M. Daems

De Stieltjes-integraal in een Banachruimte

Bachelorscriptie, 26 augustus 2013

Scriptiebegeleider: dr. O. van Gaans

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

1 Inleiding

De Stieltjes-integraal is vernoemd naar Thomas Johannes Stieltjes. Naar verluidt heeft hij deze integraal-definitie ontwikkeld tijdens zijn onderzoek naar kettingbreuken [6] [11].

De Stieltjes-integraal $\int f(t)dg(t)$ is algemener dan de bekende Riemann-integraal $\int f(t)dt$ en maakt gebruik van een zogenaamde integrator, de functie $g(t)$, die te beschouwen is als een gewichtsfunctie. In de Riemann-integraal is de integrator de identieke functie $g(t) = t$. Een toepassing is vooral te vinden in de waarschijnlijkheidsleer, bijvoorbeeld in de berekening van de momentvoortbrengende functie van een stochast.

In *Topics in analysis 1 - Real functions* van dr. O. van Gaans [5] staan enkele stellingen over de Stieltjes-integraal van functies van een compact interval $[a, b]$ naar $\mathbb{R}$. Hoe zien die stellingen eruit als het gaat om functies van $[a, b]$ naar een algemene Banachruimte X in plaats van $\mathbb{R}$? Daar zal in deze scriptie aandacht aan gegeven worden.

In paragraaf 2 wordt een korte biografie van Thomas Johannes Stieltjes gegeven.

In de stellingen over de Stieltjes-integraal en de bewijzen daarvan, die in deze scriptie aan de orde komen, worden begrippen als partitie, fijnere partitie, maaswijdte en strooiing veelvuldig gebruikt. Zo ook het begrip begrensde variatie en de definities van de Stieltjes-integraal. Deze begrippen worden in paragraaf 3 eerst gedefiniëerd. Veel definities in deze scriptie zullen al bekend zijn en zijn gebaseerd op definities in de gebruikte literatuur.

De nadruk ligt op paragraaf 4 waarin vier stellingen geformuleerd zijn en bewezen worden. Deze laatste paragraaf eindigt met een uitgewerkt voorbeeld.

2 Thomas Johannes Stieltjes

Thomas Johannes Stieltjes [3] werd geboren in Zwolle op 29 december 1856 en droeg dezelfde naam als zijn vader die civiel ingenieur en lid van de Tweede Kamer was.

Thomas jr. ging in 1873 studeren aan de polytechnische School in Delft. Omdat hij geen colleges volgde maar zijn tijd voornamelijk besteedde aan het bestuderen van het werk van Gauss en Jacobi lukte het hem niet zijn propedeutisch examen te halen. Zijn vader, die bevriend was met de directeur van de Sterrenwacht in Leiden, deed een goed woordje voor zijn zoon. Zodoende kon hij aan de slag als assistent voor astronomische berekeningen. Ook hier spendeerde Thomas zijn tijd bijna volledig aan de wiskunde. Zijn werk aan de hemelse mechanica bracht hem in contact met Charles Hermite. Er ontstond een uitgebreide correspondentie tussen Stieltjes en Hermite die voortduurde tot twee weken voor de dood van Stieltjes.

In 1883 trouwde Stieltjes met Elizabeth Intveld. Zij was voor hem een grote stimulans om te blijven werken aan zijn wiskundig werk. Hij nam uiteindelijk in december 1883 ontslag bij de Sterrenwacht om zich volledig toe te wijden aan de wiskunde.

Niet lang daarna kreeg hij een aanbieding om hoogleraar te worden in de differentiaal- en integraalrekening aan de universiteit van Groningen. Het ministerie van onderwijs hield de benoeming echter tegen omdat hij geen academische graad bezat. In 1884 besloot de universiteit van Leiden, na een ontmoeting tussen Hermite en Bierens de Haan, Stieltjes een eredoctoraat te geven.

In 1885 ging Stieltjes naar Toulouse waar hij benoemd was als professor in de differentiaal- en integraalrekening. Hier schreef hij zijn belangrijkste artikel *Recherches sur les fractions continues* waarin hij de naar hem vernoemde Stieltjes-integraal introduceerde.

Stieltjes overleed op 31 december 1894.

3 Voorbereidende definities en stellingen

Hieronder volgen enkele veel in paragraaf 4 gebruikte definities en stellingen.

Definitie 3.1 (Partitie)**.**

Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Een *partitie* $\underline{t}_n$ van het interval $[a, b]$ is een eindige verzameling $\underline{t}_n = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ punten uit $[a, b]$ met de eigenschap dat

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b.$$

Soms wordt een partitie aangeduid met een hoofdletter, bijvoorbeeld de partitie P. Als uit de context blijkt tot welke waarde de teller loopt, bijvoorbeeld n of m dan kan een partitie weergegeven worden met een vector zonder subscript. In dat geval is de notatie $\underline{t}$ in plaats van $\underline{t}_n$ of $\underline{t}_m$ [5, 4.1].

Definitie 3.2 (Maaswijdte)**.**

Zij P een partitie van $[a, b]$ met $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ dan heet het getal $\mu(P) = max\{(t_i - t_{i-1}) \mid 1 \leq i \leq n\}$ de *maaswijdte* of *fijnheid* van P.

Een partitie P verdeelt het interval $[a, b]$ in deelintervallen. De maaswijdte is de lengte van het grootste deelinterval van deze partitie [1, 5.1.2].

Definitie 3.3 (Fijnere partitie)**.**

Als P_1 en P_2 beide partities zijn van $[a, b]$ en $P_1 \subseteq P_2$ dan is P_2 een *fijnere partitie* dan P_1.

De maaswijdte van een fijnere partitie is kleiner of gelijk aan de maaswijdte van een grovere partitie [4, VII.1.4].

Definitie 3.4 (Strooiing)**.**

Een strooiing $\underline{s}_n$ bij de partitie $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ is een verzameling punten $\underline{s}_n = \{s_i \mid t_{i-1} \leq s_i \leq t_i, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$.

Als uit de context blijkt tot welke waarde de teller loopt, bijvoorbeeld n of m dan kan een strooiing weergegeven worden met een vector zonder subscript. In dat geval is de notatie $\underline{s}$ in plaats van $\underline{s}_n$ of $\underline{s}_m$ [1, 5.1.2].

De integraaldefinities van Riemann en Stieltjes maken gebruik van respectievelijk Riemann- en Stieltjes-sommen waarin de begrippen partitie, fijnere partitie en maaswijdte een belangrijke rol spelen. Van de definities van Riemann- en Stieltjes-integralen bestaan verschillende versies. Afhankelijk van de problematiek kan het nodig zijn een andere definitie te gebruiken [6]. De definitie gebaseerd op boven- en ondersommen [8, 6.1-6.3] is voor de stellingen in de volgende paragraaf niet nodig. De definities die Almering [1], Apostel [2] en van Gaans [5] gebruiken voldoen prima voor de aanpak in deze scriptie.

