Faculteit der Rechtsgeleerdheid
Instituut Fiscale en Economische Vakken
Afdeling Economie

Bezoekadres: Steenschuur 25, 2311 XK Leiden
Correspondentieadres: Postbus 9520, 2300 RA Leiden
tel.: 071- 527 7756 / 1571
e-mail: economie@law.leidenuniv.nl
http://www.economie.leidenuniv.nl

ELEMENTAIRE WIS- EN REKENKUNDE

Een inleidende tekst om de kennis op te frissen, bedoeld voor zelfstudie

B.C.J. van Velthoven
3e editie, mei 2016

INHOUDSOPGAVE

INLEIDING

In de cursussen van de afdeling Economie (collegestof en opgaven) wordt kennis van een aantal elementaire wis- en rekenkundige technieken bekend verondersteld. Daarbij gaat het om het lezen van grafieken, het tekenen van rechte lijnen, het oplossen van lineaire vergelijkingen, het werken met percentages, e.d. De veronderstelde kennis reikt op zich niet verder dan de eerste, hooguit tweede klas van het VWO. De ervaring leert echter dat niet iedereen die kennis (meer) paraat heeft. Voor degene die zijn/haar kennis wil opfrissen, biedt de onderstaande tekst wat toelichting en oefenmateriaal. Achtereenvolgens komen aan de orde het lezen van een grafiek (paragraaf 1), het verband tussen rechte lijnen en lineaire vergelijkingen (paragrafen 2 tot en met 4), het rekenen in absolute en procentuele veranderingen (paragrafen 5 en 6), en het oplossen van lineaire vergelijkingen (paragraaf 7). In paragraaf 8 wordt het berekenen van oppervlaktes van driehoeken gerepeteerd. In paragraaf 9 wordt kort aandacht besteed aan kansen en verwachte waarden. En in paragraaf 10 worden aan de hand van cijfervoorbeelden de belangrijkste rekenregels, zoals het wegwerken van haken en het delen door een breuk, doorgenomen. De tekst wordt afgesloten met een aantal oefenopgaven (met bijbehorende antwoorden) in paragraaf 11.

1. OVER GRAFIEKEN

De economie probeert verbanden zichtbaar te maken, zoals tussen de productieomvang en de kosten van een onderneming, tussen het inkomen en het nut (het niveau van welbevinden) van een individu, tussen de prijs van een product en de hoeveelheid die afnemers van het product willen kopen, e.d.
Neem het verband tussen de prijs van benzine en het gemiddelde aantal kilometers dat per jaar met een auto wordt afgelegd. Als er een <u>causaal verband</u> bestaat tussen deze grootheden, zodat de prijs van benzine het aantal met de auto afgelegde kilometers beïnvloedt, zeggen we dat het aantal autokilometers een <u>functie</u> is van de prijs van benzine.
Dergelijke causale verbanden kunnen op verschillende manieren worden weergegeven: in woorden, met cijfers in een tabel, met lijnen in een grafiek, met symbolen in een wiskundige vergelijking.

In woorden zou het causale verband als volgt kunnen luiden: Wanneer de prijs van een liter benzine stijgt, wordt autorijden duurder en neemt het gebruik van de auto af.

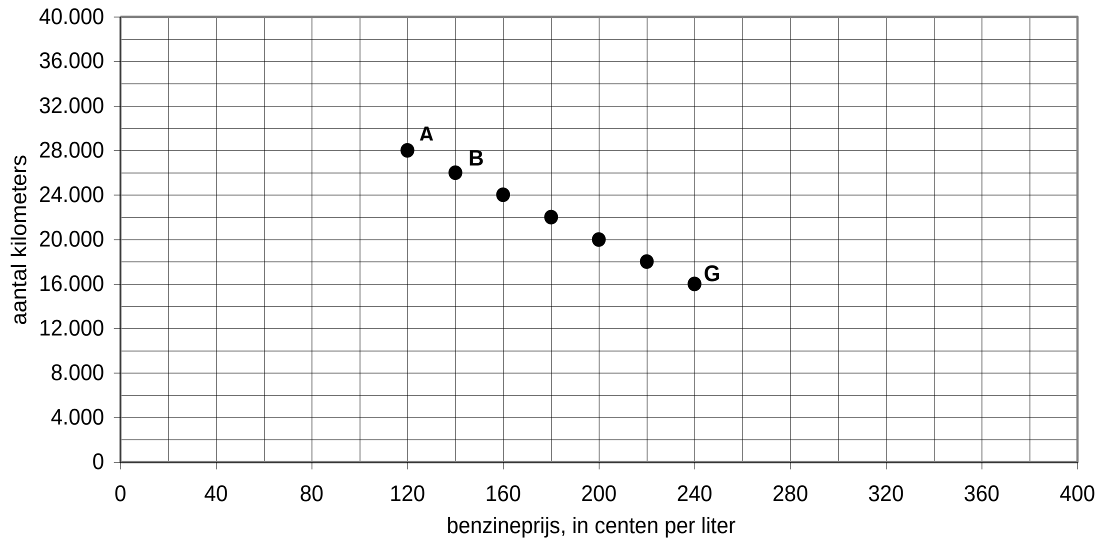
Het verband kan ook wat concreter worden gemaakt. Daarvoor hebben we cijfers nodig. Neem tabel 1, waarin voor een bepaalde consument (zeg, M) met een gegeven inkomen (zeg, € 25.000) het aantal in een jaar met de auto afgelegde kilometers bij verschillende prijzen voor een liter benzine is weergegeven. De tabel vertelt ons dat bij een stijging van de benzineprijs van 120 naar 200 cent per liter het aantal afgelegde kilometers daalt van 28.000 naar 20.000 per jaar.

Tabel 1

prijs van een liter benzine in centen	aantal autokilometers per jaar
120	28.000
140	26.000
160	24.000
180	22.000
200	20.000
220	18.000
240	16.000

Datzelfde verband tussen de benzineprijs en het aantal afgelegde kilometers kunnen we ook in een grafiek weergeven. Daartoe moeten we de getallen uit tabel 1 op een of andere manier tegen elkaar afzetten. Dat doen we in figuur 1.

Figuur 1



Eerste stap bij het maken van een grafiek is het benoemen en indelen van de assen. Het is gebruikelijk om de 'onafhankelijke variabele', dat wil zeggen de variabele die in het causale verband de 'oorzaak' vertegenwoordigt, op de horizontale as af te zetten. Daarom zetten we in figuur 1 de prijs op de horizontale as, met een schaalindeling die loopt van 0 tot, zeg, 400 cent per liter. Op de verticale as kunnen we dan de 'afhankelijke variabele' zetten, dat wil zeggen de variabele die in het causale verband het 'gevolg' vertegenwoordigt. Dat wordt in figuur 1 het aantal afgelegde kilometers per jaar, met een schaalindeling die loopt van 0 tot, zeg, 40.000 kilometer.

Hebben we eenmaal een assenstelsel, dan kunnen we, door aflezen op de assen, voor onszelf nagaan wat punten in de grafiek betekenen. Elk punt geeft een combinatie weer van een bepaalde benzineprijs (af te lezen op de horizontale as) en een bepaalde omvang van het autogebruik (af te lezen op de verticale as). Neem punt A. Dat vertelt ons dat bij een benzineprijs van 120 cent per liter (op de horizontale as) het aantal autokilometers (op de verticale as) uitkomt op 28.000. Punt B laat zien dat bij een benzineprijs van 140 cent per liter het aantal autokilometers uitkomt op 26.000. En zo voort, tot aan punt G dat aangeeft dat bij een benzineprijs van 240 cent per liter het aantal autokilometers uitkomt op 16.000. Aldus is duidelijk dat de punten A tot en met G niets meer en niets minder zijn dan de grafische weergave van de cijfermatige informatie in tabel 1.

Door de punten in de grafiek onderling met elkaar te vergelijken, zien we in één oogopslag dat ze een dalende tendens vertegenwoordigen. Bij een stijgende benzineprijs (dat wil zeggen: als we langs de horizontale as van links naar rechts bewegen, van 120 naar 240 cent), blijkt het autogebruik van consument M te dalen (dat wil zeggen: als we steeds bij elke prijs het bijhorende aantal autokilometers langs de verticale as opzoeken, zakken we langzaam naar beneden, van 28.000 naar 16.000).

Een bijzonderheid in economische analyses

In het voorgaande zijn we uitgegaan van de gebruikelijke manier om de assen van grafieken in te delen en af te lezen. Maar er zijn uitzonderingen en uitgerekend één daarvan komt veel voor in economische analyses. Zodra economen een grafiek maken van het functioneren van een markt, dat wil zeggen de interactie tussen de gevraagde hoeveelheid, de aangeboden hoeveelheid en de prijs van een bepaald product, zetten ze de prijs op de verticale as en de hoeveelheid op de horizontale as.[1] Dat betekent dat economen het verband tussen de benzineprijs en het autogebruik eigenlijk nooit weergeven in de vorm van figuur 1 (hoewel dat eigenlijk het meest logische zou zijn), maar in de vorm van figuur 2.

