Daartoe willen we aantonen dat het impulsmoment constant is.

Definitie 1.1 Een centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ is gedefinieerd als

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

waarbij $f(r) = |\vec{F}(\vec{r})|$ de grootte van de krachtvector is, die alleen afhangt van de afstand tot een vast punt, dat we het centrum noemen. Daarnaast is $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ gelijk aan de eenheidsvector in de radiële richting.

Vanaf nu wordt er aangenomen dat de kracht $\vec{F}(\vec{r})$ centraal is.

1.1.1 Tweede Wet van Newton

Vanwege de *Tweede wet van Newton* geldt dat

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}). \quad (1.2)$$

Substitueren van de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ geeft

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{e}_r, \quad (1.3)$$

waarbij we de notatie $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ hanteren.

1.1.2 Impulsmoment

We willen aantonen dat het impulsmoment constant is indien de kracht centraal staat. Daartoe introduceren we eerst het impulsmoment.

Definitie 1.2 Het impulsmoment \vec{L} is gedefinieerd als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}, \quad (1.4)$$

waarbij $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ de impuls is en de notatie $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ wordt gehanteerd.

Het impulsmoment \vec{L} is constant dan en slechts dan als de eerste afgeleide van het impulsmoment $\frac{d\vec{L}}{dt}$ gelijk is aan nul. De eerste afgeleide van het impulsmoment is gelijk aan

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}.$$

Vanwege (1.3) geldt dan

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times f(r)\vec{e}_r = 0 + \vec{r} \times \frac{f(r)}{|\vec{r}|}\vec{r} = 0.$$

Dus het impulsmoment \vec{L} is constant omdat $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. Merk op dat de positie \vec{r} en het impuls \vec{p} van het massadeeltje het vlak definiëren. Het impulsmoment \vec{L} staat loodrecht op dit vlak vanwege (1.4). Dus dan geldt dat het vlak onveranderd blijft omdat \vec{L} constant is, terwijl de positie \vec{r} en het impuls \vec{p} van het massadeeltje veranderen.

1.2 Poolcoördinaten in een vlak

De beweging in een vlak is handig om weer te geven in termen van poolcoördinaten. De vergelijkingen die we hebben afgeleid zetten we om in termen van poolcoördinaten. Zoals de snelheidsvector, versnellingsvector en het impulsmoment. Ten slotte wordt de effectieve kracht bepaald die we gaan gebruiken om de banen te construeren.

1.2.1 Snelheid en versnelling

Het is mogelijk om met behulp van de positievector de uitdrukkingen te bepalen, in termen van poolcoördinaten, voor de snelheidsvector $\dot{\vec{r}}$ en de versnellingsvector $\ddot{\vec{r}}$.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}.$$

Om de uitdrukkingen $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ en $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ te bepalen, merken we eerst op dat ze loodrecht op elkaar staan. Vervolgens willen we de verandering bepalen van de eenheidsvectoren in de radiële- en transversale richting indien θ groter wordt.

Voor kleine veranderingen in beide richtingen geldt dat

$$\Delta\vec{e}_r \approx \vec{e}_\theta\Delta\theta, \quad \Delta\vec{e}_\theta \approx -\vec{e}_r\Delta\theta.$$

Vervolgens delen door Δt en $\lim_{t \rightarrow 0}$ nemen geeft de uitdrukkingen

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\theta}{dt}.$$

Dus dan geldt voor de snelheidsvector $\dot{\vec{r}}$ en de versnellingsvector $\ddot{\vec{r}}$ dat

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad (1.5)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta. \quad (1.6)$$

1.2.2 Rotatiesnelheid

Substitueren van de versnelling (1.6) in de vergelijking (1.3) van de *Tweede wet van Newton* geeft

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = f(r)\vec{e}_r. \quad (1.7)$$

De volgende twee vergelijkingen moeten gelden om aan (1.7) te voldoen

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0, \quad (1.8)$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r). \quad (1.9)$$

Merk op dat de norm van het impulsmoment L gelijk is aan

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}| = |r\vec{e}_r \times m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)| = |r\vec{e}_r \times mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta| = mr^2\dot{\theta}. \quad (1.10)$$

Vanwege (1.8) geldt dat

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \implies \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Hieruit volgt dat $\frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0$, oftewel $r^2\dot{\theta}$ is constant. Dus het impulsmoment L is constant, zoals al is afgeleid in paragraaf 1.1.2.

Vanwege dat het impulsmoment L constant is volgt dat $\dot{\theta}$ gelijk is aan

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \quad (1.11)$$

1.2.3 Effectieve kracht

Vanwege (1.9) geldt dat

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = m\ddot{r} - \frac{mrL^2}{m^2r^4} = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}. \quad (1.12)$$

De bewegingsvergelijking van r (1.12) is als de vergelijking van een eendimensionale beweging, waarbij de kracht gelijk is aan

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{mr^3} \stackrel{def}{=} f_{eff}(r), \quad (1.13)$$

waarbij $f_{eff}(r)$ gedefinieerd is als de effectieve kracht. De term $\frac{L^2}{mr^3}$ is de centrifugale kracht.

Merk op dat voor cirkelbanen geldt dat $\dot{r} = 0$ en $\ddot{r} = 0$ omdat r constant is voor cirkelbanen. Dus voor cirkelbanen geldt $f(r) = -\frac{L^2}{mr^3}$ vanwege (1.13).

1.2.4 Oppervlakte snelheid

De beweging van planeten in ons zonnestelsel is een geval waarin een centrale kracht optreedt. De *Tweede wet van Kepler* volgt door gebruik te maken van de oppervlakte snelheid. Immers,

Definitie 1.3 De oppervlakte snelheid \dot{A} is gedefinieerd als

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}} dt| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\dot{\vec{r}} dt| = \frac{L}{2m} dt. \quad (1.14)$$

Met andere woorden, $\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ is constant vanwege het behoud van impulsmoment. Hieruit volgt de *Tweede wet van Kepler* omdat de oppervlakte snelheid \dot{A} constant is. Immers de oppervlaktes van de gebieden, die de planeet maakt in zijn baan om de zon, zijn even groot mits de beweging in zijn baan in dezelfde tijd zijn afgelegd.

1.3 De energievergelijking

De energievergelijking wordt nu behandeld waardoor we de banen kunnen bespreken op basis van de kinetische energie en de potentiële energie.

Definitie 1.4 De kinetische energie T is gedefinieerd als

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2. \quad (1.15)$$

Definitie 1.5 De potentiële energie $V(r)$ is gedefinieerd als

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(r). \quad (1.16)$$

Aangezien we uitgaan van een centrale kracht $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$, geldt dat de potentiële energie $V(r)$ gelijk is aan

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \implies V(r) = -\int f(r)dr + C,$$

waarbij dus $V(r)$ op een constante $C \in \mathbb{R}$ na bepaald is.

Een andere notatie voor de bewegingsvergelijking (1.13) is

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{mr^3} \implies m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right). \quad (1.17)$$

Merk op dat $m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right)$ en $\frac{d}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}$ gelden. Beide kanten in (1.17) vermenvuldigen met \dot{r} geeft

$$\begin{aligned} m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) &\implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \\ &\implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \text{constant} = E, \quad (1.18)$$

waarbij $E \in \mathbb{R}$ de totale energie is. Met andere woorden, er is sprake van energiebehoud.

Definitie 1.6 De effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$ is gedefinieerd als

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad (1.19)$$

waarbij de term $\frac{L^2}{2mr^2}$ bekend staat als de centrifugale potentiaal.

Substitueren van $V_{eff}(r)$ in (1.18) geeft de effectieve energievergelijking

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r), \quad (1.20)$$

waarbij de term $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ de effectieve kinetische energie is.

Ter controle bekijken we of $V_{eff}(r)$ voldoet aan (1.16). Hieruit volgt

$$\begin{aligned} -\frac{dV_{eff}(r)}{dr} &= -\frac{d}{dr} \left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) = -\frac{dV(r)}{dr} - \frac{d}{dr} \frac{L^2}{2mr^2} \\ &= f(r) + \frac{L^2}{mr^3} = f_{eff}(r). \end{aligned}$$

Dus $V_{eff}(r)$ voldoet aan (1.16). Merk op dat $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ geldt vanwege $\dot{r}^2 \geq 0$. Hieruit volgt dat $V_{eff}(r) \leq E$ vanwege (1.20).

2 Baan eigenschappen

In dit hoofdstuk worden eigenschappen van banen behandeld. Allereerst worden de baanvergelijkingen $\frac{d^2v}{d\theta^2}$, waarbij $v = r^{-1}$, en $\frac{dr}{d\theta}$ bepaald. Het bepalen van $\frac{dr}{d\theta}$ gaat met behulp van $\frac{dr}{dt}$. De differentiaalvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ staat later bekend als de algemene baanvergelijking. Ten slotte wordt bepaald voor welke centrale krachten de cirkelbanen stabiel of instabiel zijn. Daartoe wordt gebruikt gemaakt van de voorwaarden van stabiliteit van evenwichtspunten.

De eigenschappen van de banen worden beschouwd voor een centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ met bijbehorende $V(r)$, die gelijk zijn aan

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -kr^n\vec{e}_r, \quad V(r) = -\int f(r)dr = \frac{1}{n+1}kr^{n+1} + C, \quad (2.1)$$

waarbij $n \in \mathbb{R}$ en een integratieconstante $C \in \mathbb{R}$ die we nul kiezen. We laten het geval $n = -1$ buiten beschouwing omdat dan geldt $V(r) = k \ln|r| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2.1 De baanvergelijkingen

Allereerst wordt er een tweede orde differentiaalvergelijking behandeld, die beschreven wordt door vergelijking (1.9) en het impulsmoment L . Vervolgens worden de eerste orde differentiaalvergelijkingen $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{dr}{d\theta}$ behandeld, die beschreven worden door de energievergelijking (1.20) en het impulsmoment L .

Het toepassen van de substitutie $v = r^{-1}$ geeft de mogelijkheid om $\frac{d^2v}{d\theta^2}$ vast te stellen. Met andere woorden, een baanvergelijking van v als functie van θ .

Substitutie van $v = r^{-1}$ in \dot{r} en \ddot{r} geeft

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{v^2}\dot{v} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{Lv^2}{mu^2}\frac{dv}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{dv}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\frac{dv}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{dv}{d\theta} = -\frac{L^2}{m^2}v^2\frac{d^2v}{d\theta^2}, \end{aligned}$$

vanwege (1.11). Substitueren van r , \dot{r} en \ddot{r} in (1.9) geeft de tweede orde differentiaalvergelijking, die gelijk is aan

$$f(v^{-1}) = m\left(-\frac{L^2}{m^2}v^2\frac{d^2v}{d\theta^2} - \frac{1}{v}\frac{L^2}{m^2}v^4\right) \implies f(v^{-1}) = -\frac{L^2}{m}\left(v^2\frac{d^2v}{d\theta^2} + v^3\right).$$

Deze vergelijking is eenvoudiger te begrijpen als de tweede orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + v = -\frac{m}{L^2v^2}f(v^{-1}) \implies \frac{d^2v}{d\theta^2} + v = \frac{mk}{L^2v^{n+2}}, \quad (2.2)$$

waarbij $v(0) = v_0$ en $\frac{dv(0)}{d\theta} = w_0$ beginvoorwaarden zijn waarvoor $\theta = 0$ geldt.

Vervolgens wordt de baanvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ bepaald. Daartoe willen we eerst $\frac{dr}{dt}$ bepalen. Vanwege de energievergelijking (1.20) volgt $\frac{dr}{dt}$ direct, immers

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \implies \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}. \quad (2.3)$$

De baanvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ volgt direct uit $\frac{d\theta}{dt}$ en $\frac{dr}{dt}$, ofwel respectievelijk de vergelijkingen (1.11) en (2.3),

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}{\frac{L}{mr^2}} = \pm \frac{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}{L}. \quad (2.4)$$

De differentiaalvergelijking (2.4) wordt genoteerd zodanig dat het direct geïntegreerd kan worden.

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{L}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} r^4 - \frac{2mV(r)}{L^2} r^4 - r^2}} \quad (2.5)$$

Substitueren van $V(r) = \frac{k}{n+1} r^{n+1}$ in (2.5) geeft

$$d\theta = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} r^4 - \frac{2mk}{L^2(n+1)} r^{n+5} - r^2}}. \quad (2.6)$$

De differentiaalvergelijking (2.6) integreren geeft

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} r^4 - \frac{2mk}{L^2(n+1)} r^{n+5} - r^2}}. \quad (2.7)$$

De vergelijking (2.7) zal in Hoofdstuk 3 genoteerd worden met de substitutie $v = r^q$ met $q \in \mathbb{R}$. Daardoor zal het duidelijk worden voor welke centrale krachten het mogelijk is om hun bijbehorende banen te bepalen met behulp van trigonometrische -, hyperbolische - of elliptische functies.

2.2 Stabiliteit van cirkelbanen

De stabiliteit van cirkelbanen wordt bepaald met behulp van de voorwaarden van stabiliteit van evenwichtspunten. Hierdoor wordt het duidelijk voor welke centrale krachten de cirkelbanen stabiel of instabiel zijn.

Definitie 2.1 Een evenwichtspunt $z_* \in \mathbb{R}^n$ van de vergelijking $\dot{z} = \vec{f}(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$ voldoet aan de voorwaarde

$$\dot{z} = \vec{f}(z) = 0.$$

Definitie 2.2 Het gelineariseerde systeem rond een evenwichtspunt $z_* \in \mathbb{R}^n$ van de vergelijking $\dot{z} = \vec{f}(z, t)$, $z \in \mathbb{R}^n$ wordt gegeven door

$$\dot{\xi} = A\xi,$$

waarbij A een $n \times n$ Jacobi-matrix $J(z_*)$ is.

Stelling 2.1 De stabiliteit van een evenwichtspunt $z_* \in \mathbb{R}^n$ hangt af van de eigenwaarden van de Jacobiaan $J(z_*)$ in het gelineariseerde systeem:

- i) Een evenwichtspunt is asymptotisch stabiel als alle eigenwaarden van $J(z_*)$ een negatief reëel deel hebben.

- ii) Een evenwichtspunt is instabiel als minstens één eigenwaarde van $J(z_*)$ een positief reëel deel heeft.
- iii) De stabiliteit van het evenwichtspunt kan niet worden vastgesteld als alle eigenwaarden van $J(z_*)$ een negatief of geen reëel deel hebben, maar met minstens één eigenwaarde van $J(z_*)$ heeft geen reëel deel.

Het bewijs van Stelling 2.1 is gegeven door [Braun, 1993]. Om de stabiliteit van cirkelbanen te analyseren wordt gebruikt gemaakt van de vergelijking (1.13). Aangezien voor cirkelbanen geldt dat $\dot{r} = 0$ en $\ddot{r} = 0$ vanwege dat r constant is, voldoet het aan de voorwaarde voor evenwichtspunten.

Dus we kunnen stabiliteit van cirkelbanen definiëren met behulp van de stabiliteit van evenwichtspunten. Allereerst bepalen we het twee-dimensionaal stelsel, om vervolgens het evenwichtspunt voor cirkelbanen te bepalen. We kunnen de Jacobiaan $J(z_*)$ bepalen met behulp van het twee-dimensionaal stelsel waardoor we via de eigenwaarden van $J(z_*)$ de stabiliteit van cirkelbanen kunnen aantonen.

2.2.1 Twee-dimensionaal stelsel

De vergelijking (1.13) is gelijk aan

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{mr^3}.$$

De substituties $x = r$ en $y = \dot{r}$ worden gebruikt om deze vergelijking in een twee-dimensionaal stelsel te noteren. Hieruit volgt dat de vergelijking (1.13) gelijk is aan het twee-dimensionaal stelsel

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{f(x)}{m} + \frac{L^2}{m^2x^3} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

2.2.2 Evenwichtspunt

Voor het evenwichtspunt (x_*, y_*) geldt dat $\dot{x} = \dot{r} = 0$ en $\dot{y} = \ddot{r} = 0$. Vanwege $\ddot{r} = 0$ geldt direct uit vergelijking (1.13) dat

$$m\ddot{r} = 0 \implies f_{eff}(x_*) = f(x_*) + \frac{L^2}{mx_*^3} = 0 \implies f(x_*) = -\frac{L^2}{mx_*^3}. \quad (2.9)$$

Dus voor het evenwichtspunt (x_*, y_*) geldt dat

$$f(x_*) + \frac{L^2}{mx_*^3} = 0, \quad y_* = 0. \quad (2.10)$$

Bewering 2.1 Het punt x_* is een kritiek punt van $f_{eff}(r)$.

Bewijs. Er is aangetoond dat x_* voldoet aan de vergelijking

$$f_{eff}(x_*) = f(x_*) + \frac{L^2}{mx_*^3} = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$V'_{eff}(x_*) = \frac{dV_{eff}(x_*)}{dr} = -f_{eff}(x_*) = -f(x_*) - \frac{L^2}{mx_*^3} = 0.$$

Dus vanwege $V'_{eff}(x_*) = 0$ kunnen we concluderen dat we de tweede afgeleide van $V_{eff}(x_*)$ moeten gebruiken om te bepalen of $V_{eff}(x_*)$ daadwerkelijk een extreme waarde is van de effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$. \square

2.2.3 Jacobiaan

De Jacobiaan $J(x_*, y_*)$ een evenwichtspunt van het twee-dimensionaal stelsel (2.8) is gelijk aan

$$J(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}(x_*, y_*)}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}(x_*, y_*)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{f'(x_*)}{m} - \frac{3L^2}{m^2 x_*^4} & 0 \end{pmatrix}.$$

De karakteristieke polynoom van $J(x_*, y_*)$ wordt vastgesteld om de eigenwaarden te bepalen.

$$\begin{aligned} p_{J(x_*, y_*)} &= \det(\lambda I - J(x_*, y_*)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{f'(x_*)}{m} + \frac{3L^2}{m^2 x_*^4} & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + \left(\frac{3L^2}{m^2 x_*^4} - \frac{f'(x_*)}{m} \right). \end{aligned}$$

Merk op dat de tweede afgeleide $V''_{eff}(r)$ gelijk is aan

$$V''_{eff}(r) = \frac{dV'_{eff}(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(-f(r) - \frac{L^2}{mr^3} \right) = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{d}{dr} f(r).$$

Dus de eigenwaarden zijn gelijk aan

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \sqrt{-\left(\frac{3L^2}{m^2 x_*^4} - \frac{f'(x_*)}{m} \right)} = \sqrt{-\frac{1}{m} V''_{eff}(x_*)}, \\ \lambda_- &= -\sqrt{-\left(\frac{3L^2}{m^2 x_*^4} - \frac{f'(x_*)}{m} \right)} = -\sqrt{-\frac{1}{m} V''_{eff}(x_*)}. \end{aligned}$$

Met andere woorden, de eigenwaarden hangen af van de tweede afgeleide van de effectieve potentiële energie. Als $V''_{eff}(x_*) < 0$, dan is $V_{eff}(x_*)$ een maximum en geldt dat $\lambda_+ > 0$ en $\lambda_- < 0$.

Dus de evenwichtoplossing (x_*, y_*) is instabiel vanwege Stelling 2.1.ii. Daarentegen, als $V''_{eff}(x_*) > 0$, dan kunnen we niet de stabiliteit vaststellen van de evenwichtoplossing (x_*, y_*) via de eigenwaarden vanwege Stelling 2.iii.