Definitie 3.5 (Riemann-som)**.**

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie.
Is $\underline{s}$ een gekozen strooiing bij partitie $\underline{t}$ dan heet de som

$$S_f(\underline{t}, \underline{s}) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1})$$

de *Riemann-som* van f behorende bij *partitie* $\underline{t}$ en *strooiing* $\underline{s}$ [1, 5.1.2].

Als uit de context duidelijk blijkt met welke functie, partitie en/of strooiing de Riemann-som bepaald wordt dan kan een kortere notatie $S(\underline{t}, \underline{s})$ of zelfs S volstaan.

Definitie 3.6 (Riemann-integreerbaar)**.**

De functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet *Riemann-integreerbaar* over $[a, b]$ als er een getal $I \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap: bij iedere $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor iedere partitie $\underline{t}_n$ met maaswijdte $\mu(\underline{t}_n) < \delta$ en iedere bij $\underline{t}_n$ te kiezen strooiing $\underline{s}_n$ voor de Riemann-som $S_f(\underline{t}_n, \underline{s}_n)$ geldt:

$$|S_f(\underline{t}_n, \underline{s}_n) - I| < \epsilon.$$

Het getal

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

heet dan de *(Riemann-)integraal van f over* $[a, b]$ [1, 5.1.2].

Definitie 3.7 (Stieltjes-som)**.**

Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide functies, $\underline{t}_n$ een partitie met $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ en $\underline{s}_n$ een bij $\underline{t}_n$ te kiezen strooiing dan heet de som

$$S_{f,g}(\underline{t}_n, \underline{s}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

de *Stieltjes-som* van f behorende bij *partitie* $\underline{t}_n$ en *strooiing* $\underline{s}_n$ [5, 4.1].

Als uit de context blijkt met welke functies, partitie en/of strooiing de Stieltjes-som bepaald wordt dan kan een kortere notatie $S(\underline{t}, \underline{s})$ of zelfs S volstaan. De *Stieltjes-som* wordt ook wel de *Riemann-Stieltjes-som* genoemd.

Definitie 3.8 (Stieltjes-integreerbaar)**.**

Zij $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beide functies. De functie f heet *Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g* als er een getal $I \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie P van $[a, b]$ bestaat zodat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}_n$ dan P van $[a, b]$ en iedere bij $\underline{t}_n$ te kiezen strooiing $\underline{s}_n$ geldt

$$|S_{f,g}(\underline{t}_n, \underline{s}_n) - I| < \epsilon.$$

Het getal

$$I = \int_a^b f(t)dg(t)$$

heet dan de *Stieltjes-integraal van f t.o.v. g*. De functie f wordt soms ook wel *Riemann-Stieltes-integreerbaar* genoemd [2, 9-3].

Opmerking 3.9. Tussen de bovenstaande definities van de Riemann-integraal en de Stieltjes-integraal zit een opmerkelijk verschil, en dat is dat in de laatste definitie gebruik gemaakt wordt van een fijnere partitie en niet van een maaswijdte kleiner dan δ. De eerste definitie is de originele [5, 4.7] is:

Er bestaat een $I \in \mathbb{R}$ zo dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een δ bestaat zo dat voor iedere partitie $\underline{t} = \{t_k \in \mathbb{N} | a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b, 0 \leq t_k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ met maaswijdte $\mu(\underline{t}) < \delta$ en iedere keuze van $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$ geldt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) - I \right| < \epsilon.$$

Hieronder volgt een voorbeeld waaruit blijkt dat deze originele definitie niet altijd voldoet.

Voorbeeld 3.10.

Zij $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en als volgt gedefinieerd:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \text{en} \quad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dus $f(\frac{1}{2}) = 0$ en $g(\frac{1}{2}) = 1$. Zij $\underline{t}$ een partitie met $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = 1$ en $\underline{s}$ een hierbij gekozen strooiing. Dan bestaat er een i^* zo dat $\frac{1}{2} \in [t_{i^*-1}, t_{i^*})$. Nu geldt voor de Riemann-Stieltjes-som:

$$S(\underline{t}, \underline{s}) \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}) = f(s_{i^*})$$

Als $s_{i^*} = \frac{1}{2}$ dan is $S(\underline{t}, \underline{s}) = 0$, in het geval dat $s_{i^*} < \frac{1}{2}$ dan is $S(\underline{t}, \underline{s}) = 1$ en als $s_{i^*} > \frac{1}{2}$ dan is $S(\underline{t}, \underline{s}) = 0$. Er geldt dus niet dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat geldt:

$$\mu(\underline{t}) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}) - I \right| < \epsilon.$$

De wijziging te werken met fijnere partitie omzeilt dit soort problemen die met stapfuncties gepaard gaan en komt op naam van T. Pollard [6] [7].

Voor iedere fijnere partitie $\underline{t}$ dan de partitie $0 = 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 = 1$ is bij iedere te kiezen strooiing $\underline{s}$ de Stieltjes-som:

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\,(g(t_k) - g(t_{k-1})) = 1$$

en is volgens de definitie van Pollard f wel Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g.

In de stellingen over de Stieltjes-integraal in een Banachruimte kan het zijn dat de integrand een functie naar de Banachruimte is, maar ook dat de integrator een functie naar een Banachruimte is. Vandaar dat hieronder twee definities van de Stieltjes-integraal in Banachruimte zijn vermeld.

Definitie 3.11 (De Stieltjes-integraal in een Banachruimte I)**.**
Zij X een Banachruimte.
De functie $f : [a, b] \to X$ is *Stieltjes-integreerbaar in X t.o.v.* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ als er een $I \in X$ bestaat zodat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie P bestaat zodat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}_n$ dan P, met $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ en voor iedere bij $\underline{t}_n$ te kiezen strooiing $\underline{s}_n$ geldt

$$\|S_{f,g}(\underline{t}_n, \underline{s}_n) - I\|_X < \epsilon.$$

Het getal

$$I = \int_a^b f(t)dg(t)$$

heet dan de *(Riemann-)Stieltjes-integraal van f t.o.v. g.*

Definitie 3.12 (De Stieltjes-integraal in een Banachruimte, II)**.**
Zij X een Banachruimte.
De functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ is *Stieltjes-integreerbaar in X t.o.v.* $f : [a, b] \to X$ als er een $I \in X$ bestaat zodat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie P bestaat zodat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}_n$ dan P, met $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ en voor iedere bij $\underline{t}_n$ te kiezen strooiing $\underline{s}_n$ geldt:

$$\|S_{g,f}(\underline{t}_n, \underline{s}_n) - I\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{n} g(s_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) - I \right\|_X < \epsilon.$$

Het getal

$$I = \int_a^b g(t)df(t)$$

heet dan de *(Riemann-)Stieltjes-integraal van g in X t.o.v. f.*

De vermenigvuldiging van een vector met een skalar is commutatief. Vandaar dat de berekening van de norm in beide gevallen niet tot verschillen zullen leiden. Als zowel de integrand als de integrator een functie naar een Banachruimte is dan zouden de bovenstaande definities niet meer kunnen voldoen, aangezien de vermenigvuldiging van een vector met een andere vector nog niet gedefiniëerd is. Een theorie voor onder andere dit laatste geval wordt beschouwd in [10].

