De wiskunde van het jongleren

Proefstuderen Wiskunde, Leiden, 24 november 2017

Ronald van Luijk

Jongleurs zijn al eeuwen op zoek naar nieuwe jongleerpatronen. In dit college bespreken we een beschrijving van **alle** mogelijke repeterende patronen. Enkele van deze patronen zullen ook daadwerkelijk gegooid worden, waaronder een nieuw patroon dat door wiskundigen in de jongleerwereld is geïntroduceerd.

Het huiswerk voor dit college bestaat uit het leren van enkele basisbegrippen uit de wiskunde die tijdens het college gebruikt zullen worden. Deze begrippen komen in het eerste semester van de propedeuse ook uitvoerig aan bod. Als voorbereiding op het college zijn opgaven 1,2 en 4 het belangrijkst.

1. Verzamelingen

We beginnen met de notatie voor enkele verzamelingen.

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ is de verzameling van alle *gehele* getallen.
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van alle *reële* getallen.
- $\mathbb{R}_{>0}$ is de verzameling van alle *positieve* reële getallen.
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ is de verzameling van alle *niet-negatieve* reële getallen.

De notatie '$x \in X$' betekent dat x een element is van de verzameling X.
Zo betekent de notatie '$r \in \mathbb{R}_{>0}$' bijvoorbeeld dat r een positief reëel getal is.
De notatie '$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$' betekent dat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ allemaal elementen zijn van X.
We noemen een verzameling X *eindig* als X maar eindig veel elementen bevat.

2. Functies

Als f een functie is van een verzameling A naar een verzameling B, dan noemen we de verzameling A het *domein* van f en de verzameling B het *codomein* van f. De functie f stuurt elk element a van A naar zijn beeld $f(a)$ in B. Als we het domein en het codomein van f willen aangeven, dan schrijven we

$$f\colon A \to B$$

voor deze functie. Enkele voorbeelden zijn:

- de functie $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $F(x) = x^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
- de functie $G\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ gegeven door $G(x) = x^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$;
- de functie $H\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeven door $H(x) = x^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
- de functie $K\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $K(x) = \sin(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
- de functie $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $L(x) = e^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
- de functie $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ gegeven door $M(x) = e^x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Merk op dat bijvoorbeeld F en G verschillende functies zijn, want ze hebben verschillende domeinen. Ook L en M zijn verschillende functies, want die hebben verschillende codomeinen. Het domein en het codomein zijn onderdeel van de functie!

3. Eigenschappen van functies

Stel A en B zijn verzamelingen en $f\colon A \to B$ is een functie.
We noemen f *injectief* als voor elke twee elementen $a, a' \in A$ met $a \neq a'$ geldt $f(a) \neq f(a')$.
We noemen f *surjectief* als er voor elk element $b \in B$ een element $a \in A$ is met $f(a) = b$.
We noemen f *bijectief* als f zowel injectief als surjectief is.

Met andere woorden, een functie $f\colon A \to B$ is surjectief als elk element $b \in B$ het beeld is van *minstens* één element $a \in A$, terwijl f injectief is als elk element $b \in B$ het beeld is van *hooguit* één element $a \in A$. De functie f is bijectief als elk element $b \in B$ het beeld is van *precies* één element $a \in A$.

Opgave 1. Bepaal van de functies F, G, H, K, L, M of ze injectief zijn, of ze surjectief zijn en of ze bijectief zijn.

Opgave 2. Geef een functie die wel surjectief, maar niet injectief is.

Opgave 3. Stel A en B zijn verzamelingen en $f\colon A \to B$ is een bijectieve functie. Laat zien dat er dan een functie $g\colon B \to A$ is zodanig dat voor elke $a \in A$ geldt $g(f(a)) = a$ en voor elke $b \in B$ geldt $f(g(b)) = b$. [We noemen deze functie g de *inverse functie* van f en schrijven vaak $g = f^{-1}$.]

Opgave 4. Welke van de functies F, G, H, K, L, M hierboven zijn bijectief (zie opgave 1)? Wat zijn de bijbehorende inverse functies?

4. Functies tussen eindige verzamelingen

Opgave 5. Stel A en B zijn eindige verzamelingen en $f\colon A \to B$ is een functie.

(1) Laat zien dat als f injectief is, dat B dan minstens zoveel elementen bevat als A.
(2) Laat zien dat als f surjectief is, dat A dan minstens zoveel elementen bevat als B.
(3) Concludeer dat als f bijectief is, dat A en B dan evenveel elementen bevatten.

Opgave 6. Stel A en B zijn eindige verzamelingen met evenveel elementen en $f\colon A \to B$ is een functie.

(1) Laat zien dat als f injectief is, dat f dan ook surjectief (en dus bijectief) is.
(2) Laat zien dat als f surjectief is, dat f dan ook injectief (en dus bijectief) is.

5. Jongleerfuncties

Een *permutatie* van een verzameling X is een bijectieve functie van X naar X zelf.

Tijdens het college zullen we definiëren wat een *jongleerfunctie* is. Een voorbeeld is de functie $P\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeven door

$$P(a) = \begin{cases} a+1 & \text{als } a \text{ even is,} \\ a+3 & \text{als } a \text{ oneven is.} \end{cases}$$

We zullen bespreken of P een permutatie van $\mathbb{Z}$ is.

Om nog meer voorbeelden te kunnen geven, introduceren we eerst een nieuwe notatie. Als n een positief geheel getal is en a is een willekeurig geheel getal, dan noteren we de rest van a bij deling door n als $[a]_n$. Deze rest is een getal tussen 0 en $n-1$ (inclusief 0 en $n-1$). Er geldt bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} [7]_3 &= 1, && \text{want } 7 = 2 \cdot 3 + 1, \\ [35]_8 &= 3, && \text{want } 35 = 4 \cdot 8 + 3, \quad \text{en} \\ [-11]_8 &= 5, && \text{want } -11 = -2 \cdot 8 + 5. \end{aligned}$$

Tijdens het college zullen we uitzoeken hoe we snel kunnen inzien of functies zoals

$$Q(a) = \begin{cases} a+4 & \text{als } [a]_3 = 0, \\ a+4 & \text{als } [a]_3 = 1, \\ a+1 & \text{als } [a]_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{en} \qquad R(a) = \begin{cases} a+31 & \text{als } [a]_3 = 0, \\ a+3 & \text{als } [a]_3 = 1, \\ a+2017 & \text{als } [a]_3 = 2 \end{cases}$$

permutaties zijn van $\mathbb{Z}$. We zullen zien dat dit ons in staat stelt om alle repeterende jongleerpatronen te beschrijven.

Opgave 7*. Kun je al voor het college zien of de functies P, Q en R permutaties van $\mathbb{Z}$ zijn?