Samenvatting

In dit proefschrift komen twee onderwerpen aan bod. In deel I beschouwen we de invloed van stochastische reset op het grote afwijkingengedrag van verschillende typen integralen van functies van diffusieprocessen. In deel II beschouwen we de invloed van netwerken op de synchronisatie van oscillatoren, volgens het Kuramoto-model.

Deel I: Stochastische reset

Stochastische reset kan aan een willekeurig stochastisch proces toegevoegd worden en houdt in dat het proces zich op een toevallig gekozen moment herstart. De tijd tussen het herstarten is exponentieel verdeeld met parameter r. Dit heeft een beperkend effect op de positie van het proces, omdat de kans dat het proces zich ver van zijn startpunt bevindt sterk wordt verminderd. We bestuderen hoofdzakelijk hoe integralen van functies van de positie van diffusieprocessen door het toevoegen van stochastische reset worden beïnvloed. We leiden twee algemene relaties af tussen het proces zonder reset en het proces met reset. Door gebruik te maken van deze relaties kunnen we analyseren hoe groot de kans is dat er grote afwijkingen van het verwachte gedrag optreden ten opzichte van het proces zonder stochastische reset.

In hoofdstuk 2 bestuderen we de gemiddelde oppervlakte onder het Ornstein-Uhlenbeckproces (de integraal van de positie gedeeld door de tijd) met stochastische reset. We analyseren ook hoe de verwachte waarde van het gemodificeerde proces verandert als functie van de parameter r. In het bijzonder identificeren we de grote afwijkingen ratefunctie van de oppervlakte onder het Ornstein-Uhlenbeckproces met stochastische reset en analyseren we hoe het minimum verandert met r. Dit hoofdstuk is gebaseerd op een artikel dat voor een natuurkundig tijdschrift is geschreven en heeft daardoor niet dezelfde stijl als de rest van het proefschrift.

In hoofdstuk 3 bestuderen we de fractie van de tijd die de Brownse beweging in de positieve half lijn doorbrengt, de gemiddelde oppervlakte onder de Brownse beweging en de integraal van de absolute waarde van de positie van de Brownse beweging gedeeld door de tijd. We bewijzen ook dat de grote afwijkingen ratefunctie voor alle integralen van functies van de Brownse beweging vanaf een bepaald punt nul is, indien de verwachte waarde van dezelfde functie van de Brownse beweging zonder stochastische reset oneindig is. We bewijzen verder dat de grote afwijkingen ratefunctie direct onder dit punt kwadratisch is. Tevens verwachten we dat het toevoegen van stochastische reset aan een grootheid die zonder reset niet aan een grote afwijkingenbeginsel voldoet niet teweeg kan brengen dat die dit met reset wel doet. Een voorbeeld hiervan is de gemiddelde oppervlakte onder de Brownse beweging.

Deel II: Synchronisatie

Het stochastische Kuramoto-model kan gebruikt worden om de synchronisatie van neuronen in het brein te modelleren. De neuronen zijn aan elkaar gekoppeld en vormen zo een netwerk. Dit soort netwerken heeft de eigenschap dat neuronen sterk gekoppeld zijn aan neuronen in hun eigen groep, maar zwak aan neuronen in een andere groep. In dit deel van het proefschrift bestuderen we hoe deze eigenschap het vermogen van de neuronen om zich te synchroniseren beïnvloedt.

In hoofdstuk 4 kijken we naar een hiërarchisch netwerk waar we op elk niveau N groepen hebben. We bestuderen dit systeem in de limit waar N groot wordt en analyseren het gedrag op verschillende tijdschalen. Het blijkt dat de groepen zich op één gegeven moment synchroniseren en zich vervolgens gedragen als een enkele oscillator, die een groep vormt met alle andere groepen op dit niveau. Of deze nieuwe groep zich synchroniseert wordt bepaald door een kritische conditie die afhangt van de wisselwerking van de oscillatoren op dit hiërarchisch niveau. Zo verspreidt de synchronisatie zich dus naar alle niveaus. Door te analyseren hoe dit gebeurt identificeren we drie universaliteitsklassen: (1) synchronisatie gaat op een bepaald niveau verloren; (2) er is op alle niveaus synchronisatie, maar die gaat naar nul voor steeds hogere niveaus; (3) er is op alle niveaus synchronisatie, en die gaat naar een waarde groter dan nul voor steeds hogere niveaus. Verder bewijzen we een voldoende conditie voor wanneer het systeem in universaliteitsklasse (1) is en een voldoende conditie voor wanneer het systeem in universaliteitsklasse (3) is.

In hoofdstuk 5 bestuderen we een eenvoudiger netwerk. In dit geval zijn er slechts twee groepen, maar nu kan de wisselwerking tussen de groepen ook negatief zijn. Hierdoor wordt het model rijker en ingewikkelder. Er komt namelijk een vertakkingspunt tevoorschijn. Dit maakt het mogelijk dat er stationaire oplossingen zijn waarvoor één van de groepen een hogere synchronisatie heeft dan de andere groep, zelfs als de wisselwerking in beide groepen even sterk is. Zo'n oplossing noemen we een niet-symmetrische oplossing. We geven een classificatie en bestuderen de eigenschappen van het vertakkingspunt. Dit resulteert in het fasediagram met een kritische curve. Aan de ene kant van deze curve zijn alleen symmetrische oplossingen mogelijk, aan de andere kant zowel symmetrische als niet-symmetrische oplossingen. We bestuderen de eigenschappen van deze curve en het synchronisatieniveau waarlangs de vertakking plaatsvindt.

In het laatste hoofdstuk van dit proefschrift passen we de resultaten van hoofdstuk 5 toe op de *suprachiasmatic nucleus* (SCN). De SCN is beter bekend als de *body-clock* en is verantwoordelijk voor het bepalen van alle lichamelijke ritmes. De SCN heeft dezelfde structuur als het netwerk dat we in hoofdstuk 5 hebben onderzocht. Het bestaan van niet-symmetrische stationaire oplossingen zou kunnen verklaren waarom er in experimenten verschillende transities worden waargenomen naar de zogenoemde 'phase-split state', waardoor hamsters en ratten twéé keer per 24 uur actief kunnen zijn in plaats van één keer. In dit hoofdstuk zijn er dus geen nieuwe mathematische resultaten, maar staat het interpreteren van de resultaten van hoofdstuk 5 centraal.