2.2.4 Stabiliteit van het minimum

Merk op dat de energie van de puntmassa in het evenwichtspunt (x_*, y_*) wordt gegeven door

$$E = \frac{1}{2} m y_*^2 + \frac{L^2}{2m x_*^2} + V(x_*) = \frac{L^2}{2m x_*^2} + V(x_*) = V_{eff}(x_*), \quad (2.11)$$

vanwege de energievergelijking (1.20). Dit is tevens de energie voor cirkelbanen.

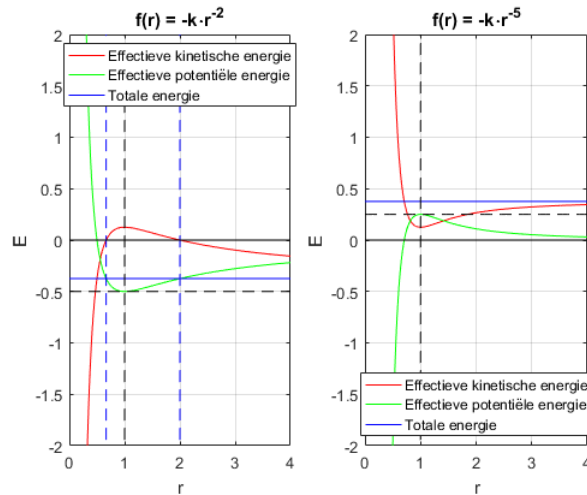
We zullen de radiële beginpositie lichtelijk afwijken van de evenwichtsoplossing om stabiliteit aan te tonen indien $V_{eff}''(x_*) > 0$. Daarna zullen we controleren of de puntmassa in de buurt blijft van de (cirkel)baan van de evenwichtsoplossing. De evenwichtsoplossing is een minimum aangezien $V_{eff}''(x_*) > 0$ wordt aangenomen.

Laat de radiële beginpositie gelijk zijn aan $r(0) = x_* + \varepsilon$ met $\varepsilon > 0$ klein en $y(0) = \dot{r}(0) = \nu$ met $\nu \in \mathbb{R}$ klein. Vanwege dat $V_{eff}(x_*)$ minimaal is, dan geldt voor de beginpositie $(r(0), \dot{r}(0))$ dat de energie groter is dan bij de evenwichtsoplossing vanwege (2.11).

In de linkerfiguur van Figuur 1 is te zien dat de effectieve kinetische energie groter gelijk nul is in een bepaald interval van r . Hieruit volgt dat $r(0)$ en $\dot{r}(0)$ begrensd blijven voor kleine afwijkingen tot de evenwichtsoplossing. Dus de banen zijn (Liapunov) stabiel indien $V_{eff}''(r) > 0$ geldt, met andere woorden als $V_{eff}(r_*)$ een minimum aanneemt.

In de rechterfiguur van Figuur 1 is te zien dat de effectieve kinetische energie groter dan nul is voor alle $r \geq 0$, indien $V_{eff}''(r) < 0$ en voor beginposities zodanig dat E groter is dan de E in de evenwichtsoplossing. Hieruit volgt dat $r(0)$ en $\dot{r}(0)$ onbegrensd zijn voor kleine afwijkingen tot de evenwichtsoplossing.

Dus de banen zijn instabiel indien $V_{eff}''(r) < 0$ geldt, met andere woorden als $V_{eff}(r_*)$ een maximum aanneemt.



Figuur 1: De drie verschillende energiën voor de centrale krachten waarbij in de linkerfiguur respectievelijk de rechterfiguur geldt dat $n = -2$ respectievelijk $n = -5$.

2.2.5 Stabiliteit van cirkels

We zullen $V''_{eff}(x_*) > 0$ uitwerken om te bepalen voor welke n de effectieve potentiële energie een minimum heeft. Merk op dat $r = x_*$. De tweede afgeleide $V''_{eff}(x_*)$ is gelijk aan

$$V''_{eff}(x_*) = \frac{dV'_{eff}(x_*)}{dx_*} = \frac{d}{dx_*} \left(-f(x_*) - \frac{L^2}{mx_*^3} \right) = \frac{3L^2}{mx_*^4} - \frac{d}{dx_*} f(x_*).$$

Vanwege (2.9) geldt dat $f(x_*) = -\frac{L^2}{mx_*^3}$. De tweede afgeleide $V''_{eff}(x_*)$ groter stellen aan nul geeft

$$V''_{eff}(x_*) > 0 \implies \frac{3L^2}{mx_*^4} > \frac{d}{dx_*} f(x_*) \implies \frac{d}{dx_*} f(x_*) < -\frac{3f(x_*)}{x_*}. \quad (2.12)$$

De centrale krachten die worden beschouwd zijn van de vorm $\vec{F}(\vec{r}) = f(x_*)\vec{e}_r = -kx_*^n\vec{e}_r$. Substitueren van $f(x_*) = -kx_*^n$ met $k > 0$ in (2.12) geeft

$$-k \frac{d}{dx_*} x_*^n < -\frac{3kx_*^n}{x_*} \implies nkx_*^{n-1} > -3kx_*^{n-1} \implies n > -3.$$

Dus cirkelbanen zijn stabiel voor centrale krachten gelijk aan

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -kr^n\vec{e}_r, \quad V(r) = \frac{1}{n+1}kr^{n+1} \text{ met } n > -3, \quad (2.13)$$

en instabiel voor

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -kr^n\vec{e}_r, \quad V(r) = \frac{1}{n+1}kr^{n+1} \text{ met } n < -3. \quad (2.14)$$

De centrale kracht voor $n = -3$ wordt besproken in Hoofdstuk 6, waarin wordt aangetoond dat de cirkelbaan instabiel is.

3 Analytische oplossing van banen

In de volgende hoofdstukken worden specifieke centrale krachten besproken waarbij de banen in kaart zijn gebracht. In dit hoofdstuk wordt bepaald voor welke centrale krachten de baanvergelijkingen op te lossen zijn door middel van trigonometrische -, hyperbolische - of elliptische functies.

Bovendien wordt bepaald of een som van centrale krachten ook op te lossen is door middel van trigonometrische -, hyperbolische - of elliptische functies.

Ten slotte wordt de numerieke methode Runge-Kutta 4 besproken om eventueel $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{dr}{d\theta}$ te benaderen voor willekeurige $n \in \mathbb{R}$.

Allereerst willen we bepalen voor welke centrale krachten de baanvergelijkingen op te lossen zijn. Daartoe willen we de baanvergelijking (2.7),

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^4 - \frac{2mk}{L^2(n+1)}r^{n+5} - r^2}},$$

afhankelijk maken van de variabele $v = r^q$ met $q \in \mathbb{R}$.

3.1 De algemene baanvergelijking voor $v = r^q$

Laat $v = r^q$ met $q \in \mathbb{R}$ zijn, dan geldt dat $dr = q^{-1}r^{1-q}dv$. Substitueren in (2.7) geeft

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \pm \int_{v_0}^v \frac{q^{-1}r^{1-q}dv}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^4 - \frac{2mk}{L^2(n+1)}r^{n+5} - r^2}} \implies \\ \theta - \theta_0 &= \pm \frac{1}{q} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^{2+2q} - \frac{2mk}{L^2(n+1)}r^{n+3+2q} - r^{2q}}}. \end{aligned}$$

Dus de algemene baanvergelijking, waarbij $v = r^q$ met $q \in \mathbb{R}$, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{1}{q} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}v^{\phi(q)} - \frac{2mk}{L^2(n+1)}v^{\varphi(n,q)} - v^2}} = \pm \frac{1}{q} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{P(v)}}, \quad (3.1)$$

waarbij $P(v)$ een polynoom is, $\phi(q) = \frac{1}{q}(2+2q)$ en $\varphi(n,q) = \frac{1}{q}(n+3+2q)$.

Merk op dat voor $n = -1$ geldt dat $V(r) = k \ln|r| + C$, $C \in \mathbb{R}$. We laten $n = -1$ buiten beschouwing omdat $V(r)$ niet in de vorm $V(r) = \frac{k}{n+1}r^{n+1} + C$ is.

3.2 De baanvergelijking met vierdegraads polynoom $P(v)$

Definitie 3.1 Een elliptische integraal is de integraal van de vorm

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Q(x)}} dx, \quad (3.2)$$

waarbij $R(x)$ een rationale functie is en $Q(x)$ een derde- of vierdegraads polynoom zonder meervoudige nulpunten.

In [Whittaker and Watson, 1920] zijn integralen van de vorm (3.2) besproken waarbij het resultaat is dat de integraal (3.2) gelijk is aan de som van een elliptische integraal van de eerste-, van de tweede- en van de derde soort. De elliptische integralen van de eerste soort zijn op te lossen door middel van de Jacobi elliptische functies sn , cn en dn .

De baanvergelijking (3.1) is van de vorm (3.2) mits $P(v)$ een derde- of vierdegraads polynoom zonder meervoudige nulpunten is. Het is mogelijk dat $P(v)$ een polynoom is met meervoudige nulpunten. Met andere woorden, $P(v)$ is van de vorm $v^{2s}Q(v)$, $s \in \mathbb{Z}$, waarbij $Q(v)$ een derde- of vierdegraads polynoom zonder meervoudige nulpunten is.

3.2.1 De mogelijke machten in $P(v)$

Allereerst willen we de mogelijke waarden van q bepalen waarbij (3.1) een elliptische integraal is. Daartoe maken we gebruik van het gegeven dat het verschil tussen $\phi(q)$ en 2 hoogstens 4 is, immers we beschouwen (3.1) als een elliptische integraal. Met andere woorden, de macht $\phi(q)$ kan de volgende waarden aannemen

$$\phi(q) = \alpha_i, \quad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\} = \{-2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6\}, \quad (3.3)$$

waarbij $i = 1, 2, \dots, 8$. Merk op dat $\lim_{a \rightarrow 2} \phi(q) = a \implies \lim_{a \rightarrow 2} q = \frac{2}{a-2} = \infty$. Hieruit volgt dat q een singulariteit heeft in $a = 2$, daarom laten we $a = 2$ buiten beschouwing.

Vanwege (3.3) geldt dat q de volgende waarden kan aannemen

$$q_i = \frac{2}{\alpha_i - 2}, \quad q = \{q_1, q_2, \dots, q_8\} = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, -2, 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right\}. \quad (3.4)$$

Vervolgens willen we de bijbehorende waarden van n bepalen. Daartoe maken we, analoog als bij $\phi(q)$, gebruik van het gegeven dat het verschil tussen $\phi(q)$, $\varphi(n, q)$ en 2 hoogstens 4 is. Door het substitueren van q volgt dat de macht $\varphi(n, q)$ gelijk is aan

$$\begin{aligned} \varphi(n, q) &= \{\varphi(n, q_1), \varphi(n, q_2), \dots, \varphi(n, q_8)\} \\ &= \left\{ -2(n+2), -\frac{3}{2} \left(n + \frac{5}{3} \right), -(n+1), -\frac{1}{2}(n-1), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(n+7), n+5, \frac{3}{2} \left(n + \frac{13}{3} \right), 2(n+4) \right\}. \end{aligned}$$

De verzameling β_i weergeeft de mogelijke waarden van $\varphi(n, q_i)$ zodanig dat het verschil van $\varphi(n, q_i)$ en $\phi(q_i)$ of 2 hoogstens 4 is.

Zodoende kan de macht $\varphi(n_i, q_i)$ de volgende mogelijke waarden aannemen:

$$\begin{aligned}
\varphi(n_{1,i}, q_1) &= \beta_{1,i}, & \beta_1 &= \{\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{1,5}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\
\varphi(n_{2,i}, q_2) &= \beta_{2,i}, & \beta_2 &= \{\beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{2,6}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\
\varphi(n_{3,i}, q_3) &= \beta_{3,i}, & \beta_3 &= \{\beta_{3,1}, \beta_{3,2}, \dots, \beta_{3,7}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \\
\varphi(n_{4,i}, q_4) &= \beta_{4,i}, & \beta_4 &= \{\beta_{4,1}, \beta_{4,2}, \dots, \beta_{4,8}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
\varphi(n_{5,i}, q_3) &= \beta_{5,i}, & \beta_5 &= \{\beta_{5,1}, \beta_{5,2}, \dots, \beta_{5,8}\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
\varphi(n_{6,i}, q_4) &= \beta_{6,i}, & \beta_6 &= \{\beta_{6,1}, \beta_{6,2}, \dots, \beta_{6,7}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
\varphi(n_{7,i}, q_5) &= \beta_{7,i}, & \beta_7 &= \{\beta_{7,1}, \beta_{7,2}, \dots, \beta_{7,6}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
\varphi(n_{8,i}, q_6) &= \beta_{8,i}, & \beta_8 &= \{\beta_{8,1}, \beta_{8,2}, \dots, \beta_{8,5}\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}.
\end{aligned}$$

3.2.2 De mogelijke waarden van n

Vanwege $\varphi(n_i, q_i)$ en β_i volgt direct de mogelijke waarden van n :

$$\begin{aligned}
-2(n_{1,i} + 2) = \beta_{1,i} &\implies n_1 = \{n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{1,5}\} = \left\{-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, -3\right\} \\
-\frac{3}{2}\left(n_{2,i} + \frac{5}{3}\right) = \beta_{2,i} &\implies n_2 = \{n_{2,1}, n_{2,2}, \dots, n_{2,6}\} = \left\{-\frac{1}{3}, -1, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -3, -\frac{11}{3}\right\} \\
-(n_{3,i} + 1) = \beta_{3,i} &\implies n_3 = \{n_{3,1}, n_{3,2}, \dots, n_{3,7}\} = \{1, 0, -1, -2, -3, -4, -5\} \\
-\frac{1}{2}(n_{4,i} - 1) = \beta_{4,i} &\implies n_4 = \{n_{4,1}, n_{4,2}, \dots, n_{4,8}\} = \{5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9\} \\
\frac{1}{2}(n_{5,i} + 7) = \beta_{5,i} &\implies n_5 = \{n_{5,1}, n_{5,2}, \dots, n_{5,8}\} = \{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5\} \\
n_{6,i} + 5 = \beta_{6,i} &\implies n_6 = \{n_{6,1}, n_{6,2}, \dots, n_{6,7}\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\} \\
\frac{3}{2}\left(n_{5,i} + \frac{13}{3}\right) = \beta_{7,i} &\implies n_7 = \{n_{7,1}, n_{7,2}, \dots, n_{7,6}\} = \left\{-\frac{11}{3}, -3, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -1, -\frac{1}{3}\right\} \\
2(n_{8,i} + 4) = \beta_{8,i} &\implies n_8 = \{n_{8,1}, n_{8,2}, \dots, n_{8,5}\} = \left\{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1\right\}.
\end{aligned}$$

3.2.3 De geldige machten in $P(v)$

Aangezien de machten $\phi(q_i)$ en $\phi(n_{i,i}, q_i)$ in $P(v)$ de gehele getallen van -2 tot en met 6 mogen aannemen, geldt dat s alleen de waarden $-1, 0$ en 1 kan aannemen waarbij $P(v) = v^{2s}Q(v)$, $s \in \mathbb{Z}$. Immers er geldt dat $Q(v)$ hoogstens een vierdegraads polynoom zonder meervoudige nulpunten is en $s \in \mathbb{Z}$.

We zullen alleen het geval $q_1 = -\frac{1}{2}$ bespreken om de geldige machten van $\phi(n_{1,j}, q_1)$ te bepalen. De andere zeven gevallen gaan op dezelfde werkwijze.

Voor het geval $q_1 = -\frac{1}{2}$ geldt dat de mogelijke machten in $P(v)$ respectievelijk gelijk mogen zijn aan $\{\alpha_1, \beta_1, 2\}$. Vanwege $\alpha_1 = -2$ geldt dat $s = -1$. Hieruit volgt dat de mogelijke machten in $Q(v)$ respectievelijk gelijk zijn aan $\{0, \beta_1 + 2, 4\}$. Vanwege definitie van β_1 voldoen de machten $\beta_{1,1}$ tot en met $\beta_{1,5}$.

q	α	q	α	s	β
$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{2}{3}$	-1	-1	-2, -1, 0, 1, 2
-1	0	-2	1	-1, 0	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2	3	1	4	0, 1	$\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$\frac{1}{2}$	5	$\frac{2}{3}$	6	1	2, 3, 4, 5, 6

Tabel 1: De bijbehorende machten β voor de verschillende waarden van q .

3.2.4 De geldige waarden van n

In Tabel 1 zijn de bijbehorende machten β gegeven. In paragraaf 3.2.2 zijn de corresponderende waarden van n gegeven. In Tabel 2 staan de waarden van n . Merk op dat we het geval $n = -1$ buiten beschouwing lieten.

q	α	q	α	n
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	5	$-\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, -3$
$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	6	$-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -3$
-1	0	1	4	$\{1, 0, -2, -3\}, \{-2, -3, -4, -5\}$
-2	1	2	3	$\{5, 3, 1, -3\}, \{1, -3, -5, -7\}$

Tabel 2: De geldige waarden voor n voor de verschillende waarden van q .

3.3 De baanvergelijking met tweedegraads polynoom $P(v)$

De integraal van de vorm

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}, \quad (3.5)$$

waarbij $Q(x)$ een tweedegraads polynoom zonder meervoudige nulpunten is, is op te lossen met behulp van trigonometrische- of hyperbolische functies.

Hierdoor geldt dat de baanvergelijking (3.1) op te lossen is met behulp van trigonometrische- of hyperbolische functies als $P(v)$ een tweedegraads polynoom is zonder meervoudige nulpunten. Daarom moet gelden dat $s = 0$, $\beta = \{0, 1, 2\}$ en $\alpha = 0$ of $\alpha = 1$. Het bepalen van q en n gaat door middel van Tabel 1 en Tabel 2.

q	α	n
-1	0	-2 - 3
-2	1	1, -3

Tabel 3: De geldige waarden voor n voor de verschillende waarden van q .

3.4 Conclusie analytisch oplossen van de baanvergelijking

Uit Tabel 2 en Tabel 3 kunnen we bepalen welke centrale krachten op te lossen zijn met trigonometrische-, hyperbolische- of elliptische functies.

3.4.1 Trigonometrische of hyperbolische functies

Vanwege Tabel 3 geldt dat drie centrale krachten op te lossen zijn met behulp van trigonometrische- of hyperbolische functies.

$\vec{F}(\vec{r})$	v
$-kr^{-2}\vec{e}_r, -kr^{-3}\vec{e}_r$	r^{-1}
$-kr^1\vec{e}_r, -kr^{-3}\vec{e}_r$	r^{-2}

Tabel 4: De drie centrale krachten $\vec{F}(\vec{r}) = -kr^n\vec{e}_r$ waarbij de oplossing in termen van trigonometrische- of hyperbolische functies kan worden uitgedrukt door bepaalde substituties $v = r^q$.

Bovendien geldt vanwege Tabel 4 dat twee lineaire combinaties van centrale krachten op te lossen zijn met behulp van trigonometrische- of hyperbolische functies.

$\vec{F}(\vec{r})$	v
$-k(Ar^{-2} + Br^{-3})\vec{e}_r$	r^{-1}
$-k(Cr + Br^{-3})\vec{e}_r$	r^{-2}

Tabel 5: De twee lineaire combinaties met constante reële coëfficiënten van centrale krachten waarbij de oplossing in termen van trigonometrische- of hyperbolische functies kan worden uitgedrukt door bepaalde substituties $v = r^q$.

3.4.2 Elliptische functies

Vanwege Tabel 2 geldt dat elf centrale krachten op te lossen zijn met behulp van elliptische functies.