In een stelling waarbij de afgeleide een rol speelt komt ook de Riemann-integraal in een Banachruimte voor. Vandaar dat de volgende definitie ook is opgenomen.

Definitie 3.13 (De Riemann-integraal in een Banachruimte)**.**

Zij X een Banachruimte.
De functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet *Riemann-integreerbaar in* X over $[a, b]$ als er een een $I \in X$ bestaat zodat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie P bestaat zodat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}_n$ dan P, met $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ en voor iedere bij $\underline{t}_n$ te kiezen strooiing $\underline{s}_n$ geldt:

$$\|S_f(\underline{t}_n, \underline{s}_n) - I\|_X < \epsilon.$$

Het getal

$$I = \int_a^b f(t)dt$$

heet dan de *Riemann-integraal van* f *in* X *t.o.v.* g.

Opmerking 3.14. Definitie 3.13 is een speciaal geval is van definitie 3.11 door $g(t) = t$ te kiezen.

De volgende twee definities en stelling spelen een rol in de verschillende bewijzen in de volgende paragraaf.

Definitie 3.15 (Begrensde variatie)**.**

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie en zij $\underline{t}$ een partitie van $[a, b]$. De functie f is van van begrensde variatie als:

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right\} < \infty$$

Ofwel: het supremum van de sommen van de lengte van de deelintervallen over alle mogelijke partities is niet oneindig [2, 8-3].

Definitie 3.16 (De norm van een lineaire operator)**.**

Zij $\varphi : X \to \mathbb{R}$ een lineaire operator. Dan is X' de ruimte van begrensde lineaire operatoren van X naar $\mathbb{R}$ en heet de duale ruimte van X. Bovendien is X' een Banachruimte [9, 4.15 en 4.28].

De norm van φ is gedefinieerd door:

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup\{|\varphi(y)| : \|y\|_X \leq 1\}$$

Hieronder volgt de stelling over de norm van een lineaire operator in een duale ruimte.

Stelling 3.17. *Zij* X *een Banachruimte en* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *een lineaire operator dan geldt:*

$$\forall x \in X : |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X'} \|x\|_X$$

Bewijs. Voor de norm van een lineaire operator $\varphi \in X'$ geldt:

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup\{|\varphi(y)| : \|y\|_X \leq 1\}$$

Zij $x \in X$ en $x \neq 0$. Dan is $\left\| \frac{1}{\|x\|_X} x \right\|_X = 1$ en met $y = \left\| \frac{1}{\|x\|_X} x \right\|_X = 1$ volgt dan:

$$\|\varphi\|_{X'} \geq |\varphi(y)| = \left| \varphi \left(\frac{1}{\|x\|_X} x \right) \right| = \left| \frac{1}{\|x\|_X} \varphi(x) \right| = \frac{1}{\|x\|_X} |\varphi(x)|.$$

Zij $x = 0$. Dan is $|\varphi(0)| = 0 \leq \|\varphi\|_{X'} \cdot 0 = 0$.
Dus

$$\forall x \in X : |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X'} \|x\|_X.$$

$\square$

4 Enkele stellingen over de Stieltjes-integraal in een Banachruimte

De onderstaande stellingen geven aan wanneer en onder welke omstandigheden een Stieltjes-integraal in een Banachruimte te bepalen of te berekenen is. In de eerste stelling (4.1) is de integrator van begrensde variatie. De tweede stelling (4.2) geeft aan wanneer de integraal van een vector gelijk is aan een vector waarvan de componenten integralen zijn. De laatste twee stellingen, (4.5) en (4.7), kunnen gebruikt worden om een Stieltjes-integraal te berekenen. Afsluitend is er een voorbeeld (4.8) waarin dit gedaan wordt.

Stelling 4.1. *Zij X een Banachruimte met norm $\|.\|$. Zij $f : [a,b] \to X$ een continue functie op $[a,b]$ en $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie van begrensde variatie. Dan is f Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g.*

Bewijs. Te laten zien dat er een $I \in X$ bestaat zodat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie bestaat zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}$ en bij deze partitie te kiezen strooiing $\underline{s}$ geldt:

$$\|S(\underline{t}, \underline{s}) - I\|_X < \epsilon.$$

Hierbij is $S(\underline{t}, \underline{s})$ de Riemann-Stieltjes-som en gelijk aan $\sum\limits_{i=1}^{n} f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$ en I is dan de integraal $\int_a^b f(t)dg(t)$.

Nodig is een kandidaat voor I.

Zij $\underline{t} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ een partitie van $[a,b]$ en $\underline{s}$ een bij $\underline{t}$ gekozen strooiing. De bijbehorende Riemann-Stieltjes-som is dan:

$$S(\underline{t}, \underline{s}) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))$$

Zij $\underline{\tau}$ een fijnere partitie dan $\underline{t}$ met $t_{k-1} = \tau_{k,0} \leq \tau_{k,1} \leq \cdots \leq \tau_{k,m_k} = t_k$ voor iedere $k \in \{l \in \mathbb{N} | 1 \leq l \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ of korter $k = 1..n$.

Zij $\underline{\sigma}$ een bij $\underline{\tau}$ gekozen strooiing met $\sigma_{k,i} \in \underline{\sigma}$ met $\tau_{k,i-1} \leq \sigma_{k,i} \leq \tau_{k,i}$ voor $k = 1..n$ en $i = 1..m_k$. De bij deze $\underline{\tau}$ en $\underline{\sigma}$ horende Riemann-Stieltjes-som is:

$$S(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})).$$

Dan volgt met

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m_k} (g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) &= g(\tau_{k,1}) - g(\tau_{k,0}) + g(\tau_{k,2}) - g(\tau_{k,1}) \\
&\quad + \cdots + g(\tau_{k,m_k}) - g(\tau_{k,m_{k-1}}) \\
&= -g(\tau_{k,0}) + g(\tau_{k,1}) - g(\tau_{k,1}) + g(\tau_{k,2}) \\
&\quad - \cdots + g(\tau_{k,m_{k-1}}) - g(\tau_{k,m_{k-1}}) + g(\tau_{k,m_k}) \\
&= -g(\tau_{k,0}) + g(\tau_{k,m_k}) \\
&= g(\tau_{k,m_k}) - g(\tau_{k,0}) \\
&= g(t_k) - g(t_{k-1})
\end{aligned}$$

de norm van het verschil van de twee Riemann-Stieltjes-sommen

$$\begin{aligned}
&\|S(\underline{\tau},\underline{\sigma}) - S(\underline{t},\underline{s})\|_X \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(s_k) \sum_{i=1}^{m_k}(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(\sigma_{k,i})(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} f(s_k)(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} (f(\sigma_{k,i}) - f(s_k))(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right\|_X .
\end{aligned}$$

Bovenstaande is af te schatten door gebruik te maken van het feit dat f continu is en g van begrensde variatie is.

De functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ is van begrensde variatie. Dat wil zeggen dat het supremum van de sommen van de lengte van de deelintervallen over alle mogelijke partities niet oneindig is:

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \right\} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{m_k} (g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right| \right\} < \infty$$

Noem dit supremum $V_{[a,b],g}$.

De functie $f : [a, b] \to X$ is continu en $[a, b]$ is compact dus is f uniform continu [2, 4-24]. Dus voor iedere $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor ieder tweetal punten $s, t \in [a, b]$ geldt:

$$|s - t| < \delta \Rightarrow \|f(s) - f(t)\|_X < \frac{\epsilon}{V_{[a,b],g}}$$

Dus, als de maaswijdten van $\underline{\tau}$ en $\underline{t}$ kleiner zijn dan δ, dan volgt:

$$\begin{aligned}
\|S(\underline{\tau},\underline{\sigma}) - S(\underline{t},\underline{s})\|_X &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} (f(\sigma_{k,i}) - f(s_k))(g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})) \right\|_X \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \|(f(\sigma_{k,i}) - f(s_k))\|_X \, |g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})| \\
&< \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{\epsilon}{V_{[a,b],g}} |g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})| \\
&= \frac{\epsilon}{V_{[a,b],g}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} |g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1})| \\
&< \frac{\epsilon}{V_{[a,b],g}} V_{[a,b],g} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Neem een rij partities $(\underline{t}_n)_{n=1}^{\infty}$ van $[a, b]$ zo dat $\underline{t}_{n+1}$ een fijnere partitie is dan $\underline{t}_n$ en zo dat de maaswijdte van $\underline{t}_n$ naar nul gaat als n naar oneindig gaat. Bij iedere partitie $\underline{t}_n$ is een strooiing $\underline{s}_n$ te kiezen. Zo ontstaat een rij Riemann-Stieltjes-sommen:

$$(S(\underline{t}_n, \underline{s}_n))_{n=1}^{\infty}$$

Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er dus een partitie $\underline{t}_n$ met maaswijdte $\mu(\underline{t}_n)$ van $[a,b]$ met een strooiing $\underline{s}_n$ zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}_m$ van $[a,b]$, dus $m \geq n$, met strooiing $\underline{s}_m$ geldt:

$$\|S(\underline{t}_m, \underline{s}_m) - S(\underline{t}_n, \underline{s}_n)\|_X < \epsilon$$

Ofwel de rij Riemann-Stieltjes-sommen is een Cauchy-rij. En omdat X een Banachruimte is, convergeert deze rij in X. Er bestaat dus een $I \in X$ zodat

$$I = \lim_{n\to\infty} S(\underline{t}_n, \underline{s}_n).$$

Neem $\lim_{n\to\infty} S(\underline{t}_n, \underline{s}_n)$ als kandidaat voor I.

Er volgt nu een gevalsonderscheiding voor $V_{[a,b],g}$.

In het geval dat $V_{[a,b],g} \neq 0$.

Zij $\epsilon > 0$. Kies een $\delta > 0$ zo dat voor iedere $s, \sigma \in [a,b]$ geldt:

$$|s - \sigma| < \delta \Rightarrow \|f(s) - f(\sigma)\|_X < \frac{\epsilon}{2V_{[a,b],g}}$$

Kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\underline{t}_N$ een partitie is met maaswijdte $\mu(\underline{t}_N) < \delta$ en

$$\|S(\underline{t}_n, \underline{s}_n) - I\|_X < \frac{\epsilon}{2} \text{ voor alle } n \geq N.$$

Zij $\underline{\tau}$ een fijnere partitie dan $\underline{t}_N$ en zij $\underline{\sigma}$ een gekozen stooiing bij $\underline{\tau}$ dan geldt:

$$\|S(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) - S(\underline{t}_N, \underline{s}_N)\|_X < \frac{\epsilon}{2V_{[a,b],g}} V_{[a,b],g} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Nu volgt dus

$$\begin{aligned}
\|S(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) - I\|_X &= \|S(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) - I + S(\underline{t}_N, \underline{s}_N) - S(\underline{t}_N, \underline{s}_N)\|_X \\
&= \|S(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) - S(\underline{t}_N, \underline{s}_N) + S(\underline{t}_N, \underline{s}_N) - I\|_X \\
&\leq \|S(\underline{\tau}, \underline{\sigma}) - S(\underline{t}_N, \underline{s}_N)\|_X + \|S(\underline{t}_N, \underline{s}_N) - I\|_X \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Zij $V_{[a,b],g} = 0$, dan geldt:

$$\begin{aligned}
\sup\{\sum_{k=1}^{n} \left|\sum_{i=1}^{m_k} (g(\tau_{k,i}) - g(\tau_{k,i-1}))\right|\} &= \sup\{\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \underline{t}, \forall k : |g(t_k) - g(t_{k-1})| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \underline{t}, \forall k : g(t_k) = g(t_{k-1}).
\end{aligned}$$

Dan is g een constante functie en dan zijn alle Riemann-Stieltjes-sommen gelijk aan nul en dus geldt: $I = 0$.

Dus $f : [a,b] \to X$ is Stieltjes-integreerbaar t.o.v. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, waarbij g van begrensde variatie is en $\int_a^b f(t)dg(t) = I$ $\square$

Stelling 4.2. *Zij X een Banachruimte en X' de duaal van X. Als $f : [a,b] \to X$ Stieltjes-integreerbaar is t.o.v. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan geldt: voor alle $\varphi \in X'$ is $t \mapsto \varphi(f(t))$ Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g en*

$$\varphi\left(\int_a^b f(t)dg(t)\right) = \int_a^b \varphi(f(t))dg(t).$$

Bewijs. De functie $\varphi : X \to \mathbb{R}$ is lineair en begrensd. Dus geldt:

$$\forall x \in X : \|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}} \leq \|\varphi\|_{X'}\|x\|_X$$

ofwel

$$\|\varphi(f(t))\|_{\mathbb{R}} \leq \|\varphi\|_{X'}\|f(t)\|_X.$$

Dat wil zeggen

$$|\varphi(f(t_i)) - \varphi(f(t_{i-1}))| \leq \|\varphi\|_{X'}\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_X.$$

Omdat f Stieltjes-integreerbaar is t.o.v. g bestaat $I = \int_a^b f(t)dg(t)$. Dus voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een partitie P van $[a,b]$ zodat voor iedere fijnere partitie $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ van $[a,b]$ en voor iedere keuze $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ met $i = 1..n$ geldt:

$$\left\|\sum_{i=1}^n f(s_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) - I\right\|_X < \epsilon.$$

Te bewijzen: voor iedere $\varphi \in X'$ is $t \mapsto \varphi(f(t))$ Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g en

$$\int_a^b \varphi(f(t))dg(t) = \varphi\left(\int_a^b f(t)dg(t)\right) = \varphi(I).$$

Ofwel te laten zien dat $\varphi(f(t))$ Stieltjes-integreerbaar is t.o.v. g en dat $\varphi\left(\int_a^b f(t)dg(t)\right)$ de oplossing is.