Het principe van het maken en aflezen van een grafiek verandert niet. Eerst moeten de variabelen op de assen worden benoemd en ingedeeld. En vervolgens kan voor elk punt in de grafiek op de assen worden afgelezen, welke waarde van de ene variabele hoort bij een bepaalde waarde van de andere variabele. Het is alleen oppassen geblazen bij de richting van het causale verband. De oorzaak-gevolg-relatie loopt in dit geval niet meer van de horizontale naar de verticale as, maar van de verticale naar de horizontale as.[2]

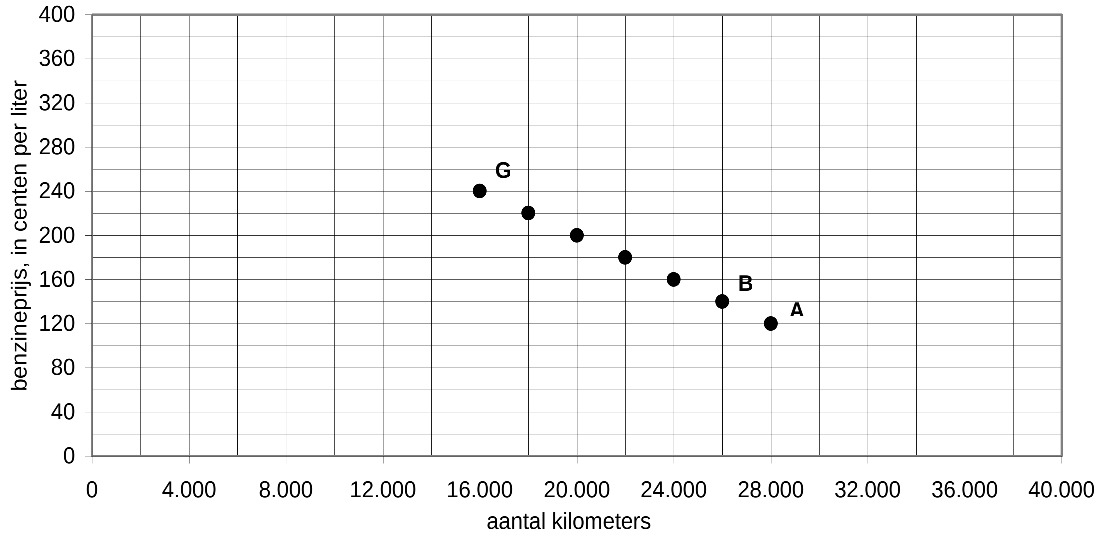
Zo geeft figuur 2 wederom in grafiekvorm het verband weer tussen de benzineprijs en de omvang van het autogebruik, zoals dat bekend is uit tabel 1. Alleen staat de benzineprijs nu op de verticale as en het aantal autokilometers op de horizontale as. Punt A geeft weer aan dat bij een benzineprijs van 120 cent per liter (af te lezen op de verticale as) een aantal autokilometers hoort van 28.000 op de horizontale as, enz.

---

[1] Dat is deels aloude traditie, maar het heeft ook een inhoudelijk voordeel, omdat de belangrijke relaties op korte en lange termijn tussen productiekosten, prijs en winst gemakkelijker zichtbaar gemaakt kunnen worden.

[2] Dat hoeft geen enkel probleem te vormen, als de lezer van een grafiek altijd maar eerst goed kijkt welke grootheden er precies op de assen staan afgebeeld, en zich vervolgens afvraagt welke relatie de grafiek eigenlijk beoogt weer te geven.

Figuur 2



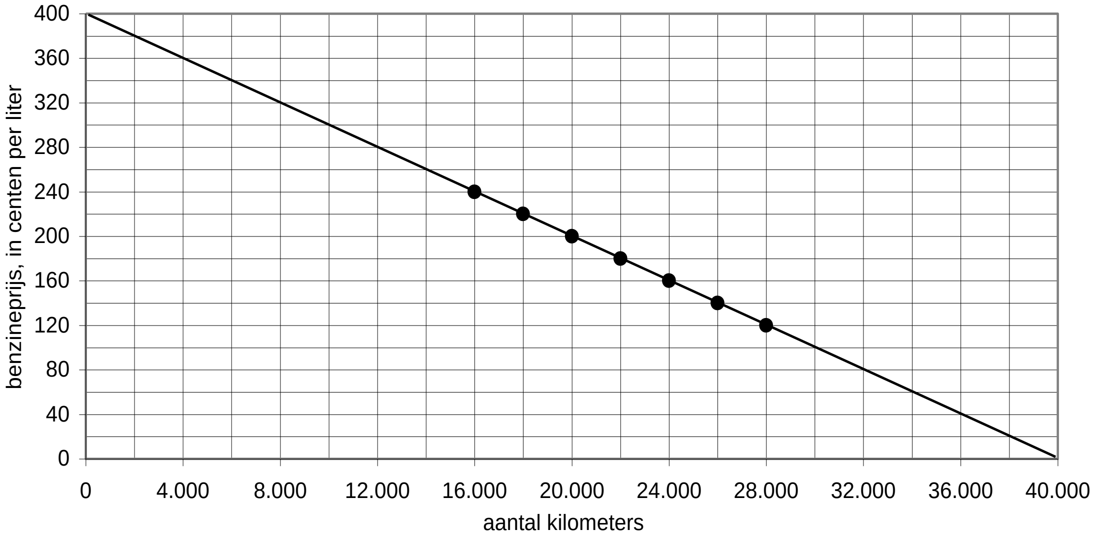
En door de punten in de grafiek onderling met elkaar te vergelijken, kunnen we weer in één oogopslag zien dat ze een dalende tendens vertegenwoordigen. Bij een stijgende benzineprijs (dat wil zeggen: als we langs de verticale as omhoog bewegen, van 120 naar 240 cent), blijkt het autogebruik van consument M te dalen (dat wil zeggen: als we steeds bij elke prijs het bijhorende aantal autokilometers langs de horizontale as opzoeken, schuiven we langzaam van rechts naar links, van 28.000 naar 16.000).

2 VAN RECHTE LIJNEN EN LINEAIRE VERBANDEN

Kijken we opnieuw naar figuur 2, dan zal duidelijk zijn dat de punten A tot en met G met elkaar verbonden kunnen worden door een rechte lijn. Met behulp van die verbindende lijn is het mogelijk om ook voor andere dan de in de tabel gegeven prijzen te voorspellen hoeveel kilometer er met de auto wordt afgelegd.[3] Als de prijs van een liter benzine, bijvoorbeeld, 280 cent bedraagt, kan uit de figuur worden afgelezen dat er per jaar 12.000 kilometer met de auto wordt gereden.

[3] We kunnen ons voorstellen dat de gegevens uit tabel 1 naar boven zijn gekomen uit een gericht marktonderzoek. Dan is de veronderstelling zo gek nog niet dat we het autogebruik voor tussenliggende waarden van de benzineprijs kunnen vinden door *interpolatie*, lees: door het trekken van een verbindingslijn. Of we die verbindingslijn ook zonder meer mogen doortrekken buiten de in tabel 1 genoemde waarden van de benzineprijs, is een andere kwestie. We gaan er hier voor onze wis- en rekenkundige oefening gemakshalve van uit, dat dat doortrekken inderdaad mag. Maar als het om een praktische toepassing zou gaan, zou de gebruiker nog even goed moeten bekijken of zo'n simpele *extrapolatie* wel correct is.

Figuur 3



Met de vaststelling dat er een rechtlijnig ofwel lineair verband bestaat tussen de benzineprijs en het aantal afgelegde autokilometers, kunnen we de volgende stap maken. Zo'n lineair verband kunnen we namelijk algebraïsch weergeven met een vergelijking.

Daarvoor moeten we eerst symbolen definiëren. Het is in de economie redelijk gebruikelijk om de prijs van een product weer te geven met het symbool p, en de hoeveelheid met het symbool q.[4] Als we dat ook hier doen, en met p de benzineprijs per liter in centen en met q het autogebruik in kilometers aanduiden, luidt de vergelijking voor de rechte lijn in figuur 3 als volgt:

$$p = -0{,}01q + 400. \qquad (1)$$

Wat vergelijking (1) doet, is ons in staat stellen om voor iedere denkbare waarde van q de bijbehorende waarde van p uit te rekenen.

Neem, bijvoorbeeld, q = 0, of q = 20.000, of q = 40.000. Door invullen in vergelijking (1) kunnen we zonder veel problemen de bijbehorende waarden van p uitrekenen.
Zo volgt bij q = 0: $p = -0{,}01q + 400 = -0{,}01 \times 0 + 400 = 0 + 400 = 400$,
bij q = 20.000 volgt: $p = -0{,}01q + 400 = -0{,}01 \times 20.000 + 400 = -200 + 400 = 200$,
en bij q = 40.000 volgt: $p = -0{,}01q + 400 = -0{,}01 \times 40.000 + 400 = -400 + 400 = 0$.[5]

Zoals de lezer zelf kan controleren, liggen de berekende combinaties van p en q inderdaad alle drie op de verbindingslijn in figuur 3. Vergelijking (1) vormt dus inderdaad de algebraïsche weergave van die lijn.

---

4 Met een verwijzing naar de Engelse termen: p = price, q = quantity. Maar een keuze van andere symbolen, mits goed gedefinieerd, zou ook kunnen.