$\vec{F}(\vec{r})$	v
$-kr^{-\frac{3}{2}}\vec{e}_r, -kr^{-\frac{5}{2}}\vec{e}_r$	$r^{-\frac{1}{2}}, r^{\frac{1}{2}}$
$-kr^{-\frac{1}{3}}\vec{e}_r, -kr^{-\frac{5}{3}}\vec{e}_r, -kr^{-\frac{7}{3}}\vec{e}_r$	$r^{-\frac{2}{3}}, r^{\frac{2}{3}}$
$-kr\vec{e}_r, -k\vec{e}_r, -kr^{-4}\vec{e}_r, -kr^{-5}\vec{e}_r$	r^{-1}, r
$-kr^5\vec{e}_r, -kr^3\vec{e}_r, -kr\vec{e}_r, -kr^{-5}\vec{e}_r, -kr^{-7}\vec{e}_r$	r^{-2}, r^2

Tabel 6: De elf centrale krachten $\vec{F}(\vec{r}) = -kr^n\vec{e}_r$ waarbij de oplossing in termen van elliptische functies kan worden uitgedrukt door bepaalde substituties $v = r^q$.

Bovendien geldt vanwege Tabel 6 dat zes lineaire combinaties van centrale krachten op te lossen zijn met behulp van elliptische functies.

$\vec{F}(\vec{r})$	v
$-k(Ar^{-3} + Br + Cr^3 + Dr^5)\vec{e}_r$	r^{-2}, r^2
$-k(Ar^{-3} + Br + Er^{-7} + Fr^{-5})\vec{e}_r$	r^{-2}, r^2
$-k(Ar^{-3} + Gr^{-2} + Hr^{-4} + Fr^{-5})\vec{e}_r$	r^{-1}, r^1
$-k(Ar^{-3} + Gr^{-2} + Br + 1)\vec{e}_r$	r^{-1}, r^1
$-k(Ar^{-3} + Gr^{-2} + Kr^{-\frac{3}{2}} + Lr^{-\frac{5}{2}})\vec{e}_r$	$r^{-\frac{1}{2}}, r^{\frac{1}{2}}$
$-k(Ar^{-3} + Mr^{-\frac{1}{3}} + Nr^{-\frac{5}{3}} + Pr^{-\frac{7}{3}})\vec{e}_r$	$r^{-\frac{2}{3}}, r^{\frac{2}{3}}$

Tabel 7: De zes lineaire combinaties met constante reële coëfficiënten van centrale krachten waarbij de oplossing in termen van elliptische functies kan worden uitgedrukt door bepaalde substituties $v = r^q$.

3.5 Numerieke benadering

We kunnen een numerieke methode toepassen om een beeld te krijgen hoe de banen eruit zien voor de overige waarden van n . De methode die we gaan beschouwen is Runge-Kutta 4. Deze methode wordt behandeld in [Vuik et al., 2016] waarin overigens ook andere benaderingsmethoden worden toegelicht.

Gegeven is een begin-voorwaarde probleem, die gelijk is aan

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y), & t > t_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dan benadert de RK4-methode de oplossing voor t_{n+1} , waarbij $t_n = t_0 + n\Delta t$ en $n \in \mathbb{N}_0$, door

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= \Delta t f(t_n, w_n), \\ k_2 &= \Delta t f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, w_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= \Delta t f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, w_n + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, w_n + k_3), \end{aligned}$$

waarbij w_n de benadering is van de oplossing y op tijdstip n .

Het beginwaardeprobleem die kan worden benaderd is (2.3), met andere woorden

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{n+1} r^{n+1} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}, & t > t_0, \\ r(t_0) = r_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Het beginwaardeprobleem (3.7) kan worden toegepast om de radiële snelheid van de puntmassa te benaderen.

Een andere beginwaardeprobleem die benaderd kan worden is (2.4), met andere

woorden

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{n+1} r^{n+1} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}{L}, & t > t_0, \\ r(t_0) = r_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Het beginwaardeprobleem (3.8) kan worden toegepast om de baan in kaart te brengen. Er moet opgelet worden voor eventuele asymptoten en dat $\frac{dr}{dt}$ reëel blijft. Dit zou de benadering van de baan onnauwkeuriger maken en daarmee ook de keuze voor t ingewikkelder.

Wellicht zou een parameter θ , die dezelfde eigenschappen heeft als t , geïntroduceerd kunnen worden om de baan in kaart te brengen. Immers $\frac{dr}{d\theta}$ wordt benaderd.

4 Keplerprobleem en de wet van Coulomb

In dit hoofdstuk bespreken we het geval $n = -2$. Voor het *Keplerprobleem* geldt dat de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ en bijbehorende potentiële energie $V(r)$ respectievelijk gelijk zijn aan

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r, \quad V(r) = -\frac{k}{r},$$

waarbij $k \in \mathbb{R}$ een constante is. Merk op dat de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ voldoet aan de vergelijking van centrale krachten (2.1), waarbij $n = -2$ geldt.

Een toepassing van deze kracht is de zwaartekracht. Hiervoor geldt dat de constante k , met dimensie $[Nm^2]$, gelijk is aan

$$k = GMm,$$

waarbij $G = 6.67 \cdot 10^{-11} [Nm^2kg^{-2}]$ de gravitatiekracht is en massa's $M [kg]$ en $m [kg]$ waarvoor $M > m$ geldt. Bovendien geldt dat m de puntmassa is en de zwaartekrachtveld is afkomstig van een massa M .

Newton heeft de kracht $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$ bestudeerd. Daarnaast bestudeerde Kepler, zonder het begrip kracht, de banen van hemellichamen en vond daarbij de drie wetten die naar hem zijn genoemd. Newton heeft de gravitatiewet voorgesteld en daaruit de wetten van Kepler kunnen afleiden. De *Tweede wet van Kepler* is behandeld in paragraaf 1.2.4. De overige twee wetten komen in dit hoofdstuk aanbod. In [Goldstein et al., 2014] wordt het Keplerprobleem en meer uit de klassieke mechanica uitgebreid besproken. De zwaartekracht is een aantrekkende kracht, dat wilt zeggen $k > 0$.

Daarnaast bestaat er een kracht tussen twee elektrische puntladingen, die eveneens voldoet aan de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$. Deze kracht wordt de Coulombkracht genoemd omdat Coulomb deze kracht heeft bestudeerd. Voor de Coulombkracht geldt dat de constante van Coulomb k dimensie $[Nm^2]$ heeft en gelijk is aan

$$k = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0},$$

waarbij $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} [N^{-1}m^2C^{-2}]$ de elektrische veldconstante is, en q_1, q_2 zijn de elektrische ladingen, die in geheeltallige veelvouden van elektronen voorkomen. Een elektron heeft een elektrische lading van $1.60 \cdot 10^{-19} [C]$. De Coulombkracht is aantrekkend als $k > 0$ en afstotend als $k < 0$.

4.1 Tweelichamenprobleem gereduceerd tot eenlichaam probleem.

In dit hoofdstuk willen we het verband duidelijk maken dat de gravitatiekracht, waar het om twee massa's m en M gaat, gereduceerd kan worden tot een massa waardoor het duidelijk wordt dat het tweelichamenprobleem een toepassing is van het probleem is van een centrale kracht.

Het tweelichamenprobleem is de beweging van twee lichamen die elkaar beïnvloeden door de krachten die ze op elkaar uitoefenen. Het eerste lichaam en het tweede lichaam hebben een massa, respectievelijk m_1 en m_2 .

We nemen aan dat dit systeem geen invloed heeft van externe krachten. Dat wilt zeggen, de enige krachten die gelden in dit systeem zijn de krachten F_{12} en F_{21} . Neem aan dat F_{12} en F_{21} langs de verbindinglijn tussen m_1 en m_2 gericht zijn. De kracht \vec{F}_{12} op m_1 uitgeoefend door m_2 is gelijk aan

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \quad (4.1)$$

vanwege de *Tweede wet van Newton* met \vec{r}_1 de positie van m_1 vanuit het massamiddelpunt.

Definitie 4.1 De positievector \vec{r}_{12} van m_1 vanuit m_2 is gedefinieerd als

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (4.2)$$

De versnelling $\ddot{\vec{r}}_{12}$ is gelijk aan $\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2$ vanwege (4.2). De *Derde wet van Newton* geeft

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (4.3)$$

Hieruit volgt in combinatie met (4.1) dat

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \implies \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{\vec{r}}_2. \quad (4.4)$$

Vervolgens geldt vanwege (4.2) en (4.4) dat

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}}_1 + \frac{m_1}{m_2} \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Laat $\vec{F}_{12}(\vec{r}_1) = f(r_{12}) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ zijn met $|f(r_{12})|$ de grootte van de kracht tussen m_1 en m_2 . Hieruit volgt in combinatie met (4.1) dat

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = f(r_{12}) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \quad (4.5)$$

Substitueren van (4.4) in (4.5) geeft

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = f(r_{12}) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \implies \frac{m_1}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \ddot{\vec{r}}_{12} = f(r_{12}) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \implies \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1} \ddot{\vec{r}}_{12} = f(r_{12}) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.$$

Op dezelfde werkwijze geldt voor $\vec{F}_{21}(\vec{r}_2)$ dat

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = f(r_{21}) \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \implies \frac{m_2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} \ddot{\vec{r}}_{21} = f(r_{21}) \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \implies \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{21} = f(r_{21}) \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}.$$

Dus de beweging van m_1 ten opzichte van m_2 is gelijk aan de beweging van m_2 ten opzichte van m_1 . Hieruit volgt de definitie van de gereduceerde massa.

Definitie 4.2 De gereduceerde massa van twee lichamen met massa's m_1 en m_2 is gedefinieerd als

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.6)$$

4.2 Baanvergelijking

In Hoofdstuk 3 is de eerste orde differentiaalvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ uitgewerkt, waardoor het direct duidelijk wordt welke substitutie moet worden toegepast om de baan te bepalen. Bovendien geeft $\frac{dr}{d\theta}$ de meeste informatie over de baan vanwege de constanten E en L . Dus de voorkeur gaat naar de baanvergelijking (3.1).

De baanvergelijking (3.1) voor $n = -2$, waarbij $v = r^{-1}$, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \mp \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2}v - v^2}}. \quad (4.7)$$

De onbepaalde integraal van (4.7) is van de standaardvorm

$$\int \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2 + \beta v + \gamma}} = \frac{-1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right), \quad (4.8)$$

waarbij de constanten gelijk zijn aan

$$\alpha = -1, \quad \beta = \frac{2mk}{L^2}, \quad \gamma = \frac{2mE}{L^2}. \quad (4.9)$$

De formule (4.8) is van toepassing mits $\alpha < 0$. Het toepassen van deze integratie in (4.7) geeft

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right). \quad (4.10)$$

Vervolgens (4.10) oplossen voor v geeft

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \cos \left(\pm \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \right) \implies \\ \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= -\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \implies \\ v &= -\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) - \frac{\beta}{2\alpha} \end{aligned}$$

Substitueren van $v = r^{-1}$ en de constanten in (4.9) geeft

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2k^2}{L^4} + \frac{8mE}{L^2}} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{2mk}{2L^2} \implies \\ \frac{1}{r} &= \frac{mk}{L^2} \left(\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0) + 1 \right). \end{aligned}$$

Dus de baanvergelijking is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{mk}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (4.11)$$

waarbij $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$ de excentriciteit is en $\eta = \frac{L^2}{mk}$. Zonder beperking der algemeenheid kiezen we $\theta_0 = 0$ vanwege rotatiesymmetrie.

4.3 Kegelsneden

Lemma 4.1 De kegelsneden met een brandpunt in $(0, 0)$ zijn te noteren in termen van poolcoördinaten als de algemene vergelijking

$$r = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta)}, \quad (4.12)$$

waarbij e de excentriciteit is en $\eta \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat:

- i) Als $e = 0$, dan beschrijft (4.12) een cirkel.
- ii) Als $0 < e < 1$, dan beschrijft (4.12) een ellips.
- iii) Als $e = 1$, dan beschrijft (4.12) een parabool.
- iv) Als $e > 1$, dan beschrijft (4.12) een hyperbool.

In [A. Adams and Essex, 2013] wordt Lemma 4.1 toegelicht. De baanvergelijking (4.11) beschrijft kegelsneden met een brandpunt in $(0, 0)$ vanwege Lemma 4.1. De lange as van de kegelsnede ligt parallel langs de x -as omdat in de vergelijking (4.12) geldt dat $\theta_0 = 0$.

De energievergelijking (1.20) voor $n = -2$, waarbij $k > 0$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \geq V_{eff}(r_*),$$

waarbij $V_{eff}(r_*)$ het minimum is van $V_{eff}(r)$. Immers $E \geq V_{eff}(r)$ vanwege $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ en voor $n > -3$ geldt dat $V_{eff}(r_*)$ een minimum aanneemt vanwege stabiliteit van cirkelbanen. De stabiliteit van cirkelbanen is besproken in paragraaf 2.2.

Bewering 4.1 Als $E \geq -\frac{mk^2}{2L^2}$ en $k > 0$, dan geldt dat (4.11) alle kegelsneden beschrijft.

Bewijs. Neem aan dat $E \geq -\frac{mk^2}{2L^2}$ en $k > 0$. Dan geldt voor de excentriciteit dat

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \geq \sqrt{1 - \frac{2mk^2L^2}{2mk^2L^2}} = 0.$$

Hieruit volgt dat (4.11) alle kegelsneden beschrijft vanwege Lemma 4.1

als $E \geq -\frac{mk^2}{2L^2}$ en $k > 0$. □

4.3.1 Cirkel

Bewering 4.2 Als $E = -\frac{mk^2}{2L^2}$ en $k > 0$ geldt, dan beschrijft (4.11) een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal $r = \frac{L^2}{mk}$.

Bewijs. Neem aan dat $E = -\frac{mk^2}{2L^2}$ en $k > 0$. Dan geldt voor de excentriciteit dat

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{1 - 1} = 0.$$

Hieruit volgt dat (4.11) een cirkel beschrijft met middelpunt $(0, 0)$ vanwege Lemma 4.1.i. Substitueren van $e = 0$ in (4.11) geeft de straal r van de cirkel

$$r(\theta) = \frac{L^2}{mk} > 0.$$

□

Bovendien geldt dat $r_* = \frac{L^2}{mk}$ en $V_{eff}(r_*) = -\frac{mk^2}{2L^2}$ vanwege stabiliteit van cirkelbanen. De stabiliteit van cirkelbanen is besproken in paragraaf 2.2.

4.3.2 Ellips

Bewering 4.3 Als $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$ en $k > 0$ geldt, dan beschrijft (4.11) een ellips met brandpunten in $(0, 0)$ en $(\frac{ek}{E}, 0)$ en centrum in $(\frac{ek}{2E}, 0)$.

Bewijs. Neem aan dat $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$ en $k > 0$. Dan geldt voor de excentriciteit dat

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \implies \sqrt{1-1} < e < \sqrt{1+0} \implies 0 < e < 1.$$

Hieruit volgt dat (4.11) een ellips beschrijft met brandpunt in $(0, 0)$ vanwege Lemma 4.1.ii.

Merk vervolgens op dat aangetoond is dat de lange as parallel langs de x -as ligt. Hieruit volgt dat de x -coördinaat van het centrum van de ellips x_c gelijk is aan

$$x_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta \cos(0)}{1 + e \cos(0)} + \frac{\eta \cos(\pi)}{1 + e \cos(\pi)} \right) = \frac{-e\eta}{(1 - e^2)} = \frac{ek}{2E}.$$

Merk op dat voor brandpunten van ellipsen, die aan Lemma 4.1.ii voldoen, geldt dat $(x_c \pm \varepsilon a, 0)$. Dan voldoen de halve lange as a en de halve korte as b aan,

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{1 + e \cos(0)} + \frac{\eta}{1 + e \cos(\pi)} \right) = \frac{\eta}{(1 - e^2)} = \frac{-k}{2E},$$

$$b^2 + e^2 a^2 = a^2 \implies b^2 = \frac{(1 - e^2)\eta^2}{(1 - e^2)^2} \implies b = \frac{\eta}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}.$$

Merk op dat $\frac{-k}{2E} > 0$ en $\sqrt{-2mE} > 0$ vanwege $E < 0$ en $k > 0$.

Aangezien het brandpunt $(0, 0)$ gegeven is en $x_c + \varepsilon a = 0$, dan volgt dat het andere brandpunt gelijk is aan $(\frac{ek}{E}, 0)$ vanwege $x_c - \varepsilon a = \frac{ek}{E}$. □

Uit Bewering 4.3 volgt de *Eerste wet van Kepler*, namelijk dat iedere planeet in een ellipsbaan beweegt met de zon als een van haar brandpunten. Dit is vanwege het gegeven dat de excentriciteit van de planeten tussen 0 en 1 ligt.

Bovendien hebben we nu de informatie beschikbaar om de *Derde wet van Kepler* vast te stellen, namelijk het kwadraat van de omlooptijd P is recht evenredig met de derde macht van haar halve lange as a .

Daartoe maken we gebruik van de oppervlakte snelheid (1.14).
Integreren van (1.14) geeft

$$\int_0^A dA = \int_0^P \frac{L}{2m} dt \implies A = \frac{L}{2m} P. \quad (4.13)$$

Aangezien planeten in ellipsbanen bewegen, is A de oppervlakte van de ellips. Daartoe bepalen we alleen de oppervlakte in het eerste kwadrant van de ellips om vervolgens met 4 te vermenigvuldigen wegens symmetrie. Dan geldt met de parametrisatie $x = a \cos(\theta)$ en $y = b \sin(\theta)$ dat

$$A = 4 \int_0^a \int_0^y dy dx = -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta d\theta = -2ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \pi ab.$$

Substitueren van $A = \pi ab$, $\eta = \frac{L^2}{mk}$, $b^2 = a\eta$ en $k = GM_\odot m$ in (4.13) geeft

$$P^2 = \frac{4m^2 A^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 m^2 a^3 \eta}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\odot} \implies \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}.$$

Dus het kwadraat van de omlooptijd P is recht evenredig met de derde macht van de halve lange as.

4.3.3 Parabool

Bewering 4.4 Als $E = 0$ en $k > 0$ geldt, dan beschrijft (4.11) een parabool met brandpunt in $(0, 0)$ en minimum afstand tot de oorsprong gelijk aan $\frac{L^2}{2mk}$.

Bewijs. Neem aan dat $E = 0$ en $k > 0$. Dan geldt voor de excentriciteit dat

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} = 1.$$

Hieruit volgt dat (4.11) een parabool met brandpunt $(0, 0)$ beschrijft vanwege Lemma 4.1.iii. Substitueren van $e = 1$ in (4.11) geeft

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + \cos(\theta)} > 0, \quad \eta = \frac{L^2}{mk}.$$

Hieruit volgt voor het minimum van $r(\theta)$ dat $\theta = 0$ en gelijk is aan

$$r(0) = \frac{L^2}{2mk} > 0.$$

Als $r(\theta) \rightarrow \infty$, dan geldt dat $1 + \cos(\theta) = 0$ waaruit volgt dat $\theta = \pi$. Vanwege $r(\theta) \geq 0$ geldt dat $1 + \cos(\theta) > 0$. Dus alleen voor $|\theta| < \pi$ is er een oplossing. \square

4.3.4 Linkertak van de hyperbool

Bewering 4.5 Als $E > 0$ en $k > 0$ geldt, dan beschrijft (4.11) de linkertak van de hyperbool met brandpunt in $(0, 0)$ en minimum afstand tot de oorsprong gelijk aan $\frac{L^2}{mk(1+e)}$.

Bewijs. Neem aan dat $E > 0$ en $k > 0$. Dan geldt voor de excentriciteit dat

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} > \sqrt{1} = 1.$$

Hieruit volgt dat (4.11) een hyperbool beschrijft met brandpunt in $(0, 0)$ vanwege Lemma 4.1.iv. De baan is een liggende hyperbool want de lange as ligt parallel langs de x -as. Hieruit volgt dat $r(0)$ de top van de hyperbool is.

