Oneindige sommen: voorbereidende opgaven

Het onderwerp van het hoorcollege in de ochtend bij het Proefstuderen van Wiskunde op vrijdag 17 november 2023 is ‘Oneindige sommen’. Hier vind je enkele opgaven als voorbereiding. Maak je geen zorgen als het niet lukt. Het kan helpen als je alvast over de opgaven nadenkt, maar zij zijn niet nodig om het college te kunnen volgen. Veel succes!

Iemand snijdt van een taart de helft af. Van de overgebleven helft snijdt hij weer de helft af. Van het dan overgebleven deel snijdt hij weer de helft af.

1. (a) Hoeveel van de taart wordt bij de tweede keer snijden afgesneden? En bij de derde keer? En bij de vierde?

(b) Ga na dat er bij de tiende keer snijden $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$-de deel van de taart wordt afgesneden en dat er dan in totaal

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}$$

van de taart is afgesneden.

(c) We stellen ons voor dat het snijden oneindig lang doorgaat. Kun je met een schets van de taart zien hoe groot

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots$$

is? (We bedoelen met de puntjes aan het einde dat de som “oneindig lang” doorloopt.)

Een zuinigere kennis snijdt een taart eerst in vier gelijke stukken. Eén kwart is voor zijn eerste gast. Dan snijdt hij het tweede kwart in vier gelijke stukken en geeft zijn tweede gast één zo’n stuk. Eén van die drie andere stukken snijdt hij weer in vier stukken, waarvan er één voor de derde gast is, etc.

2. Beredeneer (met een schets van een taart) dat

$$\tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

kleiner dan $\frac{1}{2}$ is voor ieder natuurlijk getal n. Kun je een kleinere bovengrens geven dan $\frac{1}{2}$?

Een oneindige som van de vorm

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

heet een *meetkundige reeks* en het getal x heet de *reden* van de reeks. De vraag rijst wat zo’n oneindige som eigenlijk betekent. We stellen ons voor dat je zo’n som stapsgewijs uitrekent. Je begint met de eerste term, dan tel je de tweede erbij op, dan ook de derde, dan de vierde, etc. Als de subtotalen steeds dichter bij een bepaalde waarde komen te liggen, dan is die waarde de uitkomst van de oneindige som. (Dit kan men veel preciezer beschrijven, maar voorlopig hebben we hier genoeg aan).
Er kan worden afgeleid dat

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad (*)$$

mits x een getal is met $-1 < x < 1$.

3. (a) Schrijf

$$1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5$$

uit in decimale breuken.

(b) Aan welk getal is

$$1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\left(\frac{1}{10}\right)^4+\left(\frac{1}{10}\right)^5+\cdots$$

volgens jou gelijk? Klopt dat met de formule ($*$)?

(c) Bereken

$$\tfrac{1}{4}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2+\left(\tfrac{1}{4}\right)^3+\left(\tfrac{1}{4}\right)^4+\cdots$$

met behulp van formule ($*$).

4. (a) Bereken

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^9+\cdots.$$

(Hint: haal een geschikte factor buiten haakjes.)

(b) Bereken

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{1}{3}\right)^7+\left(\frac{1}{3}\right)^9+\cdots.$$

5. Kun je een getal bedenken dat gelijk is aan

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots\ ?$$

Functies van de vorm

$$2x^2-3x+6,\quad ax+b,\quad 3+x+3x^2-27x^3+100x^5,\ \text{etc.}$$

heten *polynomen*. De algemene vorm van een polynoom is

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\cdots+c_nx^n,$$

waar de getallen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ de *coëfficiënten* heten. Het getal n heet de *graad* van het polynoom (mits $c_n \neq 0$). Om de regelmaat goed te laten zien hebben we er hier voor gekozen om de eerste zes termen en de laatste term uit te schrijven en de tussenliggende termen te vervangen door drie puntjes. Voor kleinere n moet dit niet te letterlijk worden genomen: als $n = 3$ komen de termen met x^4 en x^5 niet voor.

6. Bekijk het polynoom

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.$$

Bereken $f(\frac{1}{10})$ (geschreven als decimale breuk).

Machtreeksen zijn functies van de vorm

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\cdots.$$

De som heeft hier oneindig veel termen (al mogen die wel nul zijn). Formule ($*$) laat zien dat de functie $f(x)=\frac{1}{1-x}$ gelijk is aan de machtreeks

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$$

voor x met $-1<x<1$.

7.* Maak met behulp van differentiëren aannemelijk dat

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$$

en bereken

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots .$$

Tot ziens op 17 november!

Leiden University
Onno van Gaans