5 Het omgekeerde, bij een bepaalde waarde van p de bijbehorende waarde van q uitrekenen, kan ook, maar vergt een beetje herschrijven (zie daarover ook paragraaf 4). Neem bijvoorbeeld p = 280. Invullen in vergelijking (1) $p = -0{,}01q + 400$ geeft $280 = -0{,}01q + 400$, wat te herschrijven is tot $0{,}01q = 400 - 280 = 120$. En daaruit volgt q = 12.000.

3. LINEAIRE VERGELIJKINGEN IN HET ALGEMEEN

Heel in het algemeen kunnen we een lineair verband tussen twee grootheden x en y weergeven door de vergelijking

$$y = ax + b \qquad (2)$$

waarin de coëfficiënten a en b constanten zijn.[6] Wanneer de waarden van de coëfficiënten a en b gegeven zijn, kan met behulp van deze vergelijking voor iedere waarde van de grootheid x de bijbehorende waarde van de grootheid y worden uitgerekend.

Het moge duidelijk zijn dat vergelijking (1) een speciaal geval is van vergelijking (2), waarbij voor de grootheden x en y respectievelijk het aantal autokilometers en de prijs van een liter benzine wordt gelezen, terwijl voor de coëfficiënten a en b geldt: a = −0,01 en b = 400.

Wanneer we een vergelijking zoals (2) grafisch willen weergeven, wordt in principe de grootheid y op de verticale as afgebeeld en de grootheid x op de horizontale as. Voor het grafisch weergeven van een lineair verband zoals in vergelijking (2) kunnen we, naar analogie van tabel 1, een reeks punten bepalen van bij elkaar behorende waarden van x en y, deze punten uitzetten in de grafiek en ze vervolgens met elkaar verbinden. In het geval van een lineaire vergelijking betekent dat echter onnodig werk. Bij een lineaire vergelijking kan namelijk worden volstaan met slechts twee (verschillende) punten. Met behulp van een liniaal kan dan eenvoudig door die twee punten een rechte lijn worden getrokken. Elk ander punt dat zou worden uitgerekend, ligt ook op die rechte lijn.

Ten aanzien van de precieze ligging van de rechte lijn in de grafiek spelen de twee coëfficiënten a en b, hoe kan het ook anders, een doorslaggevende rol.
De coëfficiënt b is bepalend voor de <u>hoogte</u> van de lijn en wordt wel het <u>intercept</u> van de lijn genoemd. Uit vergelijking (2) is af te lezen dat de grootheid op de verticale as, y, de waarde b heeft als de grootheid op de horizontale as, x, gelijk is aan 0. Het intercept is dus niets anders dan het snijpunt van de lijn met de verticale as. Naarmate het intercept b groter is, ligt dit snijpunt verder naar boven.
De coëfficiënt a is bepalend voor de <u>helling</u> van de lijn en wordt wel de <u>richtingscoëfficiënt</u> van de lijn genoemd. Als a positief is, is de lijn stijgend; als a negatief is, is de lijn dalend. Naarmate de waarde van a groter is, verloopt de lijn in de grafiek steiler.

We kunnen de rol van de coëfficiënten a en b illustreren aan de hand van cijfervoorbeelden, waarbij we consument M uit het voorgaande (zie tabel 1 en vergelijking (1)) weer als uitgangspunt nemen.
Neem eerst aan dat deze consument de beschikking krijgt over € 5.000 meer inkomen en (een deel van) dat extra inkomen gebruikt om meer te gaan rijden. Natuurlijk blijft ook de prijs een rol spelen. Maar bij elke denkbare prijs voor een liter benzine gaat hij meer kilometers rijden dan voorheen. Zie tabel 2.

[6] Voor alle duidelijkheid: ax verwijst naar het product, de vermenigvuldiging, van a en x. Voor het aanduiden van een vermenigvuldiging wordt in wiskundige afleidingen, in plaats van het welbekende teken ×, vaak een · gebruikt. Dat voorkomt verwarring met het algemene wiskundige symbool x voor een variabele grootheid. Wanneer er geen misverstand kan ontstaan, wordt de · ook vaak weggelaten.

Tabel 2

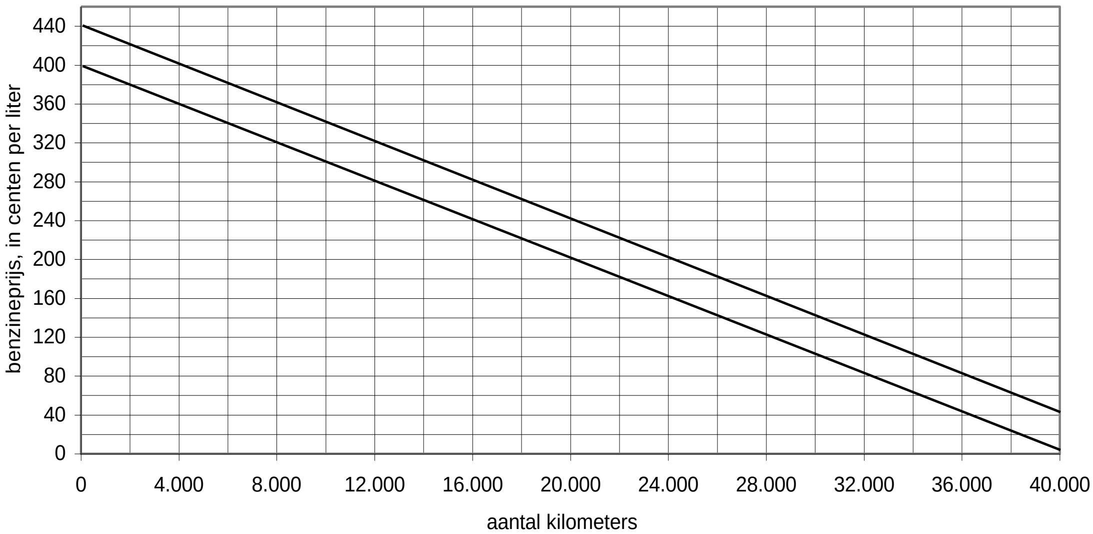
prijs van een liter benzine, in centen	aantal autokilometers	
	was	wordt
120	28.000	32.000
140	26.000	30.000
160	24.000	28.000
180	22.000	26.000
200	20.000	24.000
220	18.000	22.000
240	16.000	20.000

In algebraïsche vorm luidt het nieuwe verband uit de tabel:

$p = -0{,}01q + 440.$ (3)

Als we de grafische weergave van deze lineaire vergelijking toevoegen aan figuur 3, ontstaat figuur 4. Merk op dat beide lijnen in figuur 4 dezelfde helling hebben; deze helling wordt weergegeven door de gelijke richtingscoëfficiënt −0,01 in de vergelijkingen (1) en (3).

Figuur 4



Het intercept van beide lijnen daarentegen, het snijpunt met de verticale as, verschilt wel. Het intercept is te berekenen als de prijs p behorende bij een hoeveelheid q van 0. Invullen van q = 0 in vergelijking (1) geeft p = 400. Op dezelfde wijze volgt uit vergelijking (3) dat het intercept van de tweede lijn gelijk is aan 440.
Een inkomensstijging leidt in het geval van consument M dus tot een evenwijdige verschuiving van de lijn naar boven (of, als u dat liever zegt, naar rechts). Bij dezelfde prijs worden meer kilometers met de auto gereden dan voorheen.

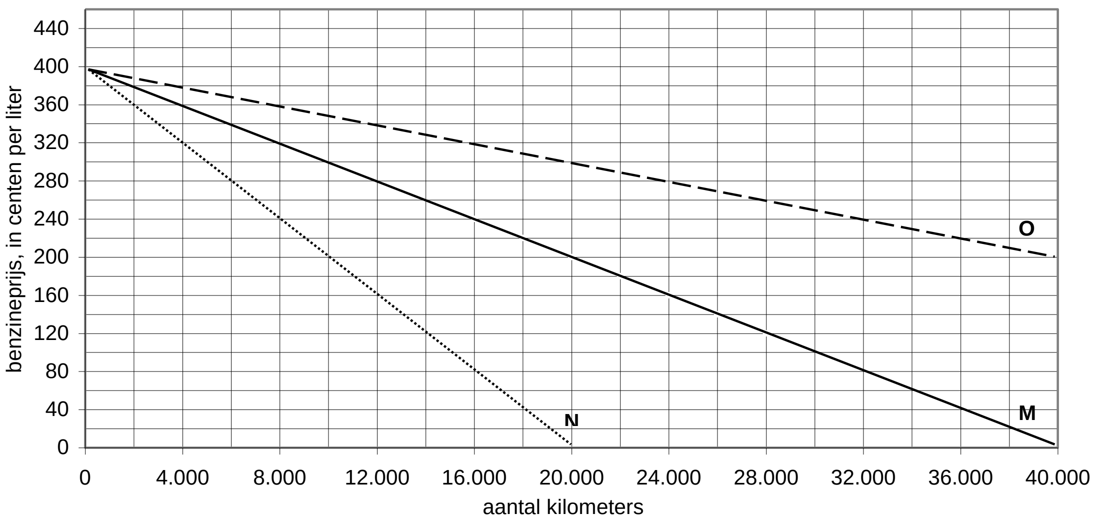
Tabel 3 geeft een tweede cijfervoorbeeld. De tabel geeft niet alleen het verband tussen de prijs voor benzine en het aantal autokilometers voor consument M, maar ook voor twee andere consumenten N en O. Deze drie consumenten reageren niet allemaal even sterk op veranderingen in de benzineprijs. Als de prijs met 20 cent stijgt, gaat consument M 2.000 kilometer per jaar minder rijden, terwijl consument N slechts 1.000 kilometer minder gaat rijden en consument O liefst 4.000 kilometer minder.