Voor de asymptoten van de hyperbool geldt dat $r \rightarrow \infty$, met andere woorden $1 + e \cos(\theta) = 0$. Hieruit volgt dat voor de asymptoten van de hyperbool geldt dat $\theta = \arccos(-\frac{1}{e})$. Vanwege $r(\theta) \geq 0$ en $\eta > 0$ voor $k > 0$ geldt dat $1 + e \cos(\theta) > 0$. Dus alleen voor $|\theta| < \arccos(-\frac{1}{e})$ is er een oplossing.

Hieruit volgt $r(\pi)$ niet gedefinieerd is, waarvoor overigens ook geldt dat $r(\pi) < 0$. Net zoals bij een ellips is de x -coördinaat van het centrum en de halve lange as a , respectievelijk gelijk aan $x_c = \frac{ek}{2E}$ en $a = \frac{k}{2E}$ want a is positief.

Bovendien geldt voor de brandpunten van de hyperbool dat $(x_c \pm ea, 0)$. Met andere woorden, de brandpunten zijn $(0, 0)$ en $(\frac{ek}{E}, 0)$.

De top van de linkerhyperbool is $r(0)$, immers voor $E > 0$ en $k > 0$ geldt

$$\begin{aligned} 2EL^2 < mk^2e + mk^2 + 2EL^2 &\implies 2EL^2 < mk^2e(1+e) \implies \\ \frac{L^2}{mk(1+e)} < \frac{ek}{2E} &\implies r(0) < x_c. \end{aligned}$$

Het brandpunt van de linkertak van de hyperbool is $(0, 0)$ vanwege $\frac{ek}{2E} > 0$. \square

4.3.5 Rechtersak van de hyperbool

De energievergelijking (1.20) voor $n = -2$, waarbij $k < 0$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} > 0.$$

Bewering 4.6 Als $E > 0$ en $k < 0$ geldt, dan beschrijft (4.11) de rechtersak van de hyperbool met brandpunt in $(-\frac{ek}{E}, 0)$ en minimum afstand tot de oorsprong gelijk aan $r(0) = \frac{L^2}{mk(1-e)}$.

Bewijs. Neem aan dat $E > 0$ en $k < 0$. Dan geldt voor de excentriciteit dat

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} > \sqrt{1} = 1.$$

Hieruit volgt dat (4.11) een hyperbool beschrijft met een brandpunt in $(0, 0)$ vanwege Lemma 4.1.iv. Analogoos aan Bewering 4.5 geldt dat de baan een liggende hyperbool is en dat $r(0)$ de top is van de hyperbool.

We kunnen $r(\theta)$ ook afleiden van de tweede orde differentiaalvergelijking (2.2), waarbij geldt dat $v = r^{-1}$. Substitueren van $n = -2$ geeft

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + v = \frac{mk}{L^2} \implies v(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{mk}{L^2}, \quad (4.14)$$

waarbij $A \in \mathbb{R}$ een constante is. Uit (4.14) en $v = r^{-1}$ volgt dat

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{mk}}{1 + \frac{AL^2}{mk} \cos \theta} = \frac{-\frac{L^2}{mk}}{-\frac{AL^2}{mk} \cos \theta - 1}.$$

Dan geldt vanwege (4.11) dat $e = \frac{AL^2}{mk}$. Met andere woorden, de baanvergelijking (4.11), waarbij $k < 0$, is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{-\eta}{e \cos \theta - 1}. \quad (4.15)$$

Voor $k < 0$ geldt dat $-\eta > 0$ en vanwege $r(\theta) \geq 0$ moet $e \cos \theta - 1 > 0$ en $e > 0$ gelden. Dus bestaat er alleen een oplossing als $\theta < \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$ en geldt $\theta = \arccos\left(\frac{1}{e}\right)$ voor de asymptoot.

De top van de rechters tak van de hyperbool is $r(0)$, immers voor $E > 0$ en $k < 0$ geldt

$$\begin{aligned} -2EL^2 > mk^2(1 - e) - 2EL^2 &\implies -2EL^2 > -mk^2(e^2 - e) \implies \\ \frac{-L^2}{mk(e - 1)} > \frac{-ek}{2E} &\implies r(0) > x_c. \end{aligned}$$

Het brandpunt van de rechters tak van de hyperbool is $\left(\frac{-ek}{2E}, 0\right)$ vanwege $\frac{ek}{2E} < 0$. □

4.3.6 Het geval $k = 0$

De energievergelijking (1.20) voor $n = -2$, waarbij $k = 0$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} > 0.$$

Bewering 4.7 Als $E > 0$ en $k = 0$, dan geldt dat (4.11) een rechte lijn beschrijft.

Bewijs. Neem aan dat $E > 0$ en $k = 0$. We verwachten dat de baanvergelijking (4.11) een rechte lijn beschrijft wegens dat de kracht gelijk is aan nul. Hierdoor werken er geen uitwendige krachten op het deeltje. Dus vanwege de *Eerste wet van Newton* geldt dat het deeltje in een rechte lijn beweegt of stilstaat.

De baanvergelijking (4.11), waarbij $E > 0$ en $k = 0$, in termen van poolcoördinaten en in Cartesische coördinaten is respectievelijk gelijk aan

$$r = \frac{L}{\sqrt{2mE} \cos(\theta)} \implies x = \frac{L}{\sqrt{2mE}}. \quad (4.16)$$

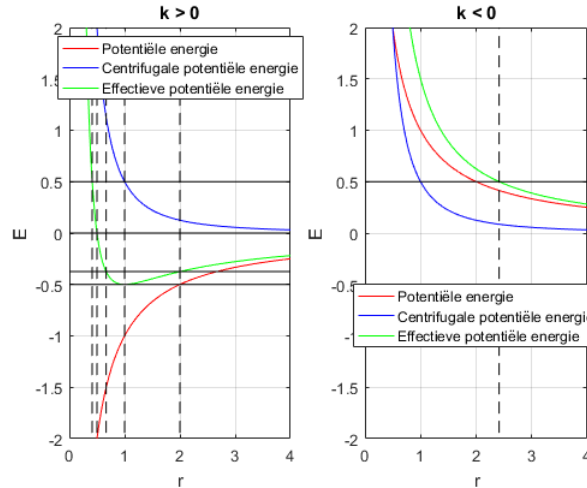
Dus de baanvergelijking beschrijft een lijn en alleen voor $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ is er een oplossing vanwege $r(\theta) \geq 0$. □

De volgende beweringen kunnen we concluderen door middel van Bewering 4.7 en de baanvergelijking (4.11):

- i) Als het deeltje, vanuit zijn radiële beginpositie $r_0 > \frac{L}{\sqrt{2mE}}$, naar de oorsprong toe beweegt met radiële beginsnelheid $\dot{r}(0) < 0$, dan beweegt het tot zijn minimum $\frac{L}{\sqrt{2mE}}$ om vervolgens naar oneindig toe te bewegen.
- ii) Als het deeltje, vanuit zijn radiële beginpositie $r_0 > \frac{L}{\sqrt{2mE}}$, van de oorsprong af beweegt met radiële beginsnelheid $\dot{r}(0) > 0$, dan beweegt het direct naar oneindig toe.

4.4 Energie in kaart

In Figuur [2] zijn de effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$, de potentiële energie $V(r)$ en de centrifugale potentiële energie $\frac{L^2}{2mr^2}$ in kaart gebracht voor de twee gevallen $k > 0$ en $k < 0$. Het verschil tussen de totale energie E en $V_{eff}(r)$ is gelijk aan de effectieve kinetische energie $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Met andere woorden, alleen als E groter gelijk is aan $V_{eff}(r)$ bestaat er een baan.



Figuur 2: De verschillende soorten energiën, waarbij de energievergelijking gelijk is aan $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ en de centrale kracht gelijk is aan $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$.

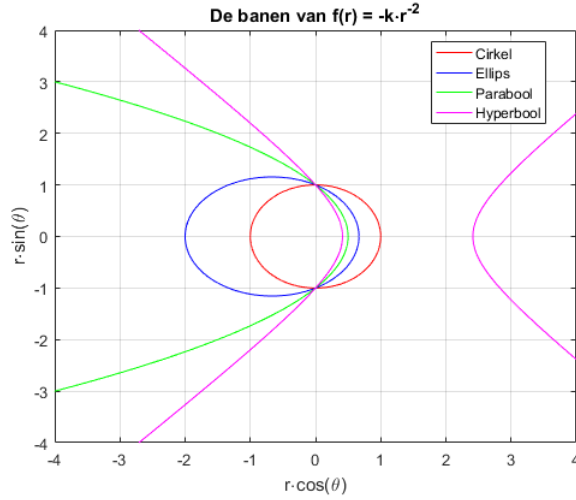
4.5 Banen in kaart

De baanvergelijking (4.11), waarbij $n = -2$, is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{mk}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

waarbij $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$ de excentriciteit is. Als $k > 0$, dan beschrijft (4.11) cirkels, ellipsen, parabolen en de linkertakken van hyperbolen. Als $k < 0$, dan beschrijft (4.11) de rechtertakken van hyperbolen.

In Figuur [3] zijn de banen in kaart gebracht voor $k \neq 0$.



Figuur 3: De banen voor de aantrekkende- en afstotende kracht, waarbij de baanvergelijking gelijk is aan $r(\theta) = \frac{L^2}{1+e \cos(\theta-\theta_0)}$ met $\theta_0 = 0$.

De ontsnappingssnelheid van planeten is de snelheid die nodig is om van de aantrekking van de zon te ontsnappen. Met andere woorden, wanneer de ellipsbaan een parabool wordt. Voor parabolen geldt $E = 0$. Vanwege de energievergelijking geldt dan voor de ontsnappingssnelheid \dot{r}_e dat

$$\frac{1}{2}m\dot{r}_e^2 - \frac{k}{r} = 0 \implies \dot{r}_e^2 = \frac{2GM_\odot}{r}.$$

Dus als $|\dot{r}| \geq \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r}}$, dan ontsnapt de planeet van de aantrekking van de zon.

Bovendien kunnen we concluderen dat de baan een ellips (met speciaal geval cirkel), parabool of hyperbool beschrijft wanneer respectievelijk geldt dat \dot{r}^2 kleiner, gelijk of groter is dan $\frac{2GM_\odot}{r}$.

5 De wet van Hooke

In dit hoofdstuk bespreken we het geval $n = 1$. Voor de *Wet van Hooke* geldt dat de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ en bijbehorende potentiële energie $V(r)$ respectievelijk gelijk zijn aan

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -kr\vec{e}_r, \quad V(r) = \frac{k}{2}r^2,$$

waarbij $k \in \mathbb{R}$ een constante is. Merk op dat de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ voldoet aan de vergelijking van centrale krachten (2.1), waarbij $n = 1$ geldt. In [Whittaker, 1917] wordt onder andere de centrale kracht voor $n = 1$ besproken.

Een toepassing van deze kracht is op de uitrekking van een veer. De veerconstante k , met dimensie $[\frac{N}{m}]$, is een maat voor de stijfheid van de veer. Als de veerconstante positief is, dan is de kracht aantrekkend. Indien de veerconstante negatief is, dan is de kracht afstotend. Hooke heeft de aantrekkende kracht beschouwd.

5.1 Baanvergelijking

In Hoofdstuk 3 is de eerste orde differentiaalvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ uitgewerkt, waardoor het direct duidelijk wordt welke substitutie moet worden toegepast om de baan te bepalen. Bovendien geeft $\frac{dr}{d\theta}$ de meeste informatie over de baan vanwege de constanten E en L . Dus de voorkeur gaat naar de baanvergelijking (3.1).

De baanvergelijking (3.1) voor $n = 1$, waarbij $v = r^{-2}$, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \mp \frac{1}{2} \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}v - \frac{mk}{L^2} - v^2}}. \quad (5.1)$$

De onbepaalde integraal van (5.1) is van de standaardvorm

$$\int \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2 + \beta v + \gamma}} = \frac{-1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right), \quad (5.2)$$

waarbij de constanten gelijk zijn aan

$$\alpha = -1, \quad \beta = \frac{2mE}{L^2}, \quad \gamma = -\frac{mk}{L^2}. \quad (5.3)$$

De formule (5.2) is van toepassing mits $\alpha < 0$. Het toepassen van deze integratie in (5.1) geeft

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right). \quad (5.4)$$

Vervolgens (5.1) oplossen voor v geeft

$$\begin{aligned}\cos(2\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \cos\left(\pm \arccos\left(-\frac{\beta + 2\alpha v}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)\right) \implies \\ \cos(2\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= -\frac{\beta + 2\alpha v}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \implies \\ v &= -\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cos(2\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) - \frac{\beta}{2\alpha}.\end{aligned}$$

Substitueren van $v = r^{-2}$ en de constanten in (5.3) geeft

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^2 E^2}{L^4} - \frac{4mk}{L^2}} \cos(2(\theta - \theta_0)) + \frac{2mE}{2L^2} \implies \\ r^2 &= \frac{\frac{L^2}{mE}}{1 + \sqrt{1 - \frac{kL^2}{mE^2}} \cos(2(\theta - \theta_0))} = \eta.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de oplossingen gelijk zijn aan $r = \pm\sqrt{\eta}$. Wegens definitie geldt $r \geq 0$, dus de baanvergelijking is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{mE + \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2} \cos(2(\theta - \theta_0))}}. \quad (5.5)$$

5.2 Kegelsneden

Lemma 5.1 De kegelsneden met het centrum in $(0, 0)$ zijn te noteren in termen van Cartesische coördinaten als de algemene vergelijking

$$\alpha x^2 + \gamma xy + \beta y^2 = 1, \quad (5.6)$$

waarbij $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ constanten zijn, en α, β of γ ongelijk nul. Dan geldt dat:

- i) Als $\gamma^2 - 4\alpha\beta < 0$, $\alpha = \beta$ en $\gamma = 0$, dan beschrijft (5.6) een cirkel.
- ii) Als $\gamma^2 - 4\alpha\beta < 0$, dan beschrijft (5.6) een ellips.
- iii) Als $\gamma^2 - 4\alpha\beta = 0$ en α, β of γ gelijk nul, dan beschrijft (5.6) een parabool.
- iv) Als $\gamma^2 - 4\alpha\beta > 0$, dan beschrijft (5.6) een hyperbool.

Bovendien weergeeft γ de rotatie van de assen van de kegelsnede. Zo geldt voor $\gamma = 0$ dat de assen van de kegelsnede parallel lopen ten opzichte van de x-as en y-as.

Allereerst zal worden aangetoond dat de baanvergelijking (5.5) kegelsneden beschrijft. Vervolgens worden de drie gevallen voor de veerconstante k besproken:

- i) Het geval $k > 0$, waardoor de kracht $\vec{F}(\vec{r}) = -kr\vec{e}_r$ aantrekkend is.
- ii) Het geval $k < 0$, waardoor de kracht $\vec{F}(\vec{r}) = -kr\vec{e}_r$ afstotend is.
- iii) Het geval $k = 0$, waardoor de kracht $\vec{F}(\vec{r}) = -kr\vec{e}_r$ gelijk is aan nul.

Bewering 5.1 De baanvergelijking (5.5) beschrijft cirkels, ellipsen en hyperbolen.

Bewijs. De vergelijking (5.5) zal genoteerd worden in de standaardvorm van kegelsneden in Cartesische coördinaten met behulp van poolcoördinaten.

Neem aan dat $m^2E^2 - mkL^2 \geq 0$ want anders is (5.5) ongedefinieerd. Voor de minimale- respectievelijk de maximale waarde van $r(\theta)$ geldt dat $\theta = 0$ respectievelijk $\theta = \frac{\pi}{2}$ vanwege de keuze $\theta_0 = 0$. In termen van poolcoördinaten geldt dat

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r^2 \cos(2\theta) = x^2 - y^2.$$

Substitueren in (5.5) geeft

$$r^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{kL^2}{mE^2}} \cos(2\theta) \right) = \frac{L^2}{mE} \implies$$

$$x^2 + y^2 + \sqrt{1 - \frac{kL^2}{mE^2}} (x^2 - y^2) = \frac{L^2}{mE}.$$

Hieruit volgt dat (5.5) genoteerd kan worden in de vorm

$$\frac{(mE + \sqrt{m^2E^2 - mkL^2})}{L^2} x^2 + \frac{(mE - \sqrt{m^2E^2 - mkL^2})}{L^2} y^2 = 1. \quad (5.7)$$

Dus vanwege Lemma 5.1 geldt dat de vergelijking (5.7) ellipsen, cirkels en hyperbolen beschrijft afhankelijk van de constanten E, L, m, k . \square

5.2.1 Het geval $k > 0$

De energievergelijking (1.20) voor $n = 1$, waarbij $k > 0$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2} r^2 \geq V_{eff}(r_*).$$

waarbij $V_{eff}(r_*)$ het minimum is van $V_{eff}(r)$. Immers $E \geq V_{eff}(r)$ vanwege $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$ en voor $n > -3$ geldt dat $V_{eff}(r_*)$ een minimum aanneemt vanwege stabiliteit van cirkelbanen. De stabiliteit van cirkelbanen is besproken in paragraaf 2.2.

Bewering 5.2 Als $E > 0$ en $k > 0$, dan geldt dat (5.7) cirkels en ellipsen beschrijft.

Bewijs. Neem aan dat $E > 0$, $k > 0$ en neem aan dat $m^2E^2 - mkL^2 \geq 0$ want anders is (5.5) ongedefinieerd. Dan geldt dat

$$mE > \sqrt{m^2E^2 - mkL^2} \implies \frac{(mE - \sqrt{m^2E^2 - mkL^2})}{L^2} > 0.$$

Bovendien geldt dat $\frac{1}{L^2} (mE + \sqrt{m^2E^2 - mkL^2}) > 0$.

Dus als $E > 0$ en $k > 0$ geldt, dan beschrijft (5.7) ellipsen vanwege Lemma 5.1.ii. Merk op dat de lange as parallel langs de y -as ligt want $\beta < \alpha$. Bovendien geldt dat de halve lange as b en de halve korte as a respectievelijk gelijk zijn aan,

$$b = \sqrt{\frac{1}{\beta}} = \frac{L}{\sqrt{mE - \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2}}}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{L}{\sqrt{mE + \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2}}}.$$

In het speciale geval geldt $m^2 E^2 - mkL^2 = 0$, oftewel $E = \sqrt{\frac{kL^2}{m}}$, dan is vergelijking (5.7) gelijk aan

$$\frac{mE}{L^2} x^2 + \frac{mE}{L^2} y^2 = 1.$$

Met andere woorden, in het speciale geval $E = \sqrt{\frac{kL^2}{m}}$ geldt dat de vergelijking (5.7) een cirkel beschrijft met middelpunt $(0, 0)$ en straal

$$r = \frac{L}{\sqrt{mE}} = \frac{L}{\sqrt{m\sqrt{\frac{kL^2}{m}}}} = \frac{L}{\sqrt[4]{mkL^2}} = \frac{\sqrt[4]{L^2}}{\sqrt[4]{mk}} = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}},$$

vanwege Lemma 5.1.i. □

Bovendien geldt dat $r_* = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}}$ en $V_{eff}(r_*) = \sqrt{\frac{kL^2}{m}}$ vanwege stabiliteit van cirkelbanen. De stabiliteit van cirkelbanen is besproken in paragraaf 2.2.