Zij $\epsilon > 0$. Neem de partitie $E = \underline{u}$ fijner dan P met $v_i \in [u_{i-1}, u_i]$ voor alle i zodat

$$\left\|\sum_{i=1}^n f(v_i)(g(u_i) - g(u_{i-1})) - I\right\|_X < \frac{\epsilon}{\|\varphi\|_{X'}}.$$

Dit kan, want f is Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g.

De functie $\varphi(f(t))$ is Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g als er een $\varphi(I) \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie P bestaat zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{u} = \{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$ dan P van $[a,b]$ en iedere bij $\underline{u}$ te keizen strooiing $\underline{v}$ geldt:

$$|S(\underline{u}, \underline{v}) - \varphi(I)| < \epsilon.$$

In dit geval geldt voor de Riemann-Stieltjes-som:

$$S(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \varphi(f(v_i))(g(u_i) - g(u_{i-1})).$$

Nu geldt:

$$
\begin{aligned}
|S(\underline{u}, \underline{v}) - \varphi(I)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(f(v_i))(g(u_i) - g(u_{i-1})) - \varphi(I) \right| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(f(v_i))(g(u_i) - g(u_{i-1})) - \varphi(I) \right\|_{\mathbb{R}} \\
&= \left\| \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} f(v_i))(g(u_i) - g(u_{i-1})) - I \right) \right\|_{\mathbb{R}} \\
&\leq \|\varphi\|_{X'} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(v_i))(g(u_i) - g(u_{i-1})) - I \right\|_{X} \\
&< \|\varphi\|_{X'} \frac{\epsilon}{\|\varphi\|_{X'}} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Dus is $\varphi(f(t))$ Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g en

$$
\varphi \left(\int_a^b f(t) dg(t) \right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dg(t).
$$

$\square$

Nu volgen twee voorbeelden waarbij vectoren van eindige en oneindige dimensie behandeld worden.

Voorbeeld 4.3 (Een integraal in een eindige dimensie)**.**
In de Banachruimte $X = \mathbb{R}^2$ geldt dat de integraal van een vector gelijk is aan de vector van de integralen van de componenten. Dit is een uitwerking in een twee-dimensionale situatie. Voor een eindige n-dimensionale ruimte gaat dit analoog.

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ Riemann-integreerbaar dan is

$$
\int_a^b f(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \int_a^b f_2(t) dt \end{pmatrix}.
$$

Er bestaat een $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zo dat voor alle $\epsilon > 0$ er een partitie bestaat zodat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}$ en voor iedere bij $\underline{t}$ te kiezen strooiing $\underline{s}$ geldt:

$$
\|S_f(\underline{t}, \underline{s}) - I\|_{\mathbb{R}^2} = \left\| \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(t_k - t_{k-1}) - I \right\|_{\mathbb{R}^2} < \epsilon.
$$

Nu geldt dus:

$$\begin{aligned}
\|S_f(\underline{t},\underline{s}) - I\|_{\mathbb{R}^2} &= \left\| \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(t_k - t_{k-1}) - I \right\|_{\mathbb{R}^2} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} f_1(s_k) \\ f_2(s_k) \end{pmatrix} (t_k - t_{k-1}) - \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} f_1(s_k)(t_k - t_{k-1}) - I_1 \\ \sum_{k=1}^{n} f_2(s_k)(t_k - t_{k-1}) - I_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} S_{f_1}(\underline{t},\underline{s}) - I_1 \\ S_{f_2}(\underline{t},\underline{s}) - I_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \\
&= \sqrt{(S_{f_1}(\underline{t},\underline{s}) - I_1)^2 + (S_{f_2}(\underline{t},\underline{s}) - I_2)^2} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Omdat geldt:

$$\sqrt{(S_{f_1}(\underline{t},\underline{s}) - I_1)^2} \leq \sqrt{(S_{f_1}(\underline{t},\underline{s}) - I_1)^2 + (S_{f_2}(\underline{t},\underline{s}) - I_2)^2} < \epsilon$$

en ook

$$\sqrt{(S_{f_2}(\underline{t},\underline{s}) - I_2)^2} \leq \sqrt{(S_{f_1}(\underline{t},\underline{s}) - I_1)^2 + (S_{f_2}(\underline{t},\underline{s}) - I_2)^2} < \epsilon$$

zijn de beide componenten f_1 en f_2 integreerbaar.

Andersom: als de componenten f_1 en f_2 integreerbaar zijn dan is de vector ook integreerbaar.

Namelijk, zij voor $i \in \{1,2\}$ de functies $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar. Dan bestaan er getallen I_i zo dat voor alle $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} > 0$ een partitie van $[a,b]$ bestaat zodat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}$ en voor iedere bij $\underline{t}$ te kiezen strooiing $\underline{s}$ geldt:

$$|S_{f_i}(\underline{t},\underline{s}) - I_i| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_i(s_k)(t_k - t_{k-1}) - I_i \right| < \epsilon_i.$$

Dan volgt:

$$\|S_f(\underline{t},\underline{s}) - I\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{(S_{f_1}(\underline{t},\underline{s}) - I_1)^2 + (S_{f_2}(\underline{t},\underline{s}) - I_2)^2} < \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} = \epsilon.$$

Voorbeeld 4.4 (Een integraal in een oneindige dimensie)**.**

Zij $f : [0,1] \to C_{[a,b]}$ met $a > 0$ gegeven door $t \mapsto x^t$ en $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeven door $t \mapsto t$.
Hierbij is

$$x^t = \begin{pmatrix} a^t \\ \vdots \\ b^t \end{pmatrix}$$

een vector met oneindig veel componenten.

De ruimte $C_{[a,b]}$ met $a > 0$ van continu functies en standaardnorm $\|f\|_{C_{[a,b]}} = \sup\{|f_x(t)| : x \in [a,b]\}$ is een Banachruimte [9, 2.4].