Tabel 3

prijs van een liter benzine, in centen	aantal autokilometers		
	consument M	consument N	consument O
120	28.000	14.000	56.000
140	26.000	13.000	52.000
160	24.000	12.000	48.000
180	22.000	11.000	44.000
200	20.000	10.000	40.000
220	18.000	9.000	36.000
240	16.000	8.000	32.000

Figuur 5 geeft deze verbanden grafisch weer:

Figuur 5



De algebraïsche vergelijkingen worden gegeven door:

consument M $p = -0{,}01q + 400,$ (4M)

consument N $p = -0{,}02q + 400,$ (4N)

consument O $p = -0{,}005q + 400.$ (4O)

De drie lijnen hebben een gelijk intercept; invullen van $q = 0$ geeft in alle drie gevallen een intercept $p = 400$. De lijnen hebben wel een verschillende helling. Voor consument M wordt de helling van de lijn gegeven door de richtingscoëfficiënt −0,01, terwijl die voor consument N gelijk is aan −0,02 en voor consument O aan −0,005. Alle drie deze coëfficiënten zijn negatief, tot uitdrukking brengend dat bij een grotere hoeveelheid een lagere prijs hoort. De lijnen hebben dan ook alle drie een dalend verloop. Voorts illustreert de figuur dat de lijn steiler (vlakker) verloopt, naarmate de absolute waarde van de richtingscoëfficiënt hoger (lager) is.

4. IETS OVER HET HERSCHRIJVEN VAN LINEAIRE VERGELIJKINGEN

In vergelijking (1) is het verband tussen de benzineprijs p en het aantal afgelegde autokilometers q voor consument M weergegeven. In overeenstemming met de grafische weergave in figuur 3 hebben we daarbij de prijs p (de grootheid op de verticale as) in het linkerlid van de vergelijking geplaatst, en de hoeveelheid q (de grootheid op de horizontale as) in het rechterlid. Soms is het in economische analyses echter handig om het verband tussen prijs en hoeveelheid andersom op te schrijven, met de hoeveelheid q in het linkerlid als functie van de prijs p in het rechterlid. Zo kan in plaats van vergelijking (1)

$$p = -0{,}01q + 400 \qquad (1)$$

ook de - volstrekt gelijkwaardige - algebraïsche vorm

$$q = -100p + 40.000 \qquad (5)$$

worden gebruikt.

Vergelijking (5) heeft het voordeel dat direct bij elke prijs van een liter benzine uitgerekend kan worden hoeveel kilometer er gereden zal worden. Bij een literprijs van 280 cent wordt er bijvoorbeeld
$q = -100 \cdot 280 + 40.000 = -28.000 + 40.000 = 12.000$
kilometer gereden.

Zoals gezegd is vergelijking (5) niets meer of minder dan een andere schrijfwijze van (1). We kunnen dat laten zien door vergelijking (5) rechtstreeks uit vergelijking (1) af te leiden.
We beginnen daartoe bij vergelijking (1):
$p = -0{,}01q + 400$,
trekken dan eerst aan beide zijden van het gelijkteken 400 af:[7]
$p – 400 = -0{,}01q + 400 – 400$, ofwel
$p – 400 = -0{,}01q$,
vermenigvuldigen vervolgens beide zijden van het gelijkteken met −100:[8]
$-100 \cdot (p – 400) = -100 \cdot (-0{,}01q)$, ofwel
$-100p + 40.000 = q$,
en lezen ten slotte de laatste gelijkheid van rechts naar links:
$q = -100p + 40.000$,

[7] Anders gezegd: we halen de 400 uit de optelling van het rechterlid naar het linkerlid. Maar daarbij slaat wel het teken om.

[8] Anders gezegd: we delen de vermenigvuldingsfactor −0,01 in het rechterlid weg. Maar dan belandt deze in het linkerlid onder de (deel)streep. En delen door een breuk, in dit geval −0,01, is niets anders dan vermenigvuldigen met het omgekeerde, ofwel −100. Verder dient bij het wegwerken van de haakjes bedacht te worden dat min maal min plus is. Wie deze rekenkundige bewerkingen niet meer (allemaal) paraat heeft, wordt verwezen naar paragraaf 10.

wat inderdaad vergelijking (5) oplevert.

5. ANALYSE VAN VERANDERINGEN

In de economie zijn we vaak geïnteresseerd in veranderingen in grootheden. Wanneer de overheid besluit om een extra belasting op benzine te heffen om het gebruik van de auto terug te dringen, willen we bijvoorbeeld kunnen uitrekenen met hoeveel de benzineprijs moet stijgen om het autogebruik met een bepaalde hoeveelheid te verminderen.

Laten we eens kijken wat er gebeurt als de prijs van benzine wordt verhoogd van 240 naar 260 cent per liter. Om een verandering in een grootheid weer te geven wordt veelal het symbool Δ gebruikt: dit is de uit het Griekse alfabet afkomstige hoofdletter delta. We geven de verandering in de prijs p dus aan met Δp. In dit geval geldt $\Delta p = 260 - 240 = 20$.
De verhoging van de prijs heeft gevolgen voor het autogebruik van de consument. Volgens tabel 1 gaat consument M bijvoorbeeld 2.000 kilometer minder rijden. De verandering in het autogebruik kunnen we ook uitrekenen met behulp van de bijbehorende vergelijking. Voor consument M werd het met tabel 1 corresponderende lineaire verband gegeven door vergelijking (1), die, zoals we zojuist hebben gezien, ook kan worden geschreven als:

$$q = -100p + 40.000. \qquad (5)$$

Vóór belastingheffing bedraagt de benzineprijs 240 cent; we geven dit aan met $p_1 = 240$. Hierbij hoort een aantal autokilometers $q_1 = -100 \cdot 240 + 40.000 = 16.000$.
Nà belastingheffing bedraagt de prijs 260 cent: we geven dit aan met $p_2 = 260$. Het bijbehorende aantal kilometers is $q_2 = -100 \cdot 260 + 40.000 = 14.000$.
Er geldt dan:
$\Delta p = p_2 - p_1 = 260 - 240 = 20$ en
$\Delta q = q_2 - q_1 = 14.000 - 16.000 = -2.000$.

Meer in het algemeen kunnen we naar aanleiding van vergelijking (5) schrijven:

$$\begin{aligned}
\Delta q &= q_2 - q_1 \\
&= (-100p_2 + 40.000) - (-100p_1 + 40.000) \\
&= -100p_2 + 40.000 + 100p_1 - 40.000 \\
&= -100p_2 + 100p_1 \\
&= -100(p_2 - p_1) \\
&= -100\Delta p.
\end{aligned}$$

Heel algemeen geldt bij een lineaire vergelijking van de vorm

$$y = ax + b \qquad (2)$$

dat

$$\begin{aligned}
\Delta y &= y_2 - y_1 \\
&= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\
&= ax_2 + b - ax_1 - b
\end{aligned}$$

$= ax_2 - ax_1$
$= a(x_2 - x_1)$
$= a\Delta x.$ (6)

Kortom, de coëfficiënt a die in de vergelijking vóór de grootheid x staat, bepaalt in welke mate de grootheid y verandert bij veranderingen in x. Als we er even over nadenken, is dat ook niet zo gek. Volgens vergelijking (2) wordt de waarde van y immers bepaald door twee termen in het rechterlid van die vergelijking, ax en b. Daarvan is de coëfficiënt b een constante, die op zichzelf staat. Bij veranderingen in x verandert wel de eerste term in het rechterlid van de vergelijking (2), maar niet de tweede term. En omdat die tweede term niet verandert (anders gezegd $\Delta b = 0$), vinden we hem ook niet terug in vergelijking (6).

6. OVER PROCENTUELE MUTATIES

Als het om veranderingen gaat, wordt in de economie niet altijd in absolute bedragen gerekend, maar regelmatig ook in procenten. Een procentuele mutatie geeft aan hoeveel de nieuwe situatie afwijkt van de oude, uitgedrukt in procenten van de oude situatie. Heel algemeen opgeschreven:

$$\text{procentuele mutatie} = \frac{\text{nieuwe waarde} - \text{oude waarde}}{\text{oude waarde}} \cdot 100\%.$$

Neem de prijs p van een bepaald product. Stel dat die in de oude situatie gelijk was aan p_1 en in de nieuwe situatie aan p_2. Dan is de prijsverandering natuurlijk gelijk aan $p_2 - p_1$. In procenten van de oude waarde wordt dat

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cdot 100\%, \text{ of kortweg } \frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%, \qquad (7)$$

Een rekenvoorbeeld ter illustratie. Stel dat de prijs van een product stijgt van € 4 naar € 6 per eenheid. Dan geldt $p_1 = 4$, $p_2 = 6$ en kan de procentuele verandering worden berekend als

$$\frac{6-4}{4} \cdot 100\% = 50\%.$$

Uitgaande van de definitie kunnen we ook uitrekenen wat er met de prijs van een product gebeurt als deze met een bepaald percentage stijgt. Stel dat de prijs op gegeven moment p_1 is. Stel verder dat de prijs met, bijvoorbeeld, 1% stijgt. Hoe groot wordt dan de nieuwe prijs, p_2? Invullen in vergelijking (7) geeft:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cdot 100\% = 1\%,$$

wat ook kan worden geschreven als[9]

[9] De letterlijke vertaling van procent is ‘per honderd’. Dus als de prijsstijging 1% bedraagt, wil dat niets anders zeggen dan dat er op elke 100 cent 1 cent bijkomt. In berekeningen wordt in plaats van 1% vaak 0,01 geschreven. Dat staat tenslotte ook voor één honderdste. Op dezelfde manier kan 50% worden geschreven als 0,50 (of 0,5). En 100%, ofwel honderd honderdsten, wordt 1.