5.2.2 Het geval $k < 0$

De energievergelijking (1.20) voor $n = 1$, waarbij $k < 0$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2 \in \mathbb{R}.$$

Bewering 5.3 Als $E \in \mathbb{R}$ en $k < 0$, dan geldt dat (5.7) hyperbolen beschrijft.

Bewijs. Neem aan dat $k < 0$. Allereerst stellen we $E \in \mathbb{R}^\bullet$, dan geldt dat

$$mE = \sqrt{m^2 E^2} < \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2}. \quad (5.8)$$

Hieruit volgt dat

$$mE - \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2} < 0 \implies -\left(mE - \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2}\right) > 0.$$

Merk op dat $mE + \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2} > 0$ direct volgt voor $E > 0$. Bovendien volgt uit (5.8) ook dat $mE + \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2} > 0$ voor $E < 0$.

Dus voor $E \in \mathbb{R}^\bullet$ is de vergelijking (5.7) gelijk aan

$$\frac{(mE + \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2})}{L^2} x^2 - \frac{(\sqrt{m^2 E^2 - mkL^2} - mE)}{L^2} y^2 = 1. \quad (5.9)$$

Ten slotte stellen we $E = 0$, dan is de vergelijking (5.7) gelijk aan

$$\frac{\sqrt{-mkL^2}}{L^2}x^2 - \frac{\sqrt{-mkL^2}}{L^2}y^2 = 1. \quad (5.10)$$

Dus als $E \in \mathbb{R}$ en $k < 0$ geldt, dan beschrijft (5.7) hyperbolen vanwege Lemma 5.1.iv. \square

Vanwege $r(\theta) \geq 0$ moet gelden dat $\sqrt{mE + \sqrt{m^2E^2 - mkL^2} \cos(2\theta)} > 0$ in de baanvergelijking (5.5). Dus er bestaat alleen een oplossing voor $|\theta| < \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{-mE}{\sqrt{m^2E^2 - mkL^2}}\right)$. Hieruit volgt dat de top $r(\frac{\pi}{2})$, waarvoor overigens ook geldt dat $r(\frac{\pi}{2}) < 0$, niet gedefinieerd is maar $r(0)$ wel.

Vanwege Bewering 5.1.iv geldt dat (5.5) een hyperbool beschrijft met het centrum in $(0,0)$. Aangezien $r(0) > 0$ geldt dat (5.5) de rechtertak van de hyperbool beschrijft met top $r(0) > 0$. Daarnaast wordt de tweede tak van de hyperbool wel beschreven maar omdat $r(\theta) = r(\theta + \pi)$ en de takken symmetrisch liggen is er geen onderscheid te maken tussen beide takken.

5.2.3 Het geval $k = 0$

De energievergelijking (1.20) voor $n = 1$, waarbij $k = 0$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} > 0.$$

Bewering 5.4 Als $E > 0$ en $k = 0$, dan beschrijft (5.7) twee rechte lijnen.

Bewijs. Neem aan dat $k = 0$ en $E > 0$. We verwachten dat de baanvergelijking (5.7) een rechte lijn beschrijft wegens dat de kracht gelijk is aan nul waardoor er geen uitwendige krachten op het deeltje werken dus vanwege de *Eerste wet van Newton*, $m\ddot{r} = 0$, geldt dat het deeltje in een rechte lijn beweegt of stilstaat.

De vergelijking (5.7), waarbij $E > 0$ en $k = 0$, is in Cartesische coördinaten gelijk aan

$$\frac{2mE}{L^2}x^2 = 1 \implies x_+ = \frac{L}{\sqrt{2mE}}, \quad x_- = -\frac{L}{\sqrt{2mE}}. \quad (5.11)$$

In termen van poolcoördinaten is (5.11) gelijk aan

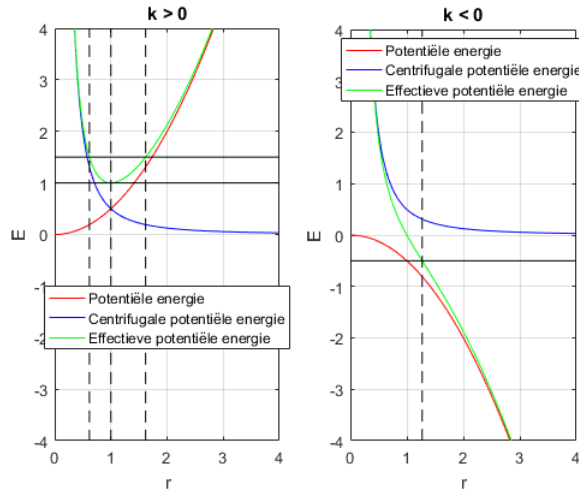
$$r_+ = \frac{L}{\sqrt{2mE} \cos \theta}, \quad r_- = -\frac{L}{\sqrt{2mE} \cos \theta}. \quad (5.12)$$

Als $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, oftewel $\cos(\theta) > 0$, geldt dan beschrijft r_+ de baan. Bovendien, als $|\theta| > \frac{\pi}{2}$, oftewel $\cos(\theta) < 0$, geldt, dan beschrijft r_- de baan vanwege $r \geq 0$. Dus de baanvergelijking beschrijft twee lijnen. \square

De conclusie over de beweging van het deeltje staat beschreven in paragraaf 4.3.6.

5.3 Energie in kaart

In Figuur [4] zijn de effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$, de potentiële energie $V(r)$ en de centrifugale potentiële energie $\frac{L^2}{2mr^2}$ in kaart gebracht voor de twee gevallen $k > 0$ en $k < 0$.



Figuur 4: De verschillende soorten energieën, waarbij de energievergelijking gelijk is aan $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2}$ en de centrale kracht gelijk is aan $\vec{F}(\vec{r}) = -kr\vec{e}_r$.

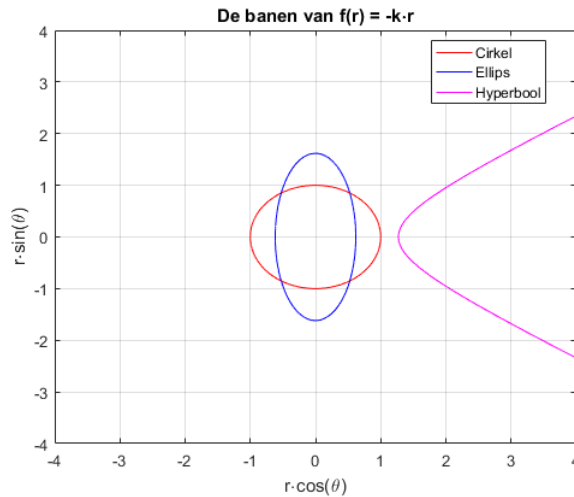
5.4 Banen in kaart

De baanvergelijking (5.5) is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{mE + \sqrt{m^2E^2 - mkL^2} \cos(2(\theta - \theta_0))}}.$$

Als de kracht aantrekkend is, dan beschrijft (5.5) ellipsen met als speciaal geval een cirkel. Als de kracht afstotend is, dan beschrijft (5.5) de rechte takken van hyperbolen.

In Figuur [5] zijn de banen van $r(\theta)$, waarbij $\theta_0 = 0$, in kaart gebracht voor $k \neq 0$.



Figuur 5: De banen voor de aantrekkende- en afstotende kracht, waarbij de baanvergelijking gelijk is aan $r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{mE + \sqrt{m^2 E^2 - mkL^2} \cos(2(\theta - \theta_0))}}$ met $\theta_0 = 0$.

Als we de aantrekkende kracht beschouwen, dan kunnen we concluderen:

- i) Als $r_0 = \sqrt[4]{\frac{L^2}{mk}}$ en $\dot{r}(0) = 0$, dan beweegt het deeltje in een cirkel om de oorsprong.
- ii) Als $0 < r_0 \leq a$ en $\dot{r}(0) \neq 0$ begrensd, dan beweegt het deeltje in een ellipsbaan om de oorsprong.

Als het deeltje verbonden is met de veer, dan geldt ofwel dat het stil ligt ofwel dat het beweegt tussen $0 < r_0 \leq a$. Met andere woorden, de uitrekking is begrensd.

Als we de afstotende kracht beschouwen, dan kunnen we concluderen:

- i) Als het deeltje vanuit zijn beginpositie $r_0 > r(0)$ beweegt met $\dot{r}(0) < 0$ eindig, dan komt het eerst langs zijn minimum $r(0)$ om vervolgens naar oneindig toe te bewegen.
- ii) Als het deeltje vanuit zijn beginpositie $r_0 \geq r(0)$ beweegt met $\dot{r}(t_0) > 0$ eindig, dan beweegt het direct naar oneindig toe.
- iii) Het deeltje krijgt een oneindige radiële snelheid mits het naar oneindig toe beweegt.

6 De centrale kracht voor $n = -3$

In dit hoofdstuk bespreken we het geval $n = -3$. De centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ en bijbehorende potentiële energie $V(r)$ zijn gelijk aan

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{e}_r, \quad V(r) = -\frac{k}{2r^2},$$

waarbij $k \in \mathbb{R}$ een constante is. Merk op dat de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ voldoet aan de vergelijking van centrale krachten (2.1), waarbij $n = -3$ geldt. In [Whittaker, 1917] wordt onder andere de centrale kracht voor $n = -3$ besproken.

6.1 Baan- en energievergelijking

In Hoofdstuk 3 is de eerste orde differentiaalvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ uitgewerkt, waardoor het direct duidelijk wordt welke substitutie moet worden toegepast om de baan te bepalen. Bovendien geeft $\frac{dr}{d\theta}$ de meeste informatie over de baan vanwege de constanten E en L . Dus de voorkeur gaat naar de baanvergelijking (3.1).

De baanvergelijking (3.1) voor $n = -3$, waarbij $v = r^{-1}$, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \mp \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{mk}{L^2} - 1\right)v^2}}. \quad (6.1)$$

6.1.1 Het geval $L^2 > mk$

De energievergelijking (1.20) voor $n = -3$, waarbij $L^2 > mk$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{L^2 - mk}{2mr^2} > 0. \quad (6.2)$$

De onbepaalde integraal van (6.1) is van de standaardvorm

$$\int \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2 + \beta v + \gamma}} = \frac{-1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right), \quad (6.3)$$

waarbij de constanten gelijk zijn aan

$$\alpha = \frac{mk}{L^2} - 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{2mE}{L^2}. \quad (6.4)$$

De formule (6.3) is van toepassing mits $L^2 - mk > 0$ en $E > 0$. Het toepassen van deze integratie in (6.1) geeft

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right). \quad (6.5)$$

Vervolgens (6.5) oplossen voor v geeft

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \cos\left(\pm \arccos\left(-\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)\right) \implies \\ \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= -\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \implies \\ v &= -\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) - \frac{\beta}{2\alpha}.\end{aligned}$$

Substitueren van $v = r^{-1}$ en de constanten in (6.4) geeft

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{\frac{2}{L^2} \sqrt{2mE} \sqrt{L^2 - mk}}{\frac{2}{L^2} (L^2 - mk)} \cos\left(\frac{\sqrt{L^2 - mk}}{L}(\theta - \theta_0)\right) \implies \\ \frac{1}{r} &= \frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{L^2 - mk}} \cos\left(\sqrt{1 - \frac{mk}{L^2}}(\theta - \theta_0)\right).\end{aligned}$$

Dus de baanvergelijking is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{L^2 - mk}}{\sqrt{2mE} \cos\left(\sqrt{1 - \frac{mk}{L^2}}(\theta - \theta_0)\right)}. \quad (6.6)$$

6.1.2 Het geval $L^2 < mk$

De energievergelijking (1.20) voor $n = -3$, waarbij $L^2 < mk$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2 - mk}{2mr^2} \in \mathbb{R}. \quad (6.7)$$

De onbepaalde integraal van (6.1) is van de standaardvorm

$$\int \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2 + \beta v + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right), \quad (6.8)$$

waarbij de constanten gelijk zijn aan

$$\alpha = \frac{mk}{L^2} - 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{2mE}{L^2}. \quad (6.9)$$

De formule (6.8) is van toepassing mits $L^2 < mk$ en $E < 0$. Het toepassen van deze integratie in (6.1) geeft

$$\theta - \theta_0 = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right). \quad (6.10)$$

Vervolgens (6.10) oplossen voor v geeft

$$\begin{aligned}\cosh(\sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \cosh\left(\mp \operatorname{arccosh}\left(\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)\right) \implies \\ \cosh(\sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \implies \\ v &= \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cosh(\sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0)) - \frac{\beta}{2\alpha}.\end{aligned}$$

Substitueren van $v = r^{-1}$ en de constanten in (6.9) geeft

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{-2mE}{mk - L^2}} \cosh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right).$$

Dus de baanvergelijking is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{mk - L^2}}{\sqrt{-2mE} \cosh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right)}. \quad (6.11)$$

Vervolgens bespreken we het geval $E > 0$.

De onbepaalde integraal van (6.1) is van de standaardvorm

$$\int \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^2 + \beta v + \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}\right), \quad (6.12)$$

waarbij de constanten gelijk zijn aan

$$\alpha = \frac{mk}{L^2} - 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{2mE}{L^2}. \quad (6.13)$$

De formule (6.8) is van toepassing mits $L^2 < mk$ en $E > 0$. Het toepassen van deze integratie in (6.1) geeft

$$\theta - \theta_0 = \mp \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}\right). \quad (6.14)$$

Vervolgens (6.14) oplossen voor v geeft

$$\begin{aligned} \sinh(\sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \mp \sinh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}\right)\right) \implies \\ \mp \sinh(\sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \frac{2\alpha v + \beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}} \implies \\ v &= \mp \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\alpha} \sinh(\sqrt{\alpha}(\theta - \theta_0)) - \frac{\beta}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Substitueren van $v = r^{-1}$ en (6.13) geeft

$$\frac{1}{r} = \mp \sqrt{\frac{2mE}{mk - L^2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right).$$

Dus de twee oplossingen van de baanvergelijking zijn gelijk aan

$$r_-(\theta) = \frac{-\sqrt{mk - L^2}}{\sqrt{2mE} \sinh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right)}, \quad r_+(\theta) = \frac{\sqrt{mk - L^2}}{\sqrt{2mE} \sinh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right)}, \quad (6.15)$$

waarbij $r_-(\theta)$ respectievelijk $r_+(\theta)$ geldt voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$.

Ten slotte bespreken we het geval $E = 0$.

De baanvergelijking (6.1), waarbij $L^2 < mk$, gelijk is aan

$$\theta - \theta_0 = \mp \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{mk}{L^2} - 1\right) v^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}. \quad (6.16)$$

De oplossing van (6.16) volgt direct en is gelijk aan

$$v = v_0 \cdot \exp\left(\mp \sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right).$$

Substitutie van $v = r^{-1}$ geeft de twee baanvergelijkingen, die gelijk zijn aan

$$r_+(\theta) = r_0 \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right), \quad r_-(\theta) = r_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right). \quad (6.17)$$

Merk op dat $r_+(\theta)$ respectievelijk $r_-(\theta)$ geldt voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ op $t = 0$.

6.1.3 Het geval $L^2 = mk$

De energievergelijking (1.20) voor $n = -3$, waarbij $L^2 = mk$, is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - mk}{2mr^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0. \quad (6.18)$$

De baanvergelijking (6.1), waarbij $L^2 = mk$ geldt, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \mp \int_{v_0}^v \frac{L}{\sqrt{2mE}} dv. \quad (6.19)$$

De oplossing van (6.19) volgt direct en is gelijk aan

$$v = -\frac{\sqrt{2mE}}{L}(\theta - \theta_0) + v_0, \quad v = \frac{\sqrt{2mE}}{L}(\theta - \theta_0) + v_0.$$

Substitutie van $v = r^{-1}$ geeft de twee oplossingen, die gelijk zijn aan

$$r_-(\theta) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2mE}}{L}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_0}}, \quad r_+(\theta) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2mE}}{L}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_0}}. \quad (6.20)$$

Merk op dat $r_-(\theta)$ respectievelijk $r_+(\theta)$ geldt voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$. Voor het speciale geval $E = 0$ geldt dat de radiële snelheid gelijk is aan nul, oftewel $\dot{r} = 0$. Substitueren van $E = 0$ in (6.20) geeft

$$r(\theta) = r_0. \quad (6.21)$$

Dus de baanvergelijking (6.1) beschrijft een cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal $r = r_0 > 0$ mits $L^2 = mk$ en $E = 0$. Merk op dat iedere (positieve) straal van de cirkel is toegestaan.

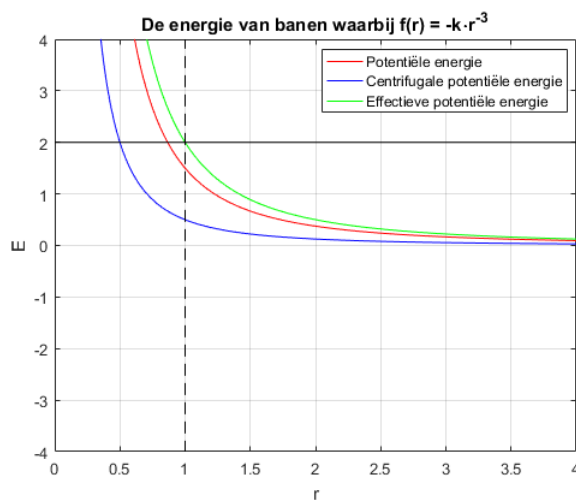
6.2 Energie in kaart

We bespreken wat de voorwaarden zijn voor de drie verschillende energieën voor de drie gevallen: $L^2 > mk$, $L^2 < mk$ en $L^2 = mk$.

6.2.1 Het geval $L^2 > mk$

Vanwege de energievergelijking (6.2) geldt dat $E > 0$ mits $L^2 > mk$ en $n = -3$.

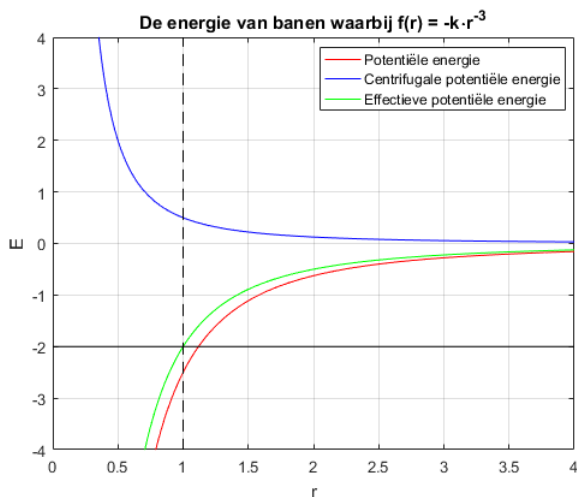
In Figuur [6] zijn de effectieve potentiële energie $V_{eff}(r)$, de potentiële energie $V(r)$ en de centrifugale potentiële energie $\frac{L^2}{2mr^2}$ in kaart gebracht.



Figuur 6: De verschillende soorten energieën, waarbij de energievergelijking gelijk is aan $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - mk}{2mr^2} > 0$ vanwege $L^2 > mk$.