Omdat f een continue functie is van $[0,1]$ naar een Banachruimte en g van begrensde variatie is [5, blz. 22], geldt bovenstaande stelling 4.1 en is f Stieltjes-integreerbaar t.o.v. g. Er is dus een $I = \int_0^1 x^t dt$ zo dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie bestaat zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}$ van $[0,1]$ en iedere bij $\underline{t}$ te kiezen strooiing $\underline{s}$ geldt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x^{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \int_0^1 \begin{pmatrix} a^t \\ \vdots \\ b^t \end{pmatrix} dt \right\|_{C_{[a,b]}} < \epsilon.$$

Geldt nu dat:

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} a^t \\ \vdots \\ b^t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^1 a^t dt \\ \vdots \\ \int_0^1 b^t dt \end{pmatrix} ?$$

Welnu,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} x^{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \begin{pmatrix} \int_0^1 a^t dt \\ \vdots \\ \int_0^1 b^t dt \end{pmatrix} \right\|_{C_{[a,b]}} &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} x^{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \int_0^1 x^t dt \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} x^{s_i} dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} x^t dt \right) \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x^{s_i} - x^t) dt \right| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x^{s_i} - x^t) dt \right| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x^{s_i} - x^t| dt \quad \text{want } dt > 0!
\end{aligned}$$

Omdat

$$|x^{s_i} - x^t| \le \sup_{x\in[a,b]} |x^{s_i} - x^t| = \|x^{s_i} - x^t\|_{C_{[a,b]}}$$

en f continu is geldt voor iedere $\epsilon_1 > 0$ dat er een $\delta > 0$ is zo dat

$$0 < |s_i - t|, \delta \Rightarrow \|x^{s_i} - x^t\|_{C_{[a,b]}} < \epsilon_1.$$

Dan geldt dus:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^n x^{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \begin{pmatrix} \int_0^1 a^t dt \\ \vdots \\ \int_0^1 b^t dt \end{pmatrix} \right\|_{C_{[a,b]}} &\leq \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x^{s_i} - x^t| dt \\
&< \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \epsilon_1 dt \\
&= \epsilon_1 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \\
&= \epsilon_1 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \epsilon_1
\end{aligned}$$

Dus voor $\epsilon_1 = \epsilon$ geldt dat

$$\left\| \sum_{i=1}^n x^{s_i}(t_i - t_{i-1}) - \begin{pmatrix} \int_0^1 a^t dt \\ \vdots \\ \int_0^1 b^t dt \end{pmatrix} \right\|_{C_{[a,b]}} < \epsilon$$

en dus

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} a^t \\ \vdots \\ b^t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^1 a^t dt \\ \vdots \\ \int_0^1 b^t dt \end{pmatrix}.$$

Stelling 4.5 (Partiële integratie). *Zij X een Banachruimte, $f : [a,b] \to X$ en $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Als f Stieltjes-integreerbaar is t.o.v. g dan is g Stieltjes-integreerbaar t.o.v. f en*

$$\int_a^b f(t)dg(t) = -\int_a^b g(t)df(t) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bewijs. Gegeven is dat f Stieltjes-integreerbaar is t.o.v. g. Dus $\int_a^v f(t)dg(t)$ bestaat.

Ofwel voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een partitie $\underline{t}$ met $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{\tau}$ en voor iedere keuze van $\sigma_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ met $k = 1..n$ geldt:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f(\sigma_k)(g(\tau_k) - g(\tau_{k-1})) - \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X < \epsilon.$$

Beschouw nu de volgende partitie:

$$a = t_0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq t_N = b.$$

De partitie bevat de deelintervallen $[t_i, t_i]$ voor $i = 0..n$ en zijn niet fijner te maken. Deze intervallen zullen dus ook voorkomen in iedere fijnere partitie. Beschouw nu de fijnere partitie:

$$a = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_M = b.$$

Kies bij deze fijnere partitie een strooiing $\underline{\zeta}$ met voor iedere $\zeta_k \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$ voor iedere $k = 1..M$. Dus komt iedere t_i met $i = 0..N$ voor als een ζ_k. Dus, met $\zeta_0 := a$ een toegevoegd punt, is

$$a = \zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \cdots \leq \zeta_M = b$$

van $[a, b]$ een fijnere partitie dan

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_N = b.$$

Bovendien volgt uit $\theta_{k-1} \leq \zeta_k \leq \theta_k \leq \zeta_{k+1}$ voor $k = 1..M-1$ met toevoeging van $\zeta_0 := a$ dat $\theta_k \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ voor $k = 0..M-1$. Met andere woorden: bij partitie $\underline{\zeta} = \{\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_M\}$ is $\underline{\theta} = \{\theta_k | \zeta_k \leq \theta_k \leq \zeta_{k+1}, 0 \leq k \leq M-1\}$ een strooiing.
Hieruit volgt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{M-1} f(\theta_k)(g(\zeta_{k+1}) - g(\zeta_k)) - \int_a^b f(t) dg(t) \right\|_X < \epsilon.$$

Ook geldt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k) \left(f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k) f(\zeta_{k+1}) - \sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k) f(\zeta_k) \\
&= \sum_{k=1}^{M} g(\theta_{k-1}) f(\zeta_k) - \sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k) f(\zeta_k) \\
&= \sum_{k=1}^{M} g(\theta_{k-1}) f(\zeta_k) - \left(\sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k) f(\zeta_k) + g(\theta_M) f(\zeta_M) - g(\theta_M) f(\zeta_M) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{M} g(\theta_{k-1}) f(\zeta_k) - \left(g(\theta_0) f(\zeta_0) + \sum_{k=1}^{M} g(\theta_k) f(\zeta_k) - g(\theta_M) f(\zeta_M) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{M} g(\theta_{k-1}) f(\zeta_k) - \sum_{k=1}^{M} g(\theta_k) f(\zeta_k) + g(\theta_M) f(\zeta_M) - g(\theta_0) f(\zeta_0) \\
&= \sum_{k=1}^{M} g(\theta_{k-1}) f(\zeta_k) - \sum_{k=1}^{M} g(\theta_k) f(\zeta_k) + g(b) f(b) - g(a) f(a) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \left(g(\theta_{k-1}) - g(\theta_k) \right) f(\zeta_k) + g(b) f(b) - g(a) f(a) \\
&= -\sum_{k=1}^{M} f(\zeta_k) \left(g(\theta_k) - g(\theta_{k-1}) \right) + g(b) f(b) - g(a) f(a).
\end{aligned}$$

Bestaat nu $\int_a^b g(t) df(t)$ en is deze gelijk aan $-\int_a^b f(t) dg(t) + f(b)g(b) - f(a)g(a)$?
Bestaat er voor iedere $\epsilon > 0$ een partitie zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{\zeta}$ met

strooiing $\underline{\theta}$ geldt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k)(f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k)) - \int_a^b g(t)df(t) \right\|_X < \epsilon \ ?$$

Het antwoord is ja, want

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k)(f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k)) - \int_a^b g(t)df(t) \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{M-1} g(\theta_k)(f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k)) - \left(- \int_a^b f(t)dg(t) + f(b)g(b) - f(a)g(a) \right) \right\|_X \\
&= \Bigg\| - \sum_{k=1}^{M} f(\zeta_k) \left(g(\theta_k) - g(\theta_{k-1}) \right) + g(b)f(b) - g(a)f(a) \\
&\quad + \int_a^b f(t)dg(t) - f(b)g(b) + f(a)g(a) \Bigg\|_X \\
&= \left\| - \sum_{k=1}^{M} f(\zeta_k) \left(g(\theta_k) - g(\theta_{k-1}) \right) + \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X \\
&= \left\| - \left(\sum_{k=1}^{M} f(\zeta_k) \left(g(\theta_k) - g(\theta_{k-1}) \right) - \int_a^b f(t)dg(t) \right) \right\|_X \\
&= |-1| \left\| \sum_{k=1}^{M} f(\zeta_k) \left(g(\theta_k) - g(\theta_{k-1}) \right) - \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{M} f(\zeta_k) \left(g(\theta_k) - g(\theta_{k-1}) \right) - \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X < \epsilon.
\end{aligned}$$

Dus

$$\int_a^b f(t)dg(t) = - \int_a^b g(t)df(t) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

□

In het bewijs van de volgende stelling zal gebruikt gemaakt worden van de norm in een ruimte van continue functies met waarden in een Banachruimte. Vandaar dat de volgende definitie opgenomen is.