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = 0{,}01.$$

Dat kunnen we uitrekenen door eerst links en rechts te vermenigvuldigen met p_1:
$p_2 - p_1 = 0{,}01p_1$,
vervolgens tellen we links en rechts p_1 erbij op:
$p_2 = 0{,}01p_1 + p_1$,
en tenslotte brengen we p_1 buiten haakjes:
$p_2 = (0{,}01 + 1)p_1$, ofwel
$p_2 = 1{,}01p_1$.

Ook hier weer een rekenvoorbeeld ter illustratie. Stel dat de prijs van een product € 4 bedraagt. Als die met een 1% zou stijgen, zou hij gelijk worden aan
$p_2 = 1{,}01 \cdot 4 = 4{,}04$.

Een toepassing

Stel dat we het autogebruik van consument M uit het voorafgaande met 10% zouden willen verminderen. Stel verder dat in de uitgangssituatie de benzineprijs 240 cent per liter bedraagt. Met hoeveel procent moet dan de prijs van benzine omhoog?

Het autogebruik van consument M wordt gegeven door vergelijking (5)
$q = -100p + 40.000$.

In de uitgangssituatie bedraagt de prijs voor benzine $p_1 = 240$. Het bijbehorende gebruik q_1 is:
$q_1 = -100 \cdot 240 + 40.000 = 16.000$.

Als het nieuwe gebruik q_2 10% lager moet liggen, betekent dat:
$q_2 = 14.400$,
immers:

$$\frac{q_2 - q_1}{q_1} \cdot 100\% = \frac{14.400 - 16.000}{16.000} \cdot 100\% = \frac{-1.600}{16.000} \cdot 100\% = -10\%.$$

De bij dit gebruik behorende prijs p_2 is te berekenen uit:
$14.400 = -100p_2 + 40.000$
$100p_2 = 25.600$
$p_2 = 256$.

De prijs moet blijkbaar met 16 cent stijgen. Dat is een stijging met 6,7%, immers

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cdot 100\% = \frac{256 - 240}{240} \cdot 100\% = \frac{16}{240} \cdot 100\% = 6{,}7\%.$$

7. SNIJPUNTEN UITREKENEN

In de economie wordt veel naar marktevenwichten gekeken. Daarbij gaat het om de vraag bij welke prijs en hoeveelheid de vraag- en de aanbodlijn elkaar snijden. Wie erg netjes kan tekenen, kan dergelijke snijpunten proberen af te lezen in grafieken. Maar het algebraïsch uitrekenen van een snijpunt van twee rechte lijnen, ofwel het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen, is ook niet zo moeilijk.

We beginnen met een voorbeeld. Laat de vraag naar en het aanbod van een product gegeven zijn door respectievelijk:

$q_v = -10p + 1.000,$ (7)

$q_a = 20p - 800.$ (8)

Er is sprake van een marktevenwicht als de aangeboden hoeveelheid gelijk is aan de gevraagde hoeveelheid, dat wil zeggen als:

$q_a = q_v$ (9)

Invullen van de vergelijkingen (7) en (8) in de evenwichtsvoorwaarde (9) geeft:
$20p - 800 = -10p + 1.000.$

Deze vergelijking in p kunnen we oplossen door alle termen met een p erin aan één kant van het gelijkteken te brengen en alle andere termen aan de andere kant van het gelijkteken. Dit gaat als volgt.
Uitgaande van
$20p - 800 = -10p + 1.000$
tellen we eerst aan beide zijden 10p erbij op:
$20p - 800 + 10p = -10p + 1.000 + 10p$, ofwel
$30p - 800 = 1.000$,
vervolgens tellen we er aan beide zijden 800 bij op:
$30p - 800 + 800 = 1.000 + 800$, ofwel
$30p = 1.800$
en tenslotte delen we beide zijden door 30:
$\frac{30p}{30} = \frac{1.800}{30}$, ofwel $p = 60$.

We kunnen deze uitkomst controleren door de gevonden prijs in te vullen in de vraag- en aanbodvergelijkingen:

$q_v = -10p + 1.000 = -10 \cdot 60 + 1.000 = -600 + 1.000 = 400,$

$q_a = 20p - 800 = 20 \cdot 60 - 800 = 1.200 - 800 = 400.$

En inderdaad: $q_a = q_v$.

Algemene uitwerking

We sluiten af met een algemene bepaling van de evenwichtsprijs. Stel dat de vraag naar en het aanbod van een bepaald goed worden gegeven door respectievelijk

$q_v = ap + b$, waarbij de coëfficiënt a negatief is, en

$q_a = cp + d$, waarbij de coëfficiënt c positief is.

Er is sprake van evenwicht als
$q_a = q_v$.

Invullen van de vraag- en aanbodvergelijking in de evenwichtsvoorwaarde geeft:
$cp + d = ap + b$.

Deze vergelijking kunnen we oplossen door aan beide zijden ap af te trekken
$cp + d - ap = ap + b - ap$, ofwel
$cp - ap + d = b$,
vervolgens de prijs p buiten haken te brengen:
$(c - a)p + d = b$,
aan beide zijden d af te trekken
$(c - a)p + d - d = b - d$, ofwel
$(c - a)p = b - d$,
en ten slotte aan beide zijden door (c – a) te delen
$\frac{(c-a)p}{(c-a)} = \frac{(b-d)}{(c-a)}$,
waarna de algemene oplossing is bereikt:
$p = \frac{(b-d)}{(c-a)}$.

Merk op dat we deze algemene oplossing (ze is tenslotte algemeen) ook zouden kunnen gebruiken voor het eerdere rekenvoorbeeld. In het rekenvoorbeeld geldt:
$a = -10$, $b = 1.000$, $c = 20$ en $d = -800$.
Invullen in de algemene oplossingsformule geeft
$p = \frac{(b-d)}{(c-a)} = \frac{1.000-(-800)}{20-(-10)} = \frac{1.800}{30} = 60$.
en dat is inderdaad wat we al eerder hebben uitgerekend.

8. OPPERVLAKTEN VAN DRIEHOEKEN

Als de prijs en de hoeveelheid in het marktevenwicht bekend zijn, willen economen graag ook nog weten in hoeverre dat marktevenwicht een bijdrage levert aan de maatschappelijke welvaart. Dat kan vaak inzichtelijk worden gemaakt met driehoeken in een figuur. De oppervlakte van zo’n driehoek kan bijvoorbeeld het netto-voordeel voor producenten of consumenten weergeven, of het netto-nadeel van geluidsoverlast voor omwonenden.

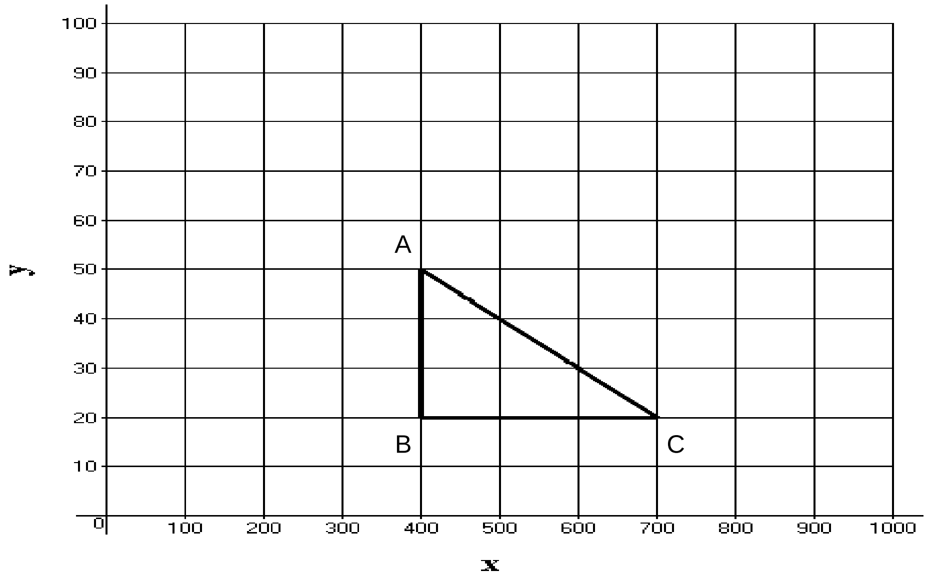
We brengen daarom de hoofdregel voor het berekenen van een oppervlakte van een driehoek in herinnering:

oppervlakte driehoek = ½ × basis × hoogte.