6.2.2 Het geval $L^2 < mk$

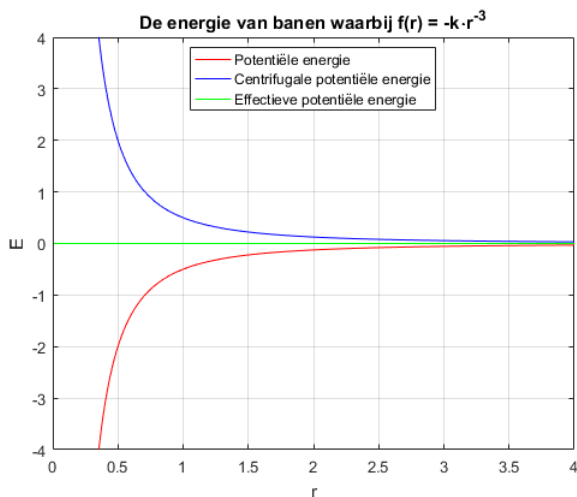
Vanwege de energievergelijking (6.7) geldt dat $E \in \mathbb{R}$ mits $L^2 < mk$ en $n = -3$. In Figuur [7] zijn de verschillende soorten energieën in kaart gebracht.



Figuur 7: De verschillende soorten energieën, waarbij de energievergelijking gelijk is aan $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - mk}{2mr^2} \in \mathbb{R}$ vanwege $L^2 < mk$.

6.2.3 Het geval $L^2 = mk$

Vanwege de energievergelijking (6.18) geldt dat $E \geq 0$ mits $L^2 = mk$ en $n = -3$. In Figuur (8) zijn de verschillende soorten energieën in kaart gebracht.



Figuur 8: De verschillende soorten energieën, waarbij de energievergelijking gelijk is aan $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2 - mk}{2mr^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ vanwege $L^2 = mk$.

6.3 Banen en windingen in kaart

6.3.1 Het geval $L^2 > mk$

De baanvergelijking (6.6), waarbij $L^2 > mk$ en $E > 0$, is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{L^2 - mk}}{\sqrt{2mE} \cos\left(\sqrt{1 - \frac{mk}{L^2}}(\theta - \theta_0)\right)}.$$

Allereerst beschouwen het geval dat $k < \frac{L^2}{m}$ met $k \neq 0$.

Definitie 6.1 Een rooskromme is in termen van poolcoördinaten van de vorm

$$r_\rho = \eta \cos(\kappa\theta), \quad (6.22)$$

waarbij $\eta, \kappa \in \mathbb{R}$ constanten zijn. Dan geldt dat

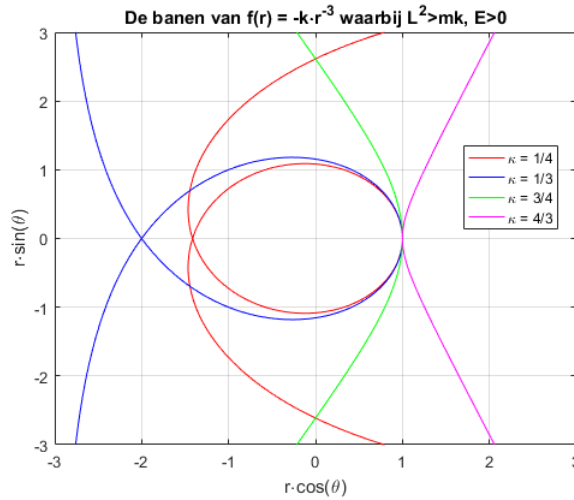
- i) het maximum van r_ρ is gelijk aan η voor $\theta = \frac{2\pi n}{\kappa}, n \in \mathbb{Z}$;
- ii) voor de nulpunten van r_ρ geldt dat $\theta = \frac{\pi}{2\kappa} + \frac{\pi n}{\kappa}, n \in \mathbb{Z}$.

Vanwege Definitie 6.1 is de baanvergelijking (6.6) de inverse van een rooskromme, oftewel een epispiraal, van de vorm

$$r_\rho = \frac{\eta}{\cos(\kappa\theta)}, \quad \eta = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}, \quad \kappa = \sqrt{1 - \frac{mk}{L^2}}.$$

Vanwege Definitie 6.1.ii geldt voor de asymptoot van de baan dat $\theta = \frac{\pi}{2\kappa}$. Dus alleen voor $|\theta| < \frac{\pi}{2\kappa}$ bestaat er een oplossing. Hieruit volgt met Definitie 6.1.i dat de baan een minimum aanneemt in $r(0) = \frac{1}{\eta}$.

In Figuur [9] zijn de banen in kaart gebracht voor $L^2 > mk$ en $E > 0$.



Figuur 9: De banen waarbij $L^2 > mk$, $E = \frac{\kappa^2 L^2}{2m} > 0$ en $\theta \in (-\frac{\pi}{2\kappa}, \frac{\pi}{2\kappa})$.

Ten slotte beschouwen het geval dat $k = 0$ en $L \neq 0$. We verwachten dat de baanvergelijking (4.11) een rechte lijn beschrijft wegens dat de kracht gelijk is aan nul. Hierdoor werken er geen uitwendige krachten op het deeltje. Dus vanwege de *Eerste wet van Newton* geldt dat het deeltje in een rechte lijn beweegt of stilstaat.

De baanvergelijking (6.6), waarbij $L^2 > mk$ en $k = 0$, is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{L}{\sqrt{2mE} \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (6.23)$$

Aangezien de baanvergelijking (6.23) hetzelfde is als de baanvergelijking (4.16) geldt dat (6.23) een lijn beschrijft zoals besproken is in paragraaf 4.3.6.

6.3.2 Het geval $L^2 < mk$

De baanvergelijking (6.11), waarbij $L^2 < mk$ en $E < 0$, is gelijk aan

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{mk - L^2}}{\sqrt{-2mE} \cosh\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right)}.$$

Definitie 6.2 Een Poincot-spiraal is in termen van poolcoördinaten van de vorm

$$r_{\cosh} = \frac{\eta}{\cosh(\kappa\theta)} \quad \text{of} \quad r_{\sinh} = \frac{\eta}{\sinh(\kappa\theta)}, \quad (6.24)$$

waarbij $\eta, \kappa \in \mathbb{R}$ constanten zijn. Dan geldt dat

- i) het maximum van r_{\cosh} is gelijk aan η voor $\theta = 0$;
- ii) $\lim_{\theta \rightarrow 0} r_{\sinh} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\sinh(\kappa\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\eta}{e^{-\kappa\theta} - e^{\kappa\theta}} = \infty$;
- iii) $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r_{\cosh} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta}{\cosh(\kappa\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \frac{2\eta}{e^{-\kappa\theta} + e^{\kappa\theta}} = 0$;
- iv) $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r_{\sinh} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta}{\sinh(\kappa\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \frac{2\eta}{e^{-\kappa\theta} - e^{\kappa\theta}} = 0$.

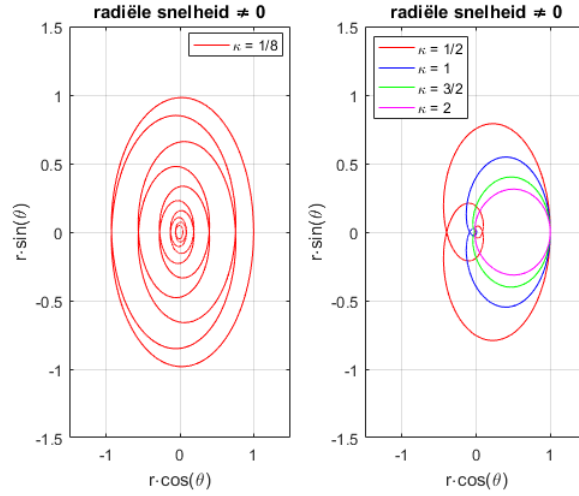
Vanwege Definitie 6.2 is de baanvergelijking (6.11) een Poincot-spiraal van de vorm

$$r = \frac{\eta}{\cosh(\kappa\theta)}, \quad \eta = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}.$$

Aangezien $\cosh(\theta) > 0$ voor $\theta \in \mathbb{R}$ bestaat er een oplossing voor alle $\theta \in \mathbb{R}$. Vanwege Definitie 6.2.i neemt de baan een maximum aan in $r(0) = \eta$.

Een winding van een spiraalbeweging ontstaat als $\Delta\theta = 2\pi$. Als het deeltje naar de oorsprong beweegt, dan heeft de baan oneindig veel windingen vanwege Definitie 6.2.iii en dat er oneindig veel $\Delta\theta = 2\pi$ bestaan voor $\theta \rightarrow \infty$.

In Figuur [10] zijn de banen in kaart gebracht voor $L^2 < mk$ en $E < 0$.



Figuur 10: De banen waarbij $L^2 < mk$, $E = -\frac{\kappa^2 L^2}{2m} < 0$ en $\theta \in [-10\pi, 10\pi]$.

De baanvergelijking (6.15), waarbij $L^2 < mk$ en $E > 0$, is gelijk aan

$$r_-(\theta) = \frac{-\sqrt{mk - L^2}}{\sqrt{2mE} \sinh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right)}, \quad r_+(\theta) = \frac{\sqrt{mk - L^2}}{\sqrt{2mE} \sinh\left(\frac{\sqrt{mk - L^2}}{L}(\theta - \theta_0)\right)},$$

waarbij $r_-(\theta)$ respectievelijk $r_+(\theta)$ geldt voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$.

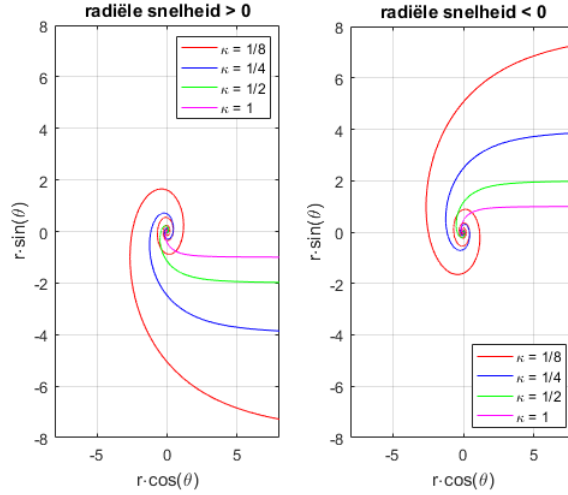
Vanwege Definitie 6.2 is de baanvergelijking (6.15) een Poinsot-spiraal van de vorm

$$r(\theta) = \frac{\pm\eta}{\sinh(\kappa\theta)}, \quad \eta = \sqrt{\frac{mk - L^2}{2mE}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}.$$

Als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$ geldt, dan is $r_-(\theta)$ positief mits $\theta < 0$ aangezien $\sinh(\theta) < 0$ voor $\theta < 0$. Eveneens als $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ geldt, dan is $r_+(\theta)$ positief mits $\theta > 0$ aangezien $\sinh(\theta) > 0$ voor $\theta > 0$. Voor de asymptoot van de baan geldt dat $\theta = 0$. Dus voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ bestaat er een oplossing voor $\theta \in (-\infty, 0)$ respectievelijk $\theta \in (0, \infty)$.

Als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$ geldt, dan heeft de baan eindig veel windingen vanwege Definitie 6.2.ii en dat er eindig veel $\Delta\theta = 2\pi$ bestaan als $\theta \uparrow 0$. Daarentegen als $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ geldt, dan heeft de baan oneindig veel windingen vanwege Definitie 6.2.iv en dat er oneindig veel $\Delta\theta = 2\pi$ bestaan voor $\theta \rightarrow \infty$.

In Figuur [11] zijn de banen in kaart gebracht voor $L^2 < mk$ en $E > 0$.



Figuur 11: De banen waarbij $L^2 < mk$, $E = \frac{\kappa^2 L^2}{2m} > 0$ en voor $\dot{r} > 0$ respectievelijk $\dot{r} < 0$ geldt $\theta \in [-30\pi, 0)$ respectievelijk $\theta \in (0, 30\pi]$.

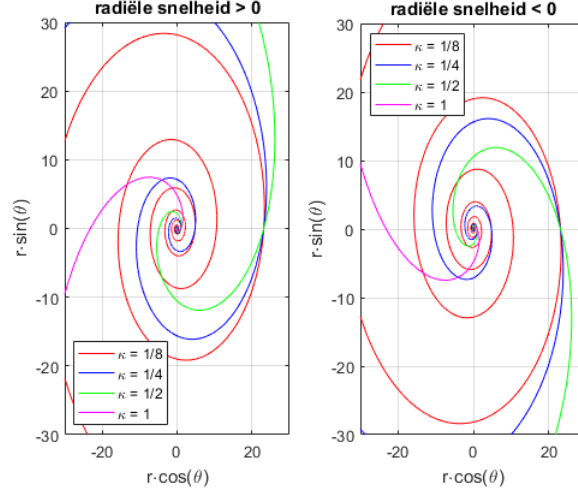
De baanvergelijking (6.17), waarbij $L^2 < mk$ en $E = 0$, is gelijk aan

$$r_+(\theta) = r_0 \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right), \quad r_-(\theta) = r_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{mk}{L^2} - 1}(\theta - \theta_0)\right),$$

waarbij $r_+(\theta)$ respectievelijk $r_-(\theta)$ geldt voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ op $t = 0$.

Aangezien $\exp(\kappa\theta) > 0$ voor $\theta \in \mathbb{R}$ bestaat er een oplossing voor alle $\theta \in \mathbb{R}$. Als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$ geldt, dan heeft de baan oneindig veel windingen omdat voor alle $\theta \in \mathbb{R}$ een oplossing bestaat. Eveneens als $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ geldt, dan heeft de baan om dezelfde reden oneindig veel windingen.

In Figuur [12] zijn de banen in kaart gebracht voor $L^2 < mk$ en $E = 0$.



Figuur 12: De banen waarbij $L^2 < mk$, $E = 0$, $r_0 = 1$ en $\theta \in [-30\pi, 30\pi]$.

6.3.3 Het geval $L^2 = mk$

De baanvergelijking (6.20), waarbij $L^2 = mk$ en $E \geq 0$, is gelijk aan

$$r_-(\theta) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2mE}}{L}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_0}}, \quad r_+(\theta) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2mE}}{L}(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r_0}},$$

waarbij $r_-(\theta)$ respectievelijk $r_+(\theta)$ geldt voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$.

Definitie 6.3 Een Archimediase-spiraal is in termen van poolcoördinaten van de vorm

$$r_{\text{arch}} = \kappa\theta + \eta, \quad (6.25)$$

waarbij $\kappa, \eta \in \mathbb{R}$ constanten zijn. Dan geldt dat

- i) $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\eta}{\kappa}} r_{\text{arch}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \kappa\theta + \eta = 0$ waarbij $\kappa \neq 0$;
- ii) $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r_{\text{arch}} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \kappa\theta + \eta = \pm\infty$ waarbij $\kappa \neq 0$.

Vanwege Definitie 6.3 is de baanvergelijking (6.20) de inverse van een Archimediase-spiraal van de vorm

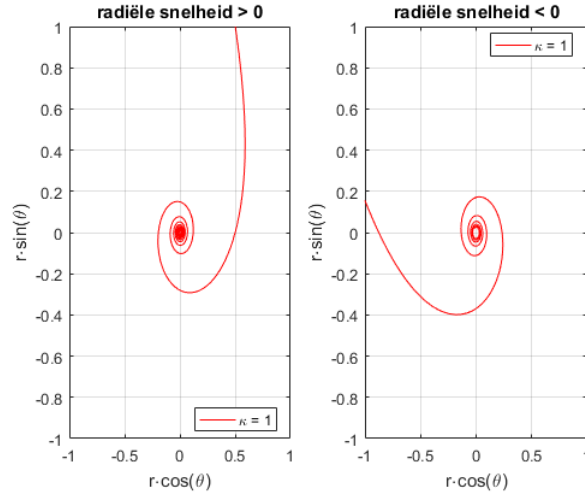
$$r(\theta) = \frac{1}{\mp(\kappa\theta - \eta)}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2mE}}{L}, \quad \eta = \kappa\theta_0 + \frac{1}{r_0}.$$

Als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$ geldt, dan is $r_-(\theta)$ positief mits $\theta < \frac{\eta}{\kappa}$. Eveneens als $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ geldt, dan is $r_+(\theta)$ positief mits $\theta > \frac{\eta}{\kappa}$. Voor de asymptoot van de baan (6.20) geldt $\theta = \frac{\eta}{\kappa}$. Dus voor $\frac{dr}{d\theta} > 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ bestaat er

een oplossing voor $\theta < \frac{\eta}{\kappa}$ respectievelijk $\theta > \frac{\eta}{\kappa}$.

Als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$ geldt, dan heeft de baan eindig veel windingen omdat $r_-(\theta) \rightarrow \infty$ en er bestaan eindig veel $\Delta\theta = 2\pi$ als $\theta \rightarrow 0$. Daarentegen als $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ geldt, dan heeft de baan oneindig veel windingen omdat $r_+(\theta) \rightarrow 0$ als $\theta \rightarrow \infty$ en er bestaan oplossingen voor $\theta > \frac{\eta}{\kappa}$.

In Figuur [13] zijn de banen in kaart gebracht voor $L^2 = mk$ en $E > 0$.



Figuur 13: De banen waarbij $L^2 = mk$, $E = \frac{\kappa^2 L^2}{2m}$, $r_0 = \theta_0 = 1$ en voor $\dot{r} > 0$ respectievelijk $\dot{r} < 0$ geldt $\theta \in [-30\pi, \frac{\eta}{\kappa})$ respectievelijk $\theta \in (\frac{\eta}{\kappa}, 30\pi]$.

Als $\kappa = 0$ geldt, dan is de baan een cirkel waarvoor geldt $r(\theta) = r_0 > 0$. Voor kleine stijgingen in E gaat de baan naar de oorsprong respectievelijk naar oneindig toe voor $\frac{dr}{d\theta} < 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} > 0$. Dus de cirkelbaan is instabiel voor $n = -3$.

6.4 Tijd

Ten slotte bespreken we of het deeltje in eindige- of oneindige tijd in zijn baan beweegt voordat het zijn eindpunt, dat wilt zeggen $r = 0$ of $r = \infty$, heeft bereikt. Daartoe maken we gebruik van de radiële snelheid, die gelijk is aan

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2 - mk}{2mr^2} \right)}, \quad (6.26)$$

vanwege de energievergelijking (1.20) voor $n = -3$.

De radiële versnelling volgt uit (1.13) en is gelijk aan

$$\ddot{r} = \frac{f(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2 r^3} \quad (6.27)$$

De tijd is gelijk aan

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2})}} = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\dot{r}(t)}, \quad (6.28)$$

vanwege de differentiaalvergelijking $\frac{dr}{dt}$ (2.3).

Bewering 6.1 Het deeltje komt in eindige tijd aan in de oorsprong indien het deeltje naar de oorsprong toe beweegt en de absolute waarde van de radiële snelheid van ondere begrensd is.

Bewijs. Als het deeltje naar de oorsprong toe beweegt, dan is de radiële snelheid negatief. Daarbij als de absolute waarde radiële snelheid van ondere begrensd is, dan geldt $|\dot{r}(t)| > C > 0$ met constante $C > 0$. Ten slotte geldt $r_0 > 0$ en $r = 0$ omdat het deeltje naar de oorsprong toe beweegt met de oorsprong als eindpunt. Hieruit volgt in combinatie met de tijd (6.28) dat

$$t - t_0 = - \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\dot{r}(t)} < - \int_{r_0}^0 \frac{dr}{C} = \frac{1}{C} \int_0^{r_0} dr = \frac{r_0}{C} \in \mathbb{R}, \quad (6.29)$$

waarbij $t_0 = 0$ aangezien we de tijd beschouwen op begintijdstip $t_0 = 0$. \square

Bewering 6.2 Het deeltje heeft oneindige tijd nodig om naar oneindig toe te bewegen indien het deeltje van de oorsprong af beweegt en de absolute waarde van de radiële snelheid van ondere begrensd is.