Definitie 4.6 (De norm in de ruimte van continue functies)**.**

Zij X een Banachruimte en $[a,b] \subset \mathbb{R}$. De verzameling *continue functies* van $[a,b]$ naar X is de ruimte met de volgende notatie: $C([a,b];X)$.
De *standaardnorm* van een functie $f \in C([a,b];X)$ is:

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\|_X : t \in [a,b].$$

De ruimte $(C([a,b];X), \|.\|_\infty)$ is een Banachruimte en omdat een norm een afbeelding is naar $\mathbb{R}$ geldt dat $\|f\|_\infty < \infty$ [9, 1.37, 1.39, 2.1, 2.4 en 2.27].

Stelling 4.7. *Zij X een Banachruimte. Als $f : [a,b] \to X$ continu is en $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is dan geldt:*

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Bewijs. Te laten zien dat $f(t)g'(t)$ Riemann-integreerbaar is in X en dat de integraal $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ gelijk is aan $\int_a^b f(t)dg(t)$ en dus dat voor iedere ϵ er een partitie bestaat zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{t}$ en voor iedere bij $\underline{t}$ te kiezen stooiing $\underline{s}$ geldt:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f(s_k)g'(s_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X < \epsilon.$$

De functie g is continu differentieerbaar en dat impliceert dat g uniform differentieerbaar is op de manier dat voor iedere ϵ er een $\delta < 0$ bestaat zo dat voor elk tweetal punten $s, t \in [a,b]$ geldt:

$$0 < |s-t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(s) - g(t)}{s-t} - g'(t) \right| < \epsilon.$$

Dat dit correct is volgt uit het volgende. Definieer

$$h(s,t) := \begin{cases} \frac{g(s)-g(t)}{s-t}, & s \neq t \\ g'(t), & s = t. \end{cases}$$

Dan is h continu op $[a,b] \times [a,b]$ en vanwege de compactheid van $[a,b] \times [a,b]$ ook uniform continu. Dus voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor ieder tweetal punten $(s,t), (s_0,t_0) \in [a,b] \times [a,b]$ geldt:

$$\|(s,t) - (s_0,t_0)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta \Rightarrow |h(s,t) - h(s_0,t_0)| < \epsilon.$$

Met $t = s = t_0$ volgt dan

$$\begin{aligned} \|(s,t) - (s_0,t_0)\|_{\mathbb{R}^2} &= \|(s,t) - (s,t)\|_{\mathbb{R}^2} \\ &= \sqrt{(s-t)^2 + (t-t)^2} \\ &= \sqrt{(s-t)^2} \\ &= |s-t|. \end{aligned}$$

En dus

$$\|(s,t) - (t,t)\|_{\mathbb{R}^2} = |s-t| < \delta \Rightarrow |h(s,t) - h(t,t)| = \left| \frac{g(s) - g(t)}{s-t} - g'(t) \right| < \epsilon.$$

Voor $\epsilon > 0$ kies $\delta > 0$ zo dat

$$0 < |s-t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{g(s) - g(t)}{s-t} - g'(t) \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)\|f\|_\infty + 1}.$$

Dan volgt de volgende afschatting:

$$0 < |s-t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t) - g'(t)(s-t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)\|f\|_\infty + 1}|s-t|.$$

De functie g is continu differentieerbaar. Dat wil zeggen dat g differentieerbaar is en dat de 1^e afgeleide continu is. De functie g is dan ook continu en omdat $[a, b]$ compact is volgt dat g uniform continu en begrensd is. Een op een compact interval continue functie waarvan de afgeleide begrensd is op dat interval is van begrensde variatie [2, 8-6]. De functie g is dus van begrensde variatie.

Nu geldt, vanwege de continuïteit van f, dat f Stieltjes-integreerbaar is in X t.o.v. g en dus bestaat de integraal

$$\int_a^b f(t)dg(t).$$

Dat wil zeggen dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een partitie $\underline{t}$ bestaat zo dat voor iedere fijnere partitie $\underline{\tau}$ en iedere bij $\underline{\tau}$ te kiezen strooiing $\underline{\sigma}$ geldt:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\left(g(\tau_k) - g(\tau_{k-1})\right) - \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X < \frac{\epsilon}{2}$$

De partitie $\underline{t}$ mag zo gekozen worden dat $\mu(\underline{t}) < \delta$ en dus dat ook $\mu(\underline{\tau}) < \delta$. Omdat $\sigma_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ geldt voor iedere $k = 1..n$ dat $\sigma_k - \tau > 0$ en $\tau_k - \sigma_k > 0$.

Volgt hier nu uit dat

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f(s_k)g'(s_k)(t_k - t_{k-1}) - \int_a^b f(t)dg(t) \right\|_X < \epsilon?$$

Ja, als volgt:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)g'(\sigma_k)(\tau_k-\tau_{k-1}) - \int_a^b f(t)dg(t)\right\|_X \\
&\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)g'(\sigma_k)(\tau_k-\tau_{k-1}) - S_{f,g}(\underline{\tau},\underline{\sigma})\right\|_X + \left\|S_{f,g}(\underline{\tau},\underline{\sigma}) - \int_a^b f(t)dg(t)\right\|_X \\
&< \left\|\sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)g'(\sigma_k)(\tau_k-\tau_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)(g(\tau_k)-g(\tau_{k-1}))\right\|_X + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} f(\sigma_k)\left(g'(\sigma_k)(\tau_k-\tau_{k-1}) - (g(\tau_k)-g(\tau_{k-1}))\right)\right\|_X + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|f\|_\infty \left|g'(\sigma_k)(\tau_k-\tau_{k-1}) - (g(\tau_k)-g(\tau_{k-1}))\right| + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{want } \|f\|_X \leq \|f\|_\infty \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \left|g'(\sigma_k)(\tau_k-\sigma_k+\sigma_k-\tau_{k-1}) - (g(\tau_k)-g(\sigma_k)+g(\sigma_k)-g(\tau_{k-1}))\right| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} \left|\left(g'(\sigma_k)(\tau_k-\sigma_k) - (g(\tau_k)-g(\sigma_k))\right)\right. \\
&\quad \left. + \left((g(\tau_{k-1})-g(\sigma_k)) + g'(\sigma_k)(\sigma_k-\tau_{k-1})\right)\right| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (|g'(\sigma_k)(\tau_k-\sigma_k) - (g(\tau_k)-g(\sigma_k))| \\
&\quad + |(g(\tau_{k-1})-g(\sigma_k)) - g'(\sigma_k)(\tau_{k-1}-\sigma_k)|) + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (\frac{\epsilon|\tau_k-\sigma_k|}{2(b-a)\|f\|_\infty+1} + \frac{\epsilon|\tau_{k-1}-\sigma_k|}{2(b-a)\|f\|_\infty+1} + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (\frac{\epsilon|\tau_k-\sigma_k| + \epsilon|\tau_{k-1}-\sigma_k|}{2(b-a)\|f\|_\infty+1} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} (\frac{\epsilon(|\tau_k-\sigma_k| + |\tau_{k-1}-\sigma_k|)}{2(b-a)\|f\|_\infty} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (|\tau_k-\sigma_k| + |\sigma_k-\tau_{k-1}|) + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (\tau_k-\sigma_k+\sigma_k-\tau_{k-1}) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Dus