De reden is simpel. Driehoeken zijn altijd op te vatten als helften van rechthoeken, en de oppervlakte van een rechthoek is nu eenmaal gelijk aan lengte × breedte, of basis × hoogte.

Stel dat we in figuur 6 de oppervlakte willen uitrekenen van de rechthoekige driehoek ABC.

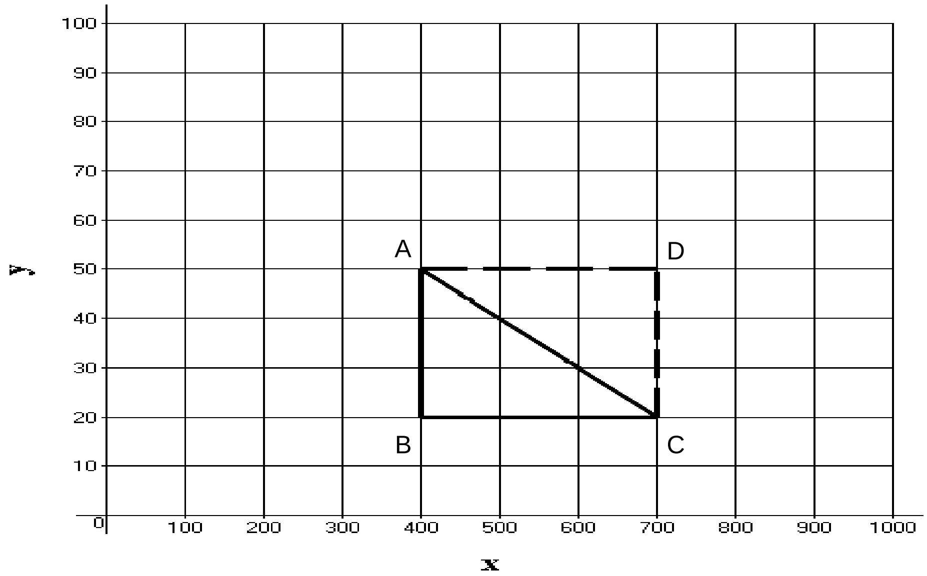
Figuur 6



De basis van die driehoek (evenwijdig aan de horizontale as, van x = 400 tot x = 700) heeft een lengte van 300; de hoogte is 30 (de afstand in verticale richting van het hoogste punt tot de basis, van y = 50 tot y = 20). Voor de oppervlakte geldt dus:
oppervlakte driehoek = ½ × basis × hoogte = ½ · (700 – 400) · (50 – 20) = ½ · 300 · 30 = 4.500.

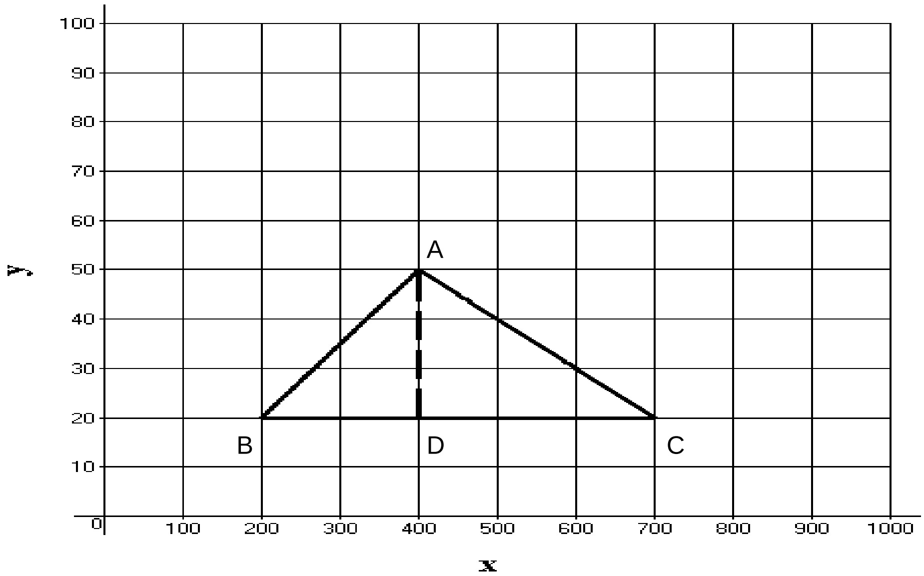
Voor wie daar problemen mee heeft: kijk naar figuur 7 waarin de driehoek met hulplijnen is aangevuld tot de grote omvattende rechthoek ABCD. De oppervlakte van de driehoek is de helft van de oppervlakte van de omvattende rechthoek; en die laatste oppervlakte is gelijk aan lengte × breedte, ofwel basis × hoogte, ofwel (700 – 400) · (50 – 20) = 300 · 30 = 9.000.

Figuur 7



De hoofdregel verandert niet als de driehoek niet rechthoekig is. Neem de driehoek ABC in figuur 8. De basis van driehoek ABC (evenwijdig aan de horizontale as, van x = 200 tot x = 700) heeft een lengte van 500; de hoogte is 30 (de afstand in verticale richting van het hoogste punt tot de basis, van y = 50 tot y = 20). Volgens de hoofdregel geldt dus:
oppervlakte driehoek = ½ × basis × hoogte = ½ · (700 – 200) · (50 – 20) = ½ · 500 · 30 = 7.500.

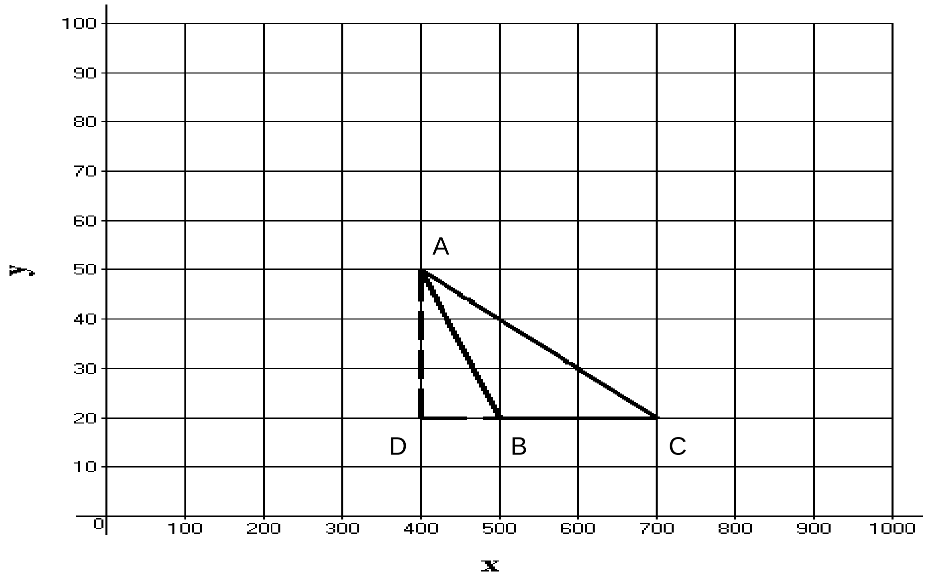
Figuur 8



Voor wie daar problemen mee heeft: kijk nog even opnieuw naar figuur 8. Via een hulplijn is de totale driehoek ABC opgesplitst in de twee rechthoekige driehoeken ADB en ADC. De oppervlakte van de driehoek ABC is natuurlijk niets anders dan de optelsom van de oppervlakten van ADB en ADC.
De oppervlakte van ADC is
½ × basis × hoogte = ½ · (700 − 400) · (50 – 20) = ½ · 300 · 30 = 4.500.
De oppervlakte van ADB is
½ × basis × hoogte = ½ · (400 − 200) · (50 – 20) = ½ · 200 · 30 = 3.000.
De oppervlakte van ABC is de optelsom, ofwel
½ · 300 · 30 + ½ · 200 · 30 = ½ · (300 + 200) · 30 = ½ · 500 · 30 = 7.500.
Kortom, we kunnen eerst de oppervlakten van de twee deeldriehoeken apart uitrekenen en vervolgens optellen, of direct de hoofdregel toepassen; de uitkomst is hetzelfde.

De hoofdregel geldt ten slotte ook als de driehoek scheef staat, zoals driehoek ABC in figuur 9. De basis van die driehoek (evenwijdig aan de horizontale as, van x = 500 tot x = 700) heeft een lengte van 200; de hoogte is 30 (de afstand in verticale richting vanaf het hoogste punt tot de basis, van y = 50 tot y = 20, zie de loodlijn). Volgens de hoofdregel geldt dus:
oppervlakte driehoek = ½ × basis × hoogte = ½ · (700 − 500) × (50 – 20) = ½ · 200 · 30 = 3.000.