Bewijs. Dit bewijs gaat analoog aan het bewijs van Bewering 6.1 maar dan met de waarden $r_0 = r_0$, $r = \infty$ en $\dot{r} > 0$. De waarden invullen in de vergelijking van de tijd (6.28) geeft

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\dot{r}(t)} < \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{C} = \frac{1}{C} \int_{r_0}^{\infty} dr = \infty, \quad (6.30)$$

waarbij $t_0 = 0$ aangezien we de tijd beschouwen op begintijdstip $t_0 = 0$. Dus het deeltje heeft oneindige tijd nodig om naar oneindig toe te bewegen omdat de afstand oneindig is en de radiële snelheid blijft begrensd. \square

6.4.1 Het geval $L^2 > mk$

In paragraaf 6.2.1 is besproken dat $E > 0$ geldt voor het geval $L^2 > mk$. Bovendien is in paragraaf 6.3.1 besproken dat de baan een minimum heeft in $r = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}$.

Bewering 6.3 De radiële snelheid hangt af van k , E , L en vooral van de afstand r tot de oorsprong:

- i) Als $r = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}$ geldt, dan is $\dot{r} = 0$ en $\ddot{r} \neq 0$.
- ii) Als $r \rightarrow \infty$ geldt, dan volgt $|\dot{r}| \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}E}$, ofwel $|\dot{r}| > C > 0$.

Bewijs. Bewering 6.3 volgt direct door het invullen van $L^2 > mk$ en de waarden van E in de vergelijking voor de radiële snelheid (6.26) en de radiële versnelling (6.27). \square

Het deeltje passeert zijn minimum $r = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}$ vanwege $\ddot{r} \neq 0$. Dus het deeltje beweegt naar oneindig toe in oneindige tijd vanwege Bewering 6.2 ongeacht zijn radiële beginsnelheid.

6.4.2 Het geval $L^2 < mk$

In paragraaf 6.2.2 is besproken dat $E \in \mathbb{R}$ geldt voor het geval $L^2 < mk$. Bovendien is in paragraaf 6.3.2 besproken als $E < 0$, dan heeft de baan een maximum in $r = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}$.

Bewering 6.4 De radiële snelheid hangt af van k, E, L en vooral van de afstand r tot de oorsprong:

- i) Als $r \rightarrow 0$ geldt, dan volgt $\dot{r} \rightarrow -\infty$.
- ii) Als $E < 0$ geldt en $r = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}$, dan is $\dot{r} = 0$ en $\ddot{r} \neq 0$.
- iii) Als $E \geq 0$ geldt en $r \rightarrow \infty$, dan volgt $|\dot{r}| \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}E}$, ofwel $|\dot{r}| > C > 0$.

Bewijs. Bewering 6.4 volgt direct door het invullen van $L^2 < mk$ en de waarden van E in de vergelijking voor de radiële snelheid (6.26) en de radiële versnelling (6.27). \square

Als $E < 0$ geldt, dan passeert het deeltje zijn maximum $r = \sqrt{\frac{L^2 - mk}{2mE}}$ vanwege $\ddot{r} \neq 0$. Bovendien beweegt het deeltje naar de oorsprong toe in eindige tijd vanwege Bewering 6.1 ongeacht zijn radiële beginsnelheid.

Voor de gevallen $E \geq 0$ geldt dat het deeltje naar de oorsprong toe beweegt in eindige tijd respectievelijk naar oneindig toe beweegt in oneindige tijd voor negatief- respectievelijk positief radiële beginsnelheid vanwege Bewering 6.1 en Bewering 6.2.

6.4.3 Het geval $L^2 = mk$

In paragraaf 6.2.3 is besproken dat $E \geq 0$ geldt voor het geval $L^2 = mk$. Bovendien is in paragraaf 6.3.3 besproken als $E = 0$, dan is de baan een cirkel. Dat wilt zeggen, de baan heeft geen eindpunt.

Bewering 6.5 De radiële snelheid is constant en is gelijk aan $\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m}} > 0$.

Bewijs. Bewering 6.5 volgt direct door het invullen van $L^2 = mk$ en de waarden van E in de vergelijking voor de radiële snelheid (6.26). \square

Dus als $E > 0$ geldt, dan beweegt het deeltje naar de oorsprong toe in eindige tijd en naar oneindig toe beweegt in oneindige tijd met constante radiële snelheid $\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ vanwege Bewering 6.1 en 6.2.

6.5 Conclusie beschrijving banen

Als het deeltje naar de oorsprong toe beweegt, met $\dot{r}(0) < 0$, en aankomt, dan heeft het eindige tijd nodig waarbij het deeltje oneindig veel windingen maakt. Als het deeltje van de oorsprong af beweegt, met $\dot{r}(0) > 0$, en naar oneindig toe gaat, dan heeft het oneindige tijd nodig waarbij het deeltje eindig veel windingen maakt. Behalve bij de baan $r(\theta) = r_0 \cdot \exp(\kappa\theta)$, waarbij $L^2 < mk$ en $E = 0$.

Allereerst beschouwen we het geval $L^2 > mk$, dan geldt $E > 0$ waarbij de baan van de vorm $r(\theta) = \frac{\eta}{\cos(\kappa\theta)}$ is. De radiële snelheid is begrensd door $|\dot{r}(t)| < \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

- i) Als het deeltje, vanuit $r_0 > \eta$, naar de oorsprong toe beweegt, dan komt het tot zijn minimum η om vervolgens naar oneindig toe te bewegen.
- ii) Als het deeltje, vanuit $r_0 \geq \eta$, van de oorsprong af beweegt, dan beweegt het direct naar oneindig toe.
- iii) Als $k = 0$ geldt, dan is de baan een lijn die besproken is in paragraaf 4.3.6.

Ten tweede beschouwen we het geval $L^2 < mk$, dan geldt $E \in \mathbb{R}$ en de radiële snelheid nadert oneindig als het deeltje de oorsprong nadert.

- 1) Als $E < 0$ geldt, dan is de baan van de vorm $r(\theta) = \frac{\eta}{\cosh(\kappa\theta)}$ en de radiële snelheid is nul als het deeltje in zijn maximum bevindt.
 - i) Als het deeltje, vanuit $r_0 \leq \eta$, naar de oorsprong toe beweegt, dan beweegt het in een spiraal naar de oorsprong toe.
 - ii) Als het deeltje, vanuit $r_0 < \eta$, van de oorsprong af beweegt, dan beweegt het naar zijn maximum η toe in een spiraal om vervolgens naar de oorsprong toe te bewegen.

2,3) Als $E > 0$ respectievelijk $E = 0$ geldt, dan is de baan van de vorm $r(\theta) = \frac{\mp\eta}{\sinh(\kappa\theta)}$ respectievelijk $r(\theta) = r_0 \cdot \exp(\pm\kappa\theta)$ en de radiële snelheid nadert $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ als het deeltje naar oneindig toe beweegt.

- i) Als het deeltje, vanuit $r_0 > 0$, naar de oorsprong toe beweegt, dan beweegt het in een spiraal naar de oorsprong toe.
- ii) Als het deeltje, vanuit $r_0 > 0$, van de oorsprong af beweegt, dan beweegt het in een spiraal naar oneindig toe.

Ten slotte beschouwen we het geval $L^2 = mk$, dan geldt $E \geq 0$ en de absolute waarde van de radiële snelheid is gelijk aan $|\dot{r}(t)| = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

- 1) Als $E > 0$ geldt, dan is de baan van de vorm $r(\theta) = \frac{1}{\mp(\kappa\theta - \eta)}$ en
 - i) als het deeltje, vanuit $r_0 > 0$, naar de oorsprong toe beweegt, dan beweegt het in een spiraal naar de oorsprong toe.
 - ii) als het deeltje, vanuit $r_0 > 0$, van de oorsprong af beweegt, dan beweegt het in een spiraal naar oneindig toe.
- 2) Als $E = 0$ geldt, dan is de baan van de vorm $r(\theta) = r_0$ en
 - i) beweegt het deeltje in een instabiele cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal $r_0 > 0$.

7 De centrale kracht voor $n = -5$

In dit hoofdstuk bespreken we het geval $n = -5$. Voornamelijk de gevallen waarbij $\dot{r} = 0$ één of twee reële oplossingen heeft. De centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ en bijbehorende potentiële energie $V(r)$ zijn gelijk aan

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r = -\frac{k}{r^5}\vec{e}_r, \quad V(r) = -\frac{k}{4r^4},$$

waarbij $k \in \mathbb{R}$ een constante is. Merk op dat de centrale kracht $\vec{F}(\vec{r})$ voldoet aan de vergelijking van centrale krachten (2.1), waarbij $n = -5$ geldt. In [Whittaker, 1917] wordt onder andere de centrale kracht voor $n = -5$ besproken.

7.1 De begrensde van banen

Allereerst bepalen we de oplossingen voor $\dot{r} = 0$ om de begrensde van de banen te bespreken. Vervolgens bestuderen we wat de voorwaarden zijn voor E en \dot{r} indien de centrale kracht aantrekkend is, met andere woorden $k > 0$. Ten slotte beschouwen we het geval dat de centrale kracht afstotend is, met andere woorden $k < 0$.

De energievergelijking (1.20) voor $n = -5$ is gelijk aan

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{4r^4}. \quad (7.1)$$

Hieruit volgt dat de radiële snelheid gelijk is aan

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{4r^4} \right)}. \quad (7.2)$$

Indien we aannemen dat $\dot{r} = 0$, dan geeft het oplossen van (7.1) voor r de snijpunten van E en $V_{eff}(r)$. Substitueren van $u = r^{-2}$ in (7.1) geeft

$$-\frac{k}{4}u^2 + \frac{L^2}{2m}u - E = 0.$$

Vervolgens de kwadratische vergelijking oplossen en $u = r^{-2}$ terug substitueren geeft

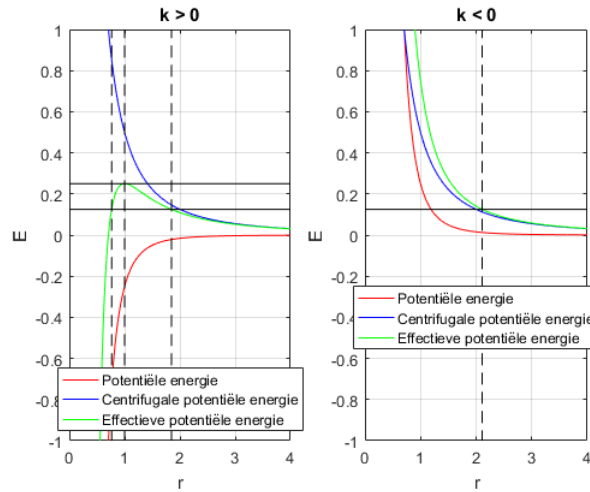
$$u_{-,+} = \frac{L^2 \mp \sqrt{L^4 - 4m^2kE}}{mk} \implies r_{-,+}^2 = \frac{mk}{L^2 \mp \sqrt{L^4 - 4m^2kE}}. \quad (7.3)$$

Dus de oplossingen voor r , waarvoor $\dot{r} = 0$ en $r > 0$ geldt, zijn gelijk aan

$$r_- = \sqrt{\frac{mk}{L^2 - \sqrt{L^4 - 4m^2kE}}}, \quad r_+ = \sqrt{\frac{mk}{L^2 + \sqrt{L^4 - 4m^2kE}}}. \quad (7.4)$$

Merk op dat $0 < r_+ < r_-$ geldt.

In Figuur [14] zijn de verschillende soorten energieën in kaart gebracht voor de aantrekkende kracht en de afstotende kracht.



Figuur 14: De verschillende soorten energieën, waarbij de energievergelijking gelijk is aan $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{4r^4}$ en de centrale kracht gelijk is aan $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^5}\vec{e}_r$.

7.1.1 Het geval $k > 0$

Als $k > 0$, dan geldt $E \in \mathbb{R}$ vanwege de energievergelijking (7.1).

Bewering 7.1 De begrensdsheid van de banen hangt voornamelijk af van de totale energie:

- i) Als $E \leq 0$, dan geldt $r \leq r_+$.
- ii) Als $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$, dan geldt $r \leq r_+$ of $r \geq r_-$.
- iii) Als $E = \frac{L^4}{4m^2k}$, dan geldt $r = \sqrt{\frac{mk}{L^2}}$.
- iv) Als $E > \frac{L^4}{4m^2k}$, dan geldt dat r alle afstanden tot het centrum kan aannemen.

Bewijs. Bewering 7.1 volgt direct door het invullen van $k > 0$ en de waarden van E in de afstandsvergelijking (7.4) en vanwege Figuur 14 worden de beweringen zichtbaar. \square

De voorwaarden voor de radiële snelheid (7.2) voor het geval $k > 0$ worden besproken in Bewering 7.2.

Bewering 7.2 De radiële snelheid hangt af van k , E , L en vooral van de afstand r tot de oorsprong:

- i) Als $r \rightarrow 0$, dan geldt $\dot{r} \rightarrow -\infty$.
- ii) Als $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$ of $E > \frac{L^4}{4m^2k}$ en $r \rightarrow \infty$, dan geldt $\dot{r} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}E}$.

iii) Als $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$ en $r = r_+$ of $r = r_-$, dan geldt $\dot{r} = 0$. Met andere woorden, $\dot{r} \rightarrow 0$ als $r \uparrow r_+$ of $r \downarrow r_-$.

iv) Als $E = \frac{L^4}{4m^2k}$, dan geldt $\dot{r} = 0$.

Bewijs. Bewering 7.2 volgt direct door het invullen van $k > 0$ en de waarden van E in de vergelijking voor de radiële snelheid (7.2). Bovendien merken we op bij Bewering 7.2.i dat $\frac{k}{4r^4}$ sneller naar oneindig toe gaat dan $-\frac{L^2}{2mr^2}$. Ten slotte maken we bij Bewering 7.2.iv gebruik van Bewering 7.1.iii. \square

7.1.2 Het geval $k < 0$

Als $k < 0$, dan geldt $E > 0$ vanwege de energievergelijking (7.1).

Bewering 7.3 De minimale afstand tot de oorsprong is gelijk aan r_- .

Bewijs. Bewering 7.3 volgt direct door $k < 0$ en $E > 0$ in de afstandsvergelijking (7.4) en vanwege Figuur 14 wordt de bewering zichtbaar. \square

De voorwaarden voor de radiële snelheid (7.2) voor het geval $k < 0$ worden besproken in Bewering 7.4.

Bewering 7.4 De radiële snelheid hangt af van k, E, L en vooral van de afstand r tot de oorsprong:

i) Als $r = r_-$, dan geldt $\dot{r} = 0$.

ii) Als $r \rightarrow \infty$, dan geldt $\dot{r} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}E}$.

Bewijs. Bewering 6.3 volgt direct door het invullen van $k < 0$ en de waarden van E in de vergelijking voor de radiële snelheid (7.2). \square

7.2 De baanvergelijking

In Hoofdstuk 3 is de eerste orde differentiaalvergelijking $\frac{dr}{d\theta}$ uitgewerkt, waardoor het direct duidelijk wordt welke substitutie moet worden toegepast om de baan te bepalen. Bovendien geeft $\frac{dr}{d\theta}$ de meeste informatie over de baan vanwege de constanten E en L . Dus de voorkeur gaat naar de baanvergelijking (3.1).

De baanvergelijking (3.1) voor $n = -5$, waarbij $v = r$, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^4 + \frac{mk}{2L^2} - r^2}}. \quad (7.5)$$

7.2.1 Het geval $k > 0$ waarbij $E < 0$

Voor het geval $k > 0$ waarbij $E < 0$, geldt dat $0 < r \leq r_+$ vanwege Bewering 7.1.i. Daarom willen we de baanuitdrukking bepalen voor het geval $r \leq r_+$. Daartoe willen we de integraal (7.5) uitdrukken van r_0 tot r , waarvoor geldt $0 < r_0 \leq r \leq r_+$. Het uitdrukken van de integraal doen we met behulp van de Jacobi elliptische functie cn .

Definitie 7.1 De Jacobi elliptische functie cn voldoet aan de voorwaarde,

$$\text{als } u = \int_{\eta}^1 \frac{dt}{\sqrt{\kappa'^2 - (\kappa'^2 - \kappa^2)t^2 - \kappa^2 t^4}}, \text{ dan } \eta = \text{cn}(u, \kappa), \quad (7.6)$$

waarbij $0 < \kappa' < 1, \kappa > 0$ met $\kappa'^2 + \kappa^2 = 1$ en $0 < \kappa^2 < 1$ en $0 \leq \eta \leq 1$.

We zullen eerst de juiste substituties moeten bepalen voordat we de Jacobi elliptische functie $\text{cn}(u, \kappa)$ mogen toepassen. Merk allereerst op dat de volgende twee vergelijkingen gelden,

$$\frac{r_+^2 r_-^2}{r_+^2 + r_-^2} = \frac{\frac{m^2 k^2}{L^4 - L^4 + 4m^2 k E}}{\frac{2mkL^2}{L^4 - L^4 + 4m^2 k E}} = \frac{\frac{k}{4E}}{\frac{L^2}{2mE}} = \frac{2mEk}{4EL^2} = \frac{mk}{2L^2}, \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{r_+^2 + r_-^2} = \frac{1}{\frac{2mkL^2}{L^4 - L^4 + 4m^2 k E}} = \frac{1}{\frac{L^2}{2mE}} = \frac{2mE}{L^2}. \quad (7.8)$$

Laat vervolgens de volgende waarden gelden

$$\eta = \frac{r}{r_+}, \quad \nu = \frac{r_+^2 + r_-^2}{r_-^2 - r_+^2}, \quad \kappa^2 = \frac{-\nu r_+^2}{r_+^2 + r_-^2}, \quad \kappa'^2 = \frac{\nu r_-^2}{r_+^2 + r_-^2}. \quad (7.9)$$

Deze waarden zijn zodanig bepaald dat de baanvergelijking (7.5) voldoet aan de voorwaarden van (7.6). Dat wilt zeggen, de waarden in (7.9) voldoen aan $0 < \kappa' < 1, \kappa > 0$ met $\kappa'^2 + \kappa^2 = 1$ en $0 < \kappa^2 < 1$ en $0 \leq \eta \leq 1$.

Substitueren van (7.7), (7.8) en $\eta = \frac{r}{r_+}$ in (7.5) geeft

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{r_+ d\eta}{\sqrt{\frac{r_+^2 r_-^2}{r_+^2 + r_-^2} - r_+^2 \eta^2 + \frac{r_+^4}{r_+^2 + r_-^2} \eta^4}} = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{r_-^2}{r_+^2 + r_-^2} - \eta^2 + \frac{r_+^2}{r_+^2 + r_-^2} \eta^4}}, \quad (7.10)$$

waarbij $\eta_0 = \frac{r_0}{r_+}$, $r = r_+ \eta$ en $dr = r_+ d\eta$.

Vervolgens substitueren van κ^2 en κ'^2 gedefinieerd in (7.9) geeft

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\nu \sqrt{\kappa'^2 - (\kappa'^2 - \kappa^2) \eta^2 - \kappa^2 \eta^4}}}. \quad (7.11)$$

Ten slotte de constante naar de linkerkant halen geeft

$$\sqrt{\nu} (\theta - \theta_0) = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\kappa'^2 - (\kappa'^2 - \kappa^2) \eta^2 - \kappa^2 \eta^4}}. \quad (7.12)$$

De integraal (7.12) is een elliptische integraal die op te lossen is met behulp van de Jacobi elliptische functie $\eta(\theta) = \text{cn}(\sqrt{\nu}(\theta - \theta_0), \kappa)$ die gedefinieerd is in (7.6). Dit is toegestaan want de integraal kan genoteerd worden als

$$\begin{aligned} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta &= \int_{\eta_0}^1 d\eta - \int_{\eta}^1 d\eta, & \text{als } \dot{r}(0) > 0, \\ - \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta &= \int_{\eta}^1 d\eta - \int_{\eta_0}^1 d\eta, & \text{als } \dot{r}(0) < 0. \end{aligned}$$

Hierbij geldt dat $\pm \int_{\eta_0}^1 d\eta$ opgenomen kan worden in de integratieconstante θ_0 .