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

□

Voorbeeld 4.8.

Zij $h(s,t) = \sin(st)$ voor $s,t \in [0,1]$. Neem t vast. De functie

$$\begin{aligned} h(\cdot,t) : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto h(s,t) \end{aligned}$$

is continu voor iedere vaste waarde van t. Ofwel $h(\cdot,t) \in C([0,1])$ voor iedere $t \in [0,1]$ en $C([0,1])$ is een Banachruimte.

Is de functie

$$\begin{aligned} k : [0,1] &\to C([0,1]) \\ t &\mapsto h(\cdot,t) \end{aligned}$$

continu?

Bestaat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat voor iedere $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ geldt:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow \|\sin(\alpha_1 s) - \sin(\alpha_2 s)\|_{C([0,1])} < \epsilon \ \ ?$$

Hierbij is

$$\|\sin(\alpha_1 s) - \sin(\alpha_2 s)\|_{C([0,1])} = \sup\{|\sin(\alpha_1 s) - \sin(\alpha_2 s)| : s \in [0,1]\}$$

de norm.

Zij $\epsilon > 0$ gegeven:

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha_1 s) - \sin(\alpha_2 s)| &= |2\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha_1 s - \alpha_2 s)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha_1 s + \alpha_2 s)\right)| \\ &= 2|\sin\left(\frac{s}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\right)| \cdot |\cos\left(\frac{s}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right)| \\ &\leq 2|\sin\left(\frac{s}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\right)| \quad \text{want } \forall y \in [0,1] : |\cos(y)| \leq 1 \end{aligned}$$

Omdat uit $\sin(-y) = -\sin(y)$ volgt voor $y \in [0,1]$ dat $|\sin(y)| = \sin|y|$ en $\forall y \in [0,1]$ geldt $y - \sin(y) \geq 0$ en gaat de afschatting als volgt verder:

$$\begin{aligned} 2|\sin\left(\frac{s}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\right)| &= 2\sin\left(|\frac{s}{2}| \cdot |\alpha_1 - \alpha_2|\right) \\ &\leq 2\sin\left(\frac{1}{2}|\alpha_1 - \alpha_2|\right) \quad (0 \leq s \leq 1) \\ &\leq 2 \cdot \frac{1}{2}|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_1 - \alpha_2| \end{aligned}$$

Dus:

$$\|\sin(\alpha_1 s) - \sin(\alpha_2 s)\|_{C([0,1])} \leq \sup\{|\alpha_1 - \alpha_2| : s \in [0,1]\}.$$

Voor $\delta = \epsilon$ geldt dus:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow \|\sin(\alpha_1 s) - \sin(\alpha_2 s)\|_{C([0,1])} < \epsilon$$

en is $t \mapsto h(\cdot,t)$ continu op $[0,1]$.

Dus is $t \mapsto (s \mapsto h(s,t))$ continu van $[0,1]$ naar $C[0,1]$. Omdat $g(t) = e^t$ van begrensde variatie is op $[0,1]$ bestaat de integraal:

$$\int_0^1 t \mapsto (s \mapsto \sin(st))d(e^t)$$

en is een element van $C[0,1]$.

Met behulp van bovenstaande stelling en stelling 4.2 is deze integraal te bepalen:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 t \mapsto (s \mapsto \sin(st))d(e^t)\right)(s) &= \int_0^1 \sin(st)d(e^t) \\
&= -\int_0^1 e^t d(\sin(st)) + e \cdot \sin(s) \\
&= -\int_0^1 se^t \cos(st)dt + e \cdot \sin(s) \\
&= -\int_0^1 s \cdot \cos(st)d(e^t) + e \cdot \sin(s) \\
&= -\left(-\int_0^1 se^t d(\cos(st)) + se \cdot \cos(s) - s\right) + e \cdot \sin(s) \\
&= \int_0^1 -s^2 e^t \sin(st)dt - se \cdot \cos(s) + s + e \cdot \sin(s).
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$(1+s^2)\int_0^1 \sin(st)d(e^t) = e \cdot \sin(s) - se \cdot \cos(s) + s.$$

En is de integraal bepaald:

$$\int_0^1 t \mapsto (s \mapsto \sin(st)d(e^t) = s \mapsto \frac{1}{1+s^2}\left(e \cdot \sin(s) - se \cdot \cos(s) + s\right).$$

Referenties

[1] J.H.J. Almering, *Analyse*, 5e druk, Delftse Uitgevers Maatschappij b.v., 1987.

[2] T. Apostel, *Mathematical Analysis*, 1e druk, Addison-Wesley, 1963.

[3] G. van Dijk, *About the life of Thomas Johannes Stieltjes*, Mathematisch Instituut Leiden.

[4] E. Coplakova en B. Edixhoven, *Wiskundige Structuren*, Mathematisch Instituut Leiden, 2008.

[5] O. van Gaans, *Topics in analysis 1 - Real functions*, Mathematisch Instituut Leiden, 2008.

[6] T.H. Hildebrandt, Definitions of Stieltjes Integrals of the Riemann Type, *The American Mathematical Monthly*, **45** (1938), no. 5, 265-278.

[7] S. Pollard, The Stieltjes integral and its generalizations, *Quarterly Journal of Mathematics*, **49** (1920), no. 3, 73-138.

[8] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e druk, McGraw-Hill International Editions, 1976.

[9] B.P. Rynne en M.A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, 2e druk, Springer, 2008.

[10] Š. Schwabik, A note on integration by part for abstract Perron-Stieltjes integrals, *Mathematica Bohemica*, **126** (2001), no. 3, 613-629.

[11] T.J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, *Annales de la Facultaté des sciences de Toulouse*, **4** (1995), no. 1, 1-35.