Figuur 9



Voor wie daar problemen mee heeft: kijk nog even opnieuw naar figuur 9. Met twee hulplijntjes is van de scheve driehoek ABC een rechthoekige driehoek ADC te maken. De oppervlakte van de scheve driehoek ABC is natuurlijk niets anders dan de oppervlakte van de grote rechthoekige driehoek ADC minus de oppervlakte van de kleine rechthoekige driehoek ADB.
De oppervlakte van ADC is
½ × basis × hoogte = ½ · (700 − 400) · (50 – 20) = ½ · 300 · 30 = 4.500.
De oppervlakte van ADB is
½ × basis × hoogte = ½ · (500 − 400) · (50 – 20) = ½ · 100 · 30 = 1.500.
De oppervlakte van ABC is het verschil, ofwel
½ · 300 · 30 − ½ · 100 · 30 = ½ · (300 − 100) · 30 = ½ · 200 · 30 = 3.000.
En dat is dezelfde uitkomst als bij het direct toepassen van de hoofdregel.

9. OVER KANSEN EN VERWACHTE WAARDEN

In de economie zijn uitkomsten lang niet altijd vooraf precies te voorspellen. Er is dan onzekerheid in het spel. Maar vaak zijn de risico's concreet genoeg om ze toch in cijfers te kunnen vangen en er berekeningen mee te maken. Neem het geval dat we wél een goed idee hebben van de verschillende mogelijke uitkomsten die zich zouden kunnen voordoen, maar - helaas - niet weten welke uitkomst het precies zal worden.

We kunnen dan om te beginnen een lijstje maken van die verschillende mogelijke uitkomsten. Bij voorkeur is dat lijstje volledig. Bij voorkeur ook is het lijstje zo samengesteld dat de verschillende mogelijkheden elkaar uitsluiten. We zouden dan nog altijd niet weten welke uitkomst het uiteindelijk zal worden, maar we zouden de onzekerheid wel hebben ingeperkt. Het wordt immers één en slechts één mogelijkheid van ons lijstje.

Vervolgens kunnen we een inschatting maken van de mate van waarschijnlijkheid, de kans, dat elk van de mogelijkheden zich zal voordoen. Kansen worden uitgedrukt in procenten.

De kans op een bepaalde uitkomst is bijvoorbeeld 40%. Dat wil zeggen: als de situatie zich maar vaak genoeg herhaalt, zal die bepaalde uitkomst gemiddeld op lange termijn in 40 van elke 100 gevallen optreden.
Dan is dus ook bekend dat in 60 van de 100 gevallen die bepaalde uitkomst niet zal optreden, maar een andere uitkomst.
In het algemeen: de som van de kansen van de verschillende uitkomsten op een volledig lijstje van uitsluitende mogelijkheden is 100%.[10]

Gewapend met de kansen kunnen we tenslotte de verwachte uitkomst berekenen. Als de situatie zich vaak genoeg zou herhalen, hoe groot zou dan de gemiddelde uitkomst per geval zijn?

Laten we voor een cijfervoorbeeld weer onze consument M nemen. Neem aan dat die met zijn auto in het ochtendspitsuur van zijn huis in Leiden naar een afspraak in Den Haag moet.
M maakt eerst een volledig lijstje van elkaar uitsluitende mogelijkheden. Stel dat dat er als volgt uitziet.
(1) Er is geen file, zodat hij in 25 minuten van deur tot deur is.
(2) Er is een gewone file, waardoor hij 15 minuten langer onderweg is.
(3) Er is een zware file, waardoor de vertraging oploopt tot 30 minuten.
Vervolgens maakt M op grond van eigen ervaringen, mededelingen van anderen en radioberichten een inschatting van de kansen. De kans op geen file acht hij niet zo groot, 30%; de kans op een gewone file is aanzienlijk groter, 60%. Omdat de kansen moeten optellen tot 100%, blijft er dan nog 10% over voor de kans op een zware file.
Wat betreft de reistijd zijn er dus drie mogelijkheden, te weten 25, 40 en 55 minuten, met bijbehorende kansen van 30%, 60% en 10%. Gewapend met de kansen kan M dan de verwachte reistijd uitrekenen. Die is gelijk aan $0{,}30 \cdot 25 + 0{,}60 \cdot 40 + 0{,}10 \cdot 55 = 37$ minuten.

Voor wie twijfelt: neem aan dat M de rit veel en veel vaker maakt. In 30 op de 100 gevallen is zijn reistijd 25 minuten, in 60 op de 100 gevallen is hij 40 minuten kwijt, en in 10 op de 100 gevallen 55 minuten. Zijn totale reistijd komt dan voor 100 gevallen samen uit op $30 \cdot 25 + 60 \cdot 40 + 10 \cdot 55 = 3.700$ minuten. Gemiddeld per rit is dat 37 minuten.

10. ENKELE REKENKUNDIGE BEWERKINGEN

Haast ongemerkt zijn in de voorgaande paragrafen een aantal rekenkundige operaties uitgevoerd die sommigen wellicht voor problemen hebben gesteld. Hieronder laten we de belangrijkste rekenregels de revue passeren. We laten steeds meer algemene, abstracte operaties voorafgaan door getallenvoorbeelden die wat gemakkelijker invoelbaar (en controleerbaar) zijn.

[10] In meer algemene afleidingen wordt de kans dat een bepaalde uitkomst zich voordoet vaak aangegeven met het symbool p (een verwijzing naar de Engelse term probability). De kans dat die bepaalde uitkomst zich niet voordoet, is dan 1 – p. Immers, omdat de genoemde mogelijkheden elkaar uitsluiten, tellen hun kansen op tot 100%, ofwel honderd honderdsten, ofwel 1.

Algemeen

min keer min is plus, dus $-2 \cdot -3 = 6$

delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde, dus $\frac{3}{0{,}5} = \frac{3}{½} = 2 \cdot 3 = 6$

Operaties met haakjes

Haken wegwerken

$3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 21$, dus ook

$3(x + y) = 3x + 3y$

$4 \cdot (3 - 1) = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 8$, dus ook

$4(x - y) = 4x - 4y$

$a(x - y) = ax - ay$

$-(5 + 2) = -5 - 2 = -7$

$-(ax + b) = -ax - b$

$-3 \cdot (10 - 7) = -3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = -9$

$-3 \cdot (2x - y) = -3 \cdot 2x + 3 \cdot y = -6x + 3y$

$-a(bx - cy) = -abx + acy$

Buiten haken brengen

$3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$

$ax + bx = (a + b)x$

$7x - 4x = (7 - 4)x = 3x$

$ax - bx = (a - b)x$

$-4x + 7x = (-4 + 7)x = 3x$

$-ax + bx = (-a + b)x$

Operaties met vergelijkingen

Optellen en aftrekken

$4x = 2x + 8$	$\Rightarrow 4x - 2x = 8$	$\Rightarrow 2x = 8$	$\Rightarrow x = 4$
$4x + 5 = 2x + 13$	$\Rightarrow 4x - 2x = 13 - 5$	$\Rightarrow 2x = 8$	$\Rightarrow x = 4$
$ax + b = cx + d$	$\Rightarrow ax - cx = d - b$	$\Rightarrow (a - c)x = d - b$	$\Rightarrow x = \frac{d - b}{a - c}$

$4x - 5 = -2x + 13$	$\Rightarrow 4x + 2x = 13 + 5$	$\Rightarrow 6x = 18$	$\Rightarrow x = 3$
$ax - b = -cx + d$	$\Rightarrow ax + cx = d + b$	$\Rightarrow (a + c)x = d + b$	$\Rightarrow x = \frac{d + b}{a + c}$

Vermenigvuldigen en delen

$10x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$

$20x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{20} = ½$

$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

$ax = y \Rightarrow x = \frac{1}{a} . y$ of $x = \frac{y}{a}$

$10x = 20 + 10 \Rightarrow x = \frac{20 + 10}{10} = 3$ of $x = \frac{1}{10} . (20 + 10) = 3$

$ax = b + c \Rightarrow x = \frac{b + c}{a}$ of $x = \frac{1}{a} (b + c)$

$(4 – 2)x = 10 – 4 \Rightarrow x = \frac{10 – 4}{4 – 2} = 3$ of $x = \frac{1}{(4 – 2)} . (10 – 4) = \frac{1}{2} . 6 = 3$

$(a – c)x = d – b \Rightarrow x = \frac{d – b}{a – c}$ of $x = \frac{1}{(a – c)} . (d – b)$

$½ x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{½} = 2 \cdot 10 = 20$

$\frac{1}{a} x = b \Rightarrow x = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab$

11. OEFENOPGAVEN (MET ANTWOORDEN)

Opgave 1

Gegeven is de vergelijking voor de vraag naar appels: $q_v = −0,1p + 25$. Hierin is p de prijs per kilo appels in centen en q_v de gevraagde hoeveelheid appels in kilo’s.

a. Teken in een figuur met op de verticale as de prijs p en op de horizontale as de gevraagde hoeveelheid q_v de lijn die door bovenstaande vergelijking gegeven wordt.

b. Schrijf de vergelijking in de vorm $p = aq_v + b$.

c. Stel de prijs stijgt met 50 cent. Met hoeveel verandert dan de gevraagde hoeveelheid appels?

Opgave 2

Gegeven is de vergelijking voor het aanbod van appels: $q_a = 0,1p − 5$. Hierin is p de prijs per kilo appels in centen en q_a de aangeboden hoeveelheid appels in kilo’s.

a. Teken in een grafiek met op de verticale as de prijs p en op de horizontale as de aangeboden q_a de lijn die door bovenstaande vergelijking gegeven wordt.

b. Schrijf de vergelijking in de vorm $p = aq_a + b$.