7.2.2 Het geval $k > 0$ waarbij $E = 0$

De baanvergelijking (7.5) voor $n = -5$, waarbij $k > 0$ en $E = 0$, is gelijk aan

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{mk}{2L^2} - r^2}}. \quad (7.13)$$

De onbepaalde integraal van (7.13) is van de standaardvorm

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\alpha r^2 + \beta r + \gamma}} = \frac{-1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha r + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right), \quad (7.14)$$

waarbij de constanten gelijk zijn aan

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{mk}{2L^2}. \quad (7.15)$$

De formule (7.14) is van toepassing mits $\alpha < 0$ en $k > 0$. Het toepassen van deze integratie in (7.13) geeft

$$\theta - \theta_0 = \mp \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \arccos \left(-\frac{2\alpha r + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right). \quad (7.16)$$

Vervolgens (7.16) oplossen voor r geeft

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) &= \cos \left(\mp \arccos \left(-\frac{2\alpha r + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \right) \implies \\ r &= -\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cos(\sqrt{-\alpha}(\theta - \theta_0)) - \frac{\beta}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Substitueren van de constanten in (7.15) geeft

$$r = \sqrt{\frac{mk}{2L^2}} \cos(\theta - \theta_0). \quad (7.17)$$

In Cartesische coördinaten is (7.17) gelijk aan

$$\left(x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mk}{2L^2}} \right)^2 + y^2 = \frac{mk}{8L^2}. \quad (7.18)$$

De baanvergelijking (7.18) is een cirkel met middelpunt $\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mk}{2L^2}}, 0 \right)$ en straal $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mk}{2L^2}}$.

7.2.3 Het geval $k > 0$ waarbij $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$

Voor het geval $k > 0$ waarbij $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$ geldt dat $r \leq r_+$ en $r \geq r_-$, waarvoor geldt $0 < r_+ < r_-$, vanwege Bewering 7.1.ii.

Allereerst willen we de baanuitdrukking bepalen voor het geval $r \leq r_+$. Daartoe willen we de integraal (7.5) uitdrukken van r_0 tot r , waarvoor geldt $0 < r_0 \leq r \leq r_+$. Het uitdrukken van de integraal doen we met behulp van de Jacobi elliptische functie sn .

Definitie 7.2 De Jacobi elliptische functie sn voldoet aan de voorwaarde,

$$\text{als } u = \int_0^\eta \frac{dt}{\sqrt{1 - (1 + \kappa^2)t^2 + \kappa^2 t^4}}, \text{ dan } \eta = \text{sn}(u, \kappa), \quad (7.19)$$

waarbij $0 < \kappa^2 < 1$ en $0 \leq \eta \leq 1$.

We zullen eerst de juiste substituties moeten bepalen voordat we de Jacobi elliptische functie $\text{sn}(u, \kappa)$ mogen toepassen. Laat de volgende waarden gelden

$$\eta = \frac{r}{r_+}, \quad \kappa^2 = \frac{r_+^2}{r_-^2}. \quad (7.20)$$

Merk op dat de gekozen waarden voldoen aan de voorwaarden van (7.19). Dat wilt zeggen, de voorwaarden $0 < \kappa^2 < 1$ en $0 \leq \eta \leq 1$ worden voldaan door (7.20).

Substitueren van κ^2 gedefinieerd in (7.20) in de vergelijking (7.10) geeft dat de baanvergelijking (7.5) gelijk is aan

$$\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \pm \int_{\eta_0}^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - (1 + \kappa^2)\eta^2 + \kappa^2\eta^4}}. \quad (7.21)$$

De integraal (7.21) is een elliptische integraal die op te lossen is met behulp van de Jacobi elliptische functie $\eta(\theta) = \text{sn}\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \kappa\right)$ die gedefinieerd is in (7.19). Dit is toegestaan want de integraal kan genoteerd worden als

$$\begin{aligned} \int_{\eta_0}^\eta d\eta &= \int_0^\eta d\eta - \int_0^{\eta_0} d\eta, & \text{als } \frac{dr}{d\theta} > 0 \text{ in } t = 0, \\ - \int_{\eta_0}^\eta d\eta &= \int_0^{\eta_0} d\eta - \int_0^\eta d\eta, & \text{als } \frac{dr}{d\theta} < 0 \text{ in } t = 0. \end{aligned}$$

Hierbij geldt dat $\pm \int_0^{\eta_0} d\eta$ opgenomen kan worden in de integratieconstante θ_0 .

Vervolgens willen we de baanuitdrukking bepalen voor het geval $r \geq r_-$. Daartoe willen we de integraal (7.5) uitdrukken van r_0 tot r , waarvoor geldt $r_- \leq r_0 \leq r < \infty$. Het uitdrukken van de integraal doen we met behulp van de Jacobi elliptische functie sn .

We zullen eerst de juiste substituties moeten bepalen voordat we de Jacobi elliptische functie $\text{sn}(u, \kappa)$ mogen toepassen. Laat de volgende waarden gelden

$$\eta = \frac{r_-}{r}, \quad \kappa^2 = \frac{r_+^2}{r_-^2}. \quad (7.22)$$

Merk op dat de gekozen waarden voldoen aan de voorwaarden van (7.19). Dat wilt zeggen, de voorwaarden $0 < \kappa^2 < 1$ en $0 \leq \eta \leq 1$ worden voldaan door (7.22).

Substitueren van (7.7), (7.8) en $\eta = \frac{r_-}{r}$ in (7.5) geeft

$$\theta - \theta_0 = \mp \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{r_- d\eta}{\eta^2 \sqrt{\frac{r_-^4}{(r_+^2 + r_-^2)\eta^4} + \frac{r_+^2 r_-^2}{r_+^2 + r_-^2} - \frac{r_-^2}{\eta^2}}} = \mp \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{r_-^2}{r_+^2 + r_-^2} - \eta^2 + \frac{r_+^2}{r_+^2 + r_-^2} \eta^4}}, \quad (7.23)$$

waarbij $\eta_0 = \frac{r_-}{r_0}$, $r = \frac{r_-}{\eta}$ en $dr = -\frac{r_-^2}{r^2} d\eta$. Vervolgens substitueren van κ^2 gedefinieerd in (7.22) geeft

$$\theta - \theta_0 = \mp \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{1}{1+\kappa^2} \sqrt{1 - (1 + \kappa^2)\eta^2 + \kappa^2\eta^4}}}. \quad (7.24)$$

Ten slotte de constante naar de linkerkant halen in (7.24) geeft

$$\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \mp \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - (1 + \kappa^2)\eta^2 + \kappa^2\eta^4}}. \quad (7.25)$$

De integraal (7.25) is een elliptische integraal die op te lossen is met behulp van de Jacobi elliptische functie $\eta(\theta) = \text{sn}\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \kappa\right)$ die gedefinieerd is in (7.19). Dit is toegestaan om dezelfde reden die bij het geval $r \leq r_+$ in paragraaf 7.2.3 is gegeven.

7.2.4 Het geval $k > 0$ waarbij $E = \frac{L^4}{4m^2k}$

Voor het geval $k > 0$ waarbij $E = \frac{L^4}{4m^2k}$ geldt dat $r = \sqrt{\frac{mk}{L^2}}$ respectievelijk $\dot{r} = 0$ vanwege Bewering 7.1.iii respectievelijk Bewering 7.2.iii. In Hoofdstuk 2.2 is de stabiliteit van cirkelbanen besproken. Hieruit volgt dat de baan een instabiele cirkel is met straal r_* waarvoor geldt $V'_{eff}(r_*) = 0$. Uitwerken geeft

$$V'_{eff}(r_*) = 0 \implies \frac{k}{r_*^5} - \frac{L^2}{mr_*^3} = 0 \implies r_*^2 = \frac{mk}{L^2}.$$

Vervolgens $r_*^2 = \frac{mk}{L^2}$ substitueren in $V_{eff}(r)$ geeft

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{4r^4} = \frac{L^4}{4m^2k}.$$

Merk op dat voor $\dot{r} = 0$ en $r^2 = \frac{mk}{L^2}$ geldt dat $E = \frac{L^4}{4m^2k}$ vanwege (7.3).

Dus de baan is een instabiele cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal $r = \sqrt{\frac{mk}{L^2}}$.

7.2.5 Het geval $k < 0$

Voor het geval $k < 0$ geldt $E > 0$ respectievelijk $r \geq r_-$ vanwege de energie-vergelijking (7.1) respectievelijk Bewering 7.2.i. Daarom willen we de baanuitdrukking bepalen voor het geval $r \geq r_-$. Daartoe willen we de integraal (7.5)

uitdrukken van r_0 tot r , waarvoor geldt $r_- \leq r_0 \leq r < \infty$. Het uitdrukken van de integraal doen we met behulp van de Jacobi elliptische functie cn .

We zullen eerst de juiste substituties moeten bepalen voordat we de Jacobi elliptische functie $\text{cn}(u, \kappa)$ mogen toepassen. Laat de volgende waarden gelden

$$\eta = \frac{r_-}{r}, \quad \nu = \frac{r_+^2 + r_-^2}{r_-^2 - r_+^2}, \quad \kappa^2 = \frac{-\nu r_+^2}{r_+^2 + r_-^2}, \quad \kappa'^2 = \frac{\nu r_-^2}{r_+^2 + r_-^2}. \quad (7.26)$$

Merk op dat de gekozen waarden voldoen aan de voorwaarden van (7.6). Dat wilt zeggen, de voorwaarden $0 < \kappa' < 1$, $\kappa > 0$ met $\kappa'^2 + \kappa^2 = 1$ en $0 < \kappa^2 < 1$ en $0 \leq \eta \leq 1$ worden voldaan door de substituties in (7.26).

Substitueren van κ^2 en κ'^2 gedefinieerd in (7.26) in de vergelijking (7.23) geeft dat de baanvergelijking (7.5) gelijk is aan

$$\sqrt{\nu}(\theta - \theta_0) = \mp \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\kappa'^2 - (\kappa'^2 - \kappa^2)\eta^2 - \kappa^2\eta^4}}. \quad (7.27)$$

De integraal (7.27) is een elliptische integraal die op te lossen is met behulp van de Jacobi elliptische functie $\eta(\theta) = \text{cn}(\sqrt{\nu}(\theta - \theta_0), \kappa)$ die gedefinieerd is in (7.6). Dit is toegestaan om dezelfde reden die gegeven is in paragraaf 7.2.1.

7.3 Banen in kaart

In Figuur [15] zijn de banen (7.21) respectievelijk (7.25) weergegeven in de linker- respectievelijk rechterfiguur. De banen (7.21) en (7.25) zijn respectievelijk gelijk aan

$$r(\theta) = r_+ \text{sn}\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \kappa\right), \quad r(\theta) = \frac{r_-}{\text{sn}\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \kappa\right)}, \quad (7.28)$$

waarbij $\kappa = \frac{r_+^2}{r_-^2}$.

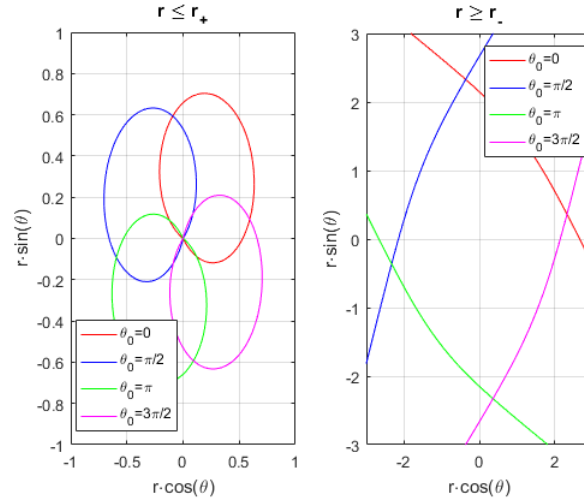
In Figuur [16] zijn de banen (7.12) respectievelijk (7.27) weergegeven in de linker- respectievelijk rechterfiguur. De banen (7.12) en (7.27) zijn respectievelijk gelijk aan

$$r(\theta) = r_+ \text{cn}(\sqrt{\nu}(\theta - \theta_0), \kappa), \quad r(\theta) = \frac{r_-}{\text{cn}(\sqrt{\nu}(\theta - \theta_0), \kappa)} \quad (7.29)$$

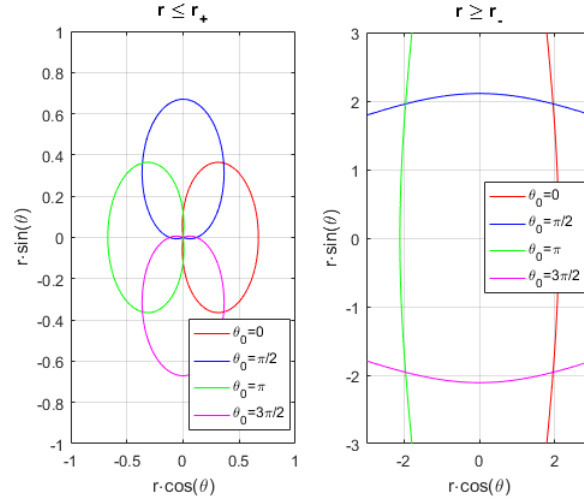
waarbij $\nu = \frac{r_+^2 + r_-^2}{r_-^2 - r_+^2}$ en $\kappa^2 = \frac{-\nu r_+^2}{r_+^2 + r_-^2}$.

In Figuur [17] zijn de cirkelbanen weergegeven die besproken zijn in paragraaf 7.2.2 en 7.2.4. In de linkerfiguur is de instabiele cirkelbaan met middelpunt $(0, 0)$ en straal $r = \sqrt{\frac{mk}{L^2}}$ weergegeven. In de rechterfiguur is de cirkelbaan (7.18) met middelpunt $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mk}{2L^2}}, 0\right)$ en straal $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mk}{2L^2}}$ weergegeven. Hieruit volgt dat de baan naar de oorsprong toe gaat indien $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ of naar de oorsprong

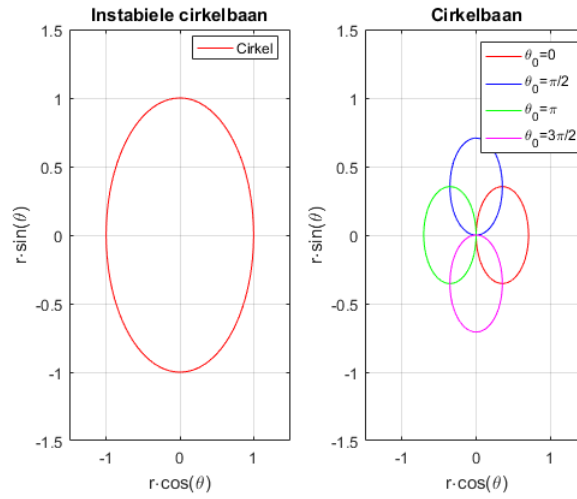
toe gaat nadat het in zijn maximum afstand r_+ is geweest indien $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$.



Figuur 15: De banen die gelden bij het geval $k > 0$ en $0 < E < \frac{L^4}{4m^2k}$. Hierbij geldt dat de banen bepaald zijn door de Jacobi elliptische functie $\text{sn}\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \kappa\right)$.



Figuur 16: De banen die gelden bij de gevallen $k > 0$, $E < 0$ en $k < 0$, $E > 0$. Hierbij geldt dat de banen bepaald zijn door de Jacobi elliptische functie $\text{cn}(\sqrt{\nu}(\theta - \theta_0), \kappa)$.



Figuur 17: De banen die gelden bij de gevallen $k > 0, E = \frac{L^4}{4m^2k}$ en $k > 0, E = 0$.

Voor het geval $E > \frac{L^4}{4m^2k}$ met $k > 0$ geldt dat de baan naar oneindig respectievelijk de oorsprong gaat als $\frac{dr}{d\theta} > 0$ in $t = 0$ respectievelijk $\frac{dr}{d\theta} < 0$ in $t = 0$ vanwege Bewering 7.1.iv. Bovendien als de baan naar oneindig toe gaat, dan geldt $\dot{r} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}E}$ vanwege Bewering 7.2.ii. Daarentegen, als de baan naar de oorsprong toe gaat, dan geldt $\dot{r} \rightarrow -\infty$ vanwege Bewering 7.2.i. Met andere woorden, de radiële snelheid is begrensd ongeacht of het deeltje naar oneindig of de oorsprong toe beweegt.

Dus voor het geval $E > \frac{L^4}{4m^2k}$ met $k > 0$ geldt dat het deeltje in eindige tijd respectievelijk oneindige tijd naar de oorsprong respectievelijk naar oneindig toe gaat.

Nawoord

De centrale krachten waarbij $n > -3$ respectievelijk $n \leq -3$ hebben stabiele respectievelijk instabiele cirkelbanen. De drie gevallen $n = -3, -2, 1$ zijn op te lossen met behulp van trigonometrische en hyperbolische functies. Bovendien zijn de elf gevallen $n = -7, -5, -4, 0, 3, 5, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ op te lossen met behulp van elliptische functies.

Voor verdere onderzoek is het mogelijk om de overige gevallen van n te bespreken. Dit kunnen ofwel de overige gevallen zijn die op te lossen zijn met elliptische functies, ofwel de gevallen die numeriek benaderd kunnen worden.

De numerieke methode Runge-Kutta 4 geeft goede benaderingen. Hiermee zou de differentiaalvergelijking $\frac{dr}{dt}$ benaderd kunnen worden. Bovendien met de parameter θ , die dezelfde eigenschappen heeft als t , zal het wellicht ook $\frac{dr}{d\theta}$ kunnen benaderen. Merk op dat opgelet moet worden voor eventuele asymptoten en dat $\frac{dr}{dt}$ reëel blijft. Dit zou de benadering van de baan onnauwkeuriger maken en daarmee ook de keuze voor t of θ ingewikkelder.

Referenties

- [Braun, 1993] Braun, M. (1993), Differential Equations and Their Applications (4th ed.), *Chapter 4.4 Stability of equilibrium solutions*, p.385-p.394, Springer-Verlag New York.
- [Whittaker and Watson, 1920] Whittaker, E.T., Watson, G.N. (1920), A Course of modern analysis; an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions (3rd ed.), *Part II The transcendental functions*, p.235-p.536, Cambridge University Press.
- [Vuik et al., 2016] Vuik, C., Vermolen, F.J., Van Gijzen, M.B., Vuik, M.J. (2016), Numerical Methods for Ordinary Differential Equations (2nd ed.), *Chapter 6.5 Higher Order Methods*, p.76-p.78, Delft Academic Press.
- [Goldstein et al., 2014] Goldstein, H., Poole, C.P., Safko, J.L. (2014), Classical Mechanics (3rd ed.), *The Central Force Problem*, p.70-p.134, Pearson Education Limited.
- [A. Adams and Essex, 2013] A. Adams, R., Essex, C. (2013), Calculus: A Complete Course (8th ed.), *Polar Coordinates and Polar Curves*, p.483-p.488, Pearson Canada Inc.
- [Whittaker, 1917] Whittaker, E.T. (1917), A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies (2nd ed.), *Chapter IV The soluble problems of particles dynamics*, p.71-p.117, Cambridge University Press.