Opgave 3

Gegeven zijn de vergelijkingen voor de vraag naar en het aanbod van appels:

$q_v = –0,1p + 25$

$q_a = 0{,}1p – 5$

a. Teken de vraag en het aanbod in één figuur. Lees het snijpunt af.

b. Bereken de evenwichtsprijs en de evenwichtshoeveelheid in het snijpunt van de vraag naar en het aanbod van appels.

Stel dat de weersomstandigheden zorgen voor een (extra) goed appeljaar. Het aanbod van appels wordt groter en de functie wordt:

$q_a = 0{,}1p + 5$

c. Teken ook deze functie in de figuur.

d. Bereken opnieuw de evenwichtsprijs en de evenwichtshoeveelheid.

<u>Opgave 4</u>

Gegeven is de vergelijking voor de vraag naar appels: $q_v = −0{,}1p + 25$.

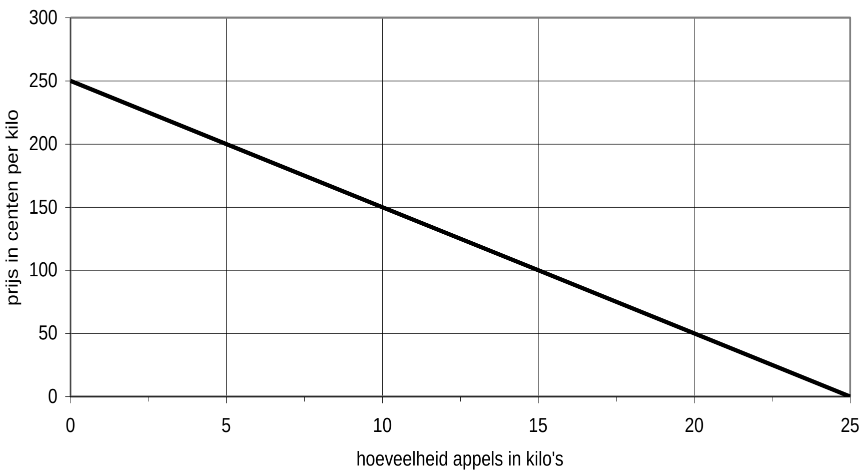
a. Bereken de procentuele verandering van de prijs en van de gevraagde hoeveelheid, als de prijs stijgt van 100 naar 110 cent.

b. Idem, als de prijs stijgt van 200 naar 220 cent.

Antwoorden

<u>Opgave 1</u>

a.



b. $q_v = −0{,}1p + 25$

$q_v – 25 = −0{,}1p$ (aan beide zijden 25 afgetrokken, ofwel: 25 naar links gehaald)

$−q_v + 25 = 0{,}1p$ (beide zijden vermenigvuldigd met −1)

$0{,}1p = −q_v + 25$ (gelijkheid van rechts naar links gelezen)

$p = −10q_v + 250$ (beide zijden vermenigvuldigd met 10)

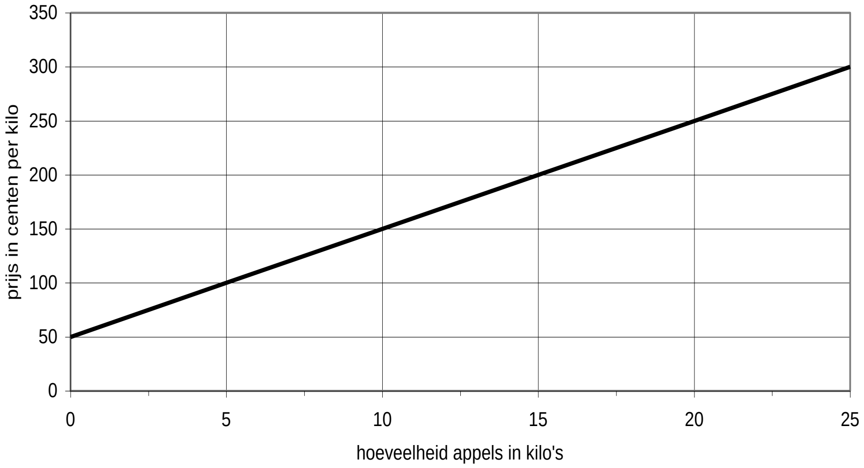
c. $q_v = −0{,}1p + 25 \quad \Rightarrow \Delta q_v = −0{,}1\Delta p$

Voor het geval $\Delta p = 50$ volgt hieruit $\Delta q_v = −0{,}1 \cdot 50 = −5$.

De gevraagde hoeveelheid daalt dus met 5.

Opgave 2

a.



b. $q_a = 0{,}1p - 5$

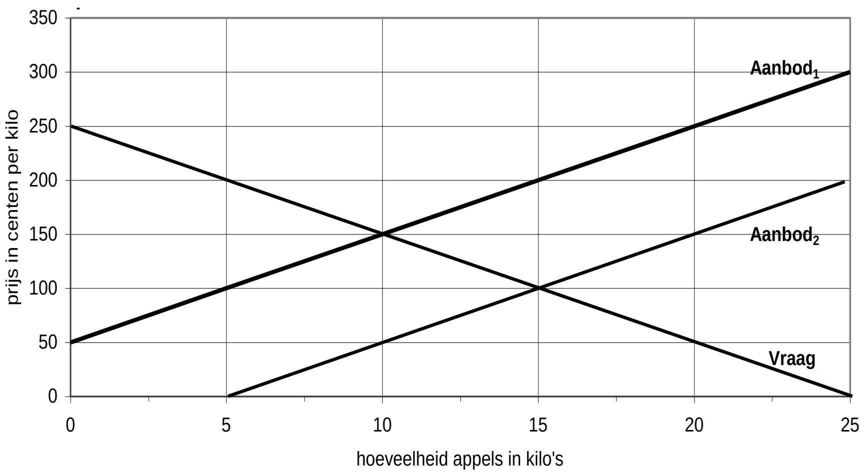
$q_a + 5 = 0{,}1p$ (aan beide zijden 5 erbij opgeteld, ofwel: −5 naar links gehaald)

$0{,}1p = q_a + 5$ (gelijkheid van rechts naar links gelezen)

$p = 10q_a + 50$ (beide zijden vermenigvuldigd met 10)

Opgave 3

a.



Aflezen van het snijpunt geeft de evenwichtswaarden: p = 150 en q = 10

b. Invullen van de vraag- en aanbodvergelijkingen

$q_v = -0{,}1p + 25$

$q_a = 0{,}1p - 5$

in de evenwichtsvoorwaarde $q_a = q_v$ geeft:

$0{,}1p - 5 = -0{,}1p + 25$

Herschrijven, stap voor stap, geeft:

$0{,}1p = -0{,}1p + 30$ (aan beide zijden 5 erbij opgeteld)

$0{,}2p = 30$ (aan beide zijden 0,1p erbij opgeteld)

$p = 150$

Die evenwichtsprijs $p = 150$ kan vervolgens worden ingevuld in de vraag- en in de aanbodvergelijking:

$q_v = -0,1 \cdot 150 + 25 = -15 + 25 = 10$

$q_a = 0,1 \cdot 150 - 5 = 15 - 5 = 10$

De evenwichtshoeveelheid (inderdaad: $q_a = q_v$) is dus gelijk aan 10.

c. Zie de figuur.

d. Invullen van de vraag- en de nieuwe aanbodvergelijking

$q_v = -0,1p + 25$

$q_a = 0,1p + 5$

in de evenwichtsvoorwaarde $q_a = q_v$ geeft:

$0,1p + 5 = -0,1p + 25.$

Herschrijven geeft:

$0,1p = -0,1p + 20$

$0,2p = 20$

$p = 100$

Invullen van de nieuwe evenwichtsprijs $p = 100$ in de vraag- en de aanbodvergelijking geeft:

$q_v = -0,1 \cdot 100 + 25 = -10 + 25 = 15$

$q_a = 0,1 \cdot 100 + 5 = 10 + 5 = 15$

De nieuwe evenwichtshoeveelheid is dus gelijk aan 15.

Opgave 4

a. $p_{oud} = 100 \quad \Rightarrow q_{oud} = -0,1 \cdot 100 + 25 = -10 + 25 = 15$

$p_{nieuw} = 110 \quad \Rightarrow q_{nieuw} = -0,1 \cdot 110 + 25 = -11 + 25 = 14$

De procentuele verandering in de prijs is:

$\frac{110 - 100}{100} \cdot 100\% = \frac{10}{100} \cdot 100\% = 10\%.$

De procentuele verandering in de gevraagde hoeveelheid is:

$\frac{14 - 15}{15} \cdot 100\% = \frac{-1}{15} \cdot 100\% = -6,67\%.$

b $p_{oud} = 200 \quad \Rightarrow q_{oud} = 5$

$p_{nieuw} = 220 \quad \Rightarrow q_{nieuw} = 3$

De procentuele verandering in de prijs is:

$\frac{220 - 200}{200} \cdot 100\% = \frac{20}{200} \cdot 100\% = 10\%.$

De procentuele verandering in de gevraagde hoeveelheid is:

$\frac{3 - 5}{5} \cdot 100\% = \frac{-2}{5} \cdot 100\% = -40